

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS

JEAN-LOUIS NICOLAS

**Répartition des nombres superabondants**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 15, n° 1 (1973-1974),  
exp. n° 5, p. 1-18.

<[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1973-1974\\_\\_15\\_1\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A3_0)>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres »  
implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction  
pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

RÉPARTITION DES NOMBRES SUPERABONDANTS  
par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

1. Introduction.

S. RAMANUJAN [10] a défini et étudié les nombres hautement composés (h. c.) [Soit  $d(n)$  le nombre de diviseurs de  $n$ ,  $n$  est hautement composé si  $m < n \Rightarrow d(m) < d(n)$ ]. En particulier, il a étudié  $Q_{h.c.}(X) = \text{nombre de nombres hautement composés} \leq X$ , et montré que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{Q_{h.c.}(X)}{\log X} = +\infty .$$

P. ERDÖS a montré [2] que le quotient  $n'/n$  de deux nombres hautement composés consécutifs assez grands vérifie :

$$\frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c}, \text{ avec } c > 0,$$

ce qui entraîne :

$$Q_{h.c.}(X) \geq (\log X)^{1+c} \text{ pour } X \text{ assez grand.}$$

J.-L. NICOLAS a montré [8] que  $Q_{h.c.}(X) \leq (\log X)^{c'}$ ,  $c'$  étant une constante calculable mais assez grande.

D'autre part, P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont défini, dans [1], les nombres superabondants :

Définition. - On dit que  $n$  est superabondant si

$$m < n \Rightarrow \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n},$$

où  $\sigma(n)$  est la somme des diviseurs de  $n$ .

On sait que  $\sigma$  est une fonction multiplicative et que  $\sigma(p^\alpha) = (p^{\alpha+1} - 1)/(p - 1)$  pour  $p$  premier et  $\alpha \geq 1$  (Cf. [3], chap. XVI). P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont en particulier démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant est  $n = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \dots q^{\alpha_q} \dots p^{\alpha_p}$ , on a :

$$(1) \quad \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_q \geq \dots \geq \alpha_p .$$

On a également  $\alpha_p = 1$  sauf si  $n = 4$  ou  $n = 36$  et  $q^{\alpha_q} \sim (p \log p)/\log q$  lorsque  $q$  et donc  $n$  tendent vers l'infini,  $p$  étant le plus grand nombre premier divisant  $n$ . On a enfin, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$(2) \quad p \sim \log n .$$

D'autre part, J.-L. NICOLAS ([7], p. 182) a montré que si  $n$  et  $n'$  sont deux nombres superabondants consécutifs, on avait, pour une infinité de  $n$

$$\frac{n'}{n} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

**THEOREME 1.** - Soit  $Q(X)$  le nombre de nombres superabondants  $\leq X$ ; si  $c < \frac{5}{48}$ , on a  $Q(X) \geq (\log X)^{1+c}$  pour  $X$  assez grand.

La méthode de démonstration du théorème 1, ne permet pas (on le prouvera avec le théorème 2) de montrer que le quotient  $n'/n$  de deux nombres superabondants consécutifs assez grands vérifie

$$(3) \quad \frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Nous allons d'abord rappeler les propriétés des nombres colossalement abondants, qui sont des nombres superabondants privilégiés faciles à calculer (§ 2). Au § 3, on étudiera les propriétés des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs. Au § 4, on montrera, dans le lemme 4, que, pour presque tous les nombres  $N$  colossalement abondants, l'inégalité (3) est vérifiée pour  $n$  voisin de  $N$ , ce qui démontrera le théorème 1.

On utilisera constamment le lemme suivant dû à HOHEISEL, INGHAM et HUXLEY.

**LEMME 1.** - Soit  $\pi(x)$  le nombre de nombres premiers  $\leq x$ ; il existe  $\tau < 1$  tel que

$$\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x + x^\tau}{\log(x + x^\tau)} - \frac{x}{\log x} \sim \frac{x^\tau}{\log x}.$$

Le meilleur résultat actuel est dû à Huxley [4] : l'équivalence précédente est vraie pour  $\tau > 7/12$ .

**Notations.** - Pour deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ , la relation  $f(x) \gg g(x)$  signifie que  $g(x) = o(f(x))$ .

**Remarques.** - Soit  $f$  une fonction additive. On définit  $n$  comme "f-hautement abondant" si  $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$ . Dans l'article [1], (p. 466, n° (9)) il est dit que "si  $f(n) \neq c \log n$ , alors les nombres f-hautement abondants ont pour densité 0". Cela n'est pas vrai, si l'on choisit  $f(p) = \log p$  et  $f(p^k) = 0$  pour  $k \geq 2$ . Les nombres f-hautement abondants sont les nombres non divisibles par un carré, dont la densité est  $6/\pi^2$  (Cf. [3], chap XVIII).

Dans le même article, la table numérique des nombres " $\sigma$ -hautement abondants", p. 467, doit être modifiée pour  $1800 \leq n \leq 2340$  par

n	facteurs de n				$\sigma(n)$
1800	$2^3$	$3^2$	$5^2$		6045
1920	$2^7$	3	5		6120
1980	$2^2$	$3^2$	5	11	6552
2100	$2^2$	3	$5^2$	7	6944
2160	$2^4$	$3^3$	5		7440
2340	$2^2$	$3^2$	5	13	7644

## 2. Nombres colossalement abondants.

Définition. - On dit que  $N$  est colossallement abondant, s'il existe  $\epsilon > 0$ , tel que la fonction  $\sigma(n)/n^{1+\epsilon}$  atteigne son maximum en  $N$ .

Remarque. - Cette définition est légèrement différente de celle de [1], p. 455.

Si  $N$  est colossalement abondant, on a, pour tout  $n$ ,

$$(4) \quad \frac{\sigma(n)}{n^{1+\epsilon}} < \frac{\sigma(N)}{N^{1+\epsilon}}.$$

PROPOSITION 2. - Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe au moins un nombre colossalement abondant associé à  $\epsilon$ , que l'on note  $N_\epsilon$ . D'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant.

Démonstration. - On sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^\gamma,$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler (Cf. [3], chap XVIII). Pour un  $\epsilon$  fixé, la fonction  $\sigma(n)/n^{1+\epsilon}$  tend vers 0 à l'infini et a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points  $N$ . Un tel nombre est colossalement abondant.

D'autre part, en utilisant (4), il vient

$$n < N \Rightarrow \frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\sigma(N)}{N} \left(\frac{n}{N}\right)^\epsilon < \frac{\sigma(N)}{N},$$

et  $N$  est superabondant.

PROPOSITION 3. - Soit  $N$  un nombre colossalement abondant associé à  $\epsilon$ . On définit, pour  $p$  premier et  $\alpha$  entier  $\geq 1$ :

$$F(p, \alpha) = \frac{\log(1 + (1/(p^\alpha + p^{\alpha-1} + \dots + p)))}{\log p} = \frac{\log((p^{\alpha+1} - 1)/(p^{\alpha+1} - p))}{\log p}$$

et pour  $\alpha = 0$ ,  $F(p, 0) = +\infty$ . Alors si  $p$  est premier et divise  $N$  avec l'exposant  $\alpha \geq 0$ , on a

$$(5) \quad F(p, \alpha) \geq \epsilon \geq F(p, \alpha + 1).$$

Démonstration. - Si  $\alpha \geq 0$ , on applique l'inégalité (4) avec  $n = Np$ . Il vient :

$$(6) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \leq (\frac{Np}{N})^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon}.$$

D'autre part,

$$(7) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^\alpha)} = \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}-1} = p \left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1} + \dots + p}\right).$$

En comparant (6) et (7), on obtient  $\varepsilon \geq F(p, \alpha+1)$ . L'inégalité  $F(p, \alpha) \geq \varepsilon$  est évidente si  $\alpha = 0$ . Si  $\alpha \geq 1$ , on la démontre en appliquant (4) avec  $n=N/p$ .

Définitions. - On pose, pour  $p$  premier,

$$E_p = \{F(p, \alpha) ; \alpha \geq 1\}$$

$$E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots\}.$$

Pour tout  $\eta > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $E$  supérieurs à  $\eta$ , et l'on peut ranger les éléments de  $E$  en une suite décroissante :

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i > \dots$$

On pose  $\varepsilon_0 = +\infty$ .

Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit  $x = x_1$ ,  $y = x_2$ ,  $x_k$ , pour  $k \geq 2$ , comme fonctions de  $\varepsilon$ , par

$$(8) \quad \begin{cases} F(x, 1) = \frac{\log(1 + (1/x))}{\log x} = \varepsilon \\ F(x_k, k) = \frac{\log(1 + (1/(x_k^k + \dots x_k)))}{\log x_k} = \varepsilon. \end{cases}$$

Ces définitions ont un sens, car pour  $k \geq 1$ , la fonction  $t \mapsto F(t, k)$  est décroissante, pour tout  $t \geq 1$ , et décroît de  $+\infty$  à 0. On a de plus, pour  $k$  fixé, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (Cf. démonstration du lemme 2)

$$(9) \quad x_k \sim \sqrt[k]{kx}.$$

#### PROPOSITION 4.

(a) Si  $\varepsilon \notin E$ , la fonction  $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$  atteint son maximum en un seul point  $N_\varepsilon$  dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$(10) \quad N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[ \frac{\log((p^{1+\varepsilon} - 1)/(p^\varepsilon - 1))}{\log p} \right] - 1$$

ou si l'on préfère,

$$(11) \quad \alpha_p(\varepsilon) = k \quad \text{si} \quad x_{k+1} < p < x_k \quad \text{avec} \quad k \geq 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p(\varepsilon) = 0 \quad \text{si} \quad p > x = x_1.$$

(b) Soit  $i \geq 1$ ; pour tout  $\varepsilon \in ]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$ ,  $N_\varepsilon$  est constant et égal (par définition) à  $N_i$ . Les nombres  $N_i$  sont tous distincts.

(c) Si les ensembles  $E_p$  sont disjoints deux à deux, l'ensemble des nombres co-lossenalemment abondants est égal à l'ensemble des nombres  $N_i$ ,  $1 \leq i$ : La fonction  $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$  atteint son maximum aux deux points  $N_i$  et  $N_{i+1}$ .

(d) Si les ensembles  $E_p$  ne sont pas disjoints, pour chaque  $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$ , la

fonction  $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$  atteint son maximum en 4 points :  $N_i$ ,  $qN_i$ ,  $rN_i$  et  $N_{i+1} = qrN_i$ . Les nombres  $qN_i$  et  $rN_i$  sont colossalement abondants.

Démonstration.

(a) Soit  $p$  un nombre premier fixé. Comme  $\varepsilon \notin E_p$ , alors  $\varepsilon \notin E_p$  et comme la suite  $F(p, k)$  est strictement décroissante en  $k$ , il existe  $\alpha$  unique, déterminé par la proposition 3 :

$$(12) \quad \frac{\log((p^{\alpha+1} - 1)/(p^\alpha - 1))}{\log p} = F(p, \alpha) > \varepsilon > F(p, \alpha + 1).$$

En résolvant en  $\alpha$  les inégalités (12), on trouve la formule (10), en désignant par  $[x]$  la partie entière de  $x$ .

Si  $x_{k+1} < p < x_k$ , en tenant compte de (8) et (12), on a :

$$F(x_{k+1}, \alpha) > F(p, \alpha) > F(x_{k+1}, k+1) = \varepsilon = F(x_k, k) > F(p, \alpha+1) > F(x_k, \alpha+1)$$

ce qui démontre (11).

(b) Les raisonnements précédents ne changent pas lorsque  $\varepsilon$  varie entre deux valeurs consécutives de l'ensemble  $E$ .

(c) Choisissons  $\varepsilon = \varepsilon_i = F(q, \beta)$ . Pour  $p \neq q$ ,  $\varepsilon \notin E_p$ , et l'exposant de  $p$  est déterminé par (11) ou (12). D'après la proposition 3, l'exposant de  $q$  peut être choisi égal à  $\beta$  ou  $\beta - 1$ . Dans le premier cas, on trouve  $N_{i+1}$ , dans le second  $N_i$ , et la fonction  $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$  atteint son maximum en ces deux points.

(d) Soit  $\varepsilon = F(p, \alpha) \in E$ . Alors  $\varepsilon$  est irrationnel. Si l'on avait  $\varepsilon = a/b$ ,  $a$  et  $b$  entiers, on aurait  $p^a = (1 + (1/(p^\alpha + \dots + p)))^b$  avec  $p^a$  entier et  $(1 + (1/(p^\alpha + \dots + p)))^b$  non entier. D'après le théorème de Gel'fond-Schneider (cf. [5], chap. 2)  $\varepsilon$  est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang (Cf. [6] et aussi [5], chap. 2), on déduit que, si  $p, q, r$  sont des nombres premiers distincts et si  $p^\varepsilon, q^\varepsilon, r^\varepsilon$  sont algébriques, alors  $\varepsilon$  doit être rationnel. Mais si  $\varepsilon \in E_p$ ,  $p^\varepsilon$  est rationnel, et on conclut que  $E_p \cap E_q \cap E_r = \emptyset$ .

S'il existe deux ensembles  $E_q$  et  $E_r$  non disjoints (ce qui est peu vraisemblable), et si l'on choisit

$$\varepsilon_i = F(q, \beta) = F(r, \gamma) \in E_q \cap E_r$$

pour  $p \neq q$  et  $p \neq r$ , l'exposant de  $p$  est déterminé par (11) ou (12). L'exposant de  $q$  peut être  $\beta$  ou  $\beta - 1$ , celui de  $r$ ,  $\gamma$  ou  $\gamma - 1$ , d'après la proposition 3, ce qui donne les quatre possibilités annoncées.

Tables numériques. — La table 1 donne les valeurs de  $F(p, \alpha)$ . Les valeurs non indiquées sont inférieures à  $10^{-5}$ . Les colonnes "exposant = i" indiquent l'exposant de  $p$  dans  $N_i$ . Ainsi, pour  $\varepsilon = 0,005$ , pour  $p = 7$ , on a :

$$0,00129 < \varepsilon < 0,0910,$$

donc l'exposant de 7 dans  $N_\epsilon$  est 2.

La table 2 donne dans sa  $k$ -ième colonne les valeurs de  $x$  en fonction de  $x_k$  ( $x$  et  $x_k$  étant définis par (8)), lorsque  $x_k$  est un nombre premier. Elle est obtenue à partir de la table 1 par l'application  $v^{-1}$  si

$$v(x) = F(x, 1) = \log(1 + (1/x))/\log x.$$

L'ordre de ses termes est donc inversé par rapport à celui de la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier  $p$  donné. Pour avoir  $p = 97$ , on doit choisir  $97 \leq x \leq 101 =$  nombre premier suivant 97, et l'on trouve

$$2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \dots 97 \text{ pour } x < 100,9$$

et

$$2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \dots 97 \text{ pour } x > 100,9.$$

La table 3 donne la suite des nombres colossalement abondants. On trouvera dans [1] une table des nombres superabondants:

T A B L E 1

$p \setminus \alpha$	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$	$\alpha=4$	$\alpha=5$
2	0,58496	0,22239	0,09954	0,04731	0,02308
3	0,26286	0,07286	0,02305	0,00755	0,00250
5	0,11328	0,02037	0,00400	0,00079	0,00016
7	0,06862	0,00910	0,00129	0,00018	0,00003
11	0,03629	0,00315	0,00029	0,00003	
13	0,02889	0,00214	0,00016	0,00001	
17	0,02017	0,00115	0,00007		

T A B L E 2

k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
2	3,29	5,44	9,08	15,36
3	6,72	15,38	36,3	88,57
5	16,8	60,50	230,4	920,5
7	31,4	153,9	812,8	4531,5
11	73,4	554,9	4580,6	40080,3
13	100,9	897,2	8743,5	90404,7
17	168,8	1951,4	24842,7	335898,5

  

	k=6	k=6	k=7	k=7	k=8	k=8	k=9	k=9	k=10
p=2	26,3	exposant = 6	45,7	exposant = 7	80,2	exposant = 8	142,4	exposant = 9	255,4
p=3	221,7		567,6		1480,4		3919,7		10507,9

T A B L E 3

	n	$\sigma(n)$	$\sigma(n)/n$
$\epsilon_1 =$	0,58 496	1	1
$\epsilon_2 =$	26 286	2	3 1,5
$\epsilon_3 =$	22 239	2 3	12 2
$\epsilon_4 =$	11 328	4 3	28 2,333
$\epsilon_5 =$	9 954	4 3 5	168 2,8
$\epsilon_6 =$	7 266	8 3 5	360 3
$\epsilon_7 =$	6 862	8 9 5	1 170 3,25
$\epsilon_8 =$	4 731	8 9 5 7	9 360 3,7143
$\epsilon_9 =$	3 629	16 9 5 7	19 344 3,8381
$\epsilon_{10} =$	2 889	16 9 5 7 11	232 128 4,1870
$\epsilon_{11} =$	2 308	16 9 5 7 11 13	3 249 792 4,5091
$\epsilon_{12} =$	2 305	32 9 5 7 11 13	6 604 416 4,5818
$\epsilon_{13} =$	2 037	32 27 5 7 11 13	20 321 280 4,6993
$\epsilon_{14} =$	2 017	32 27 25 7 11 13	104 993 280 4,8559
		32 27 25 7 11 13 17	1 889 879 040 5,1416

3. Etude des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs.

PROPOSITION 5. - Soit  $N$  un nombre colossalement abondant associé à  $\epsilon$ . On définit  $x$  et  $x_k$  par (8). Soient  $p$  le plus grand facteur premier de  $N$  et  $P$  le nombre premier suivant  $p$ . Soit  $n$  un nombre superabondant compris entre  $N$  et  $NP$ , et soit  $\lambda_k$  le plus grand nombre premier divisant  $n$  avec l'exposant  $k$ . On a

$$(13) \quad \pi(\lambda_k) - \pi(x_k) = O(\sqrt{x_k}) = O(x^{\frac{1}{2}k})$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1, pour  $\tau > 7/12$

$$(14) \quad \lambda_k = x_k + O(x_k^\tau).$$

Démonstration. - La démonstration est la même que celle de la proposition 4 de [8], p. 120 : Pour un entier  $M$  quelconque, on définit le "bénéfice" de  $M$ , par rapport à  $N$  et à  $\epsilon$ , par

$$\text{bén } M = \epsilon \log \frac{M}{N} - \log \frac{\sigma(M)/M}{\sigma(N)/N}$$

et par (4), on a  $\text{bén } M \geq 0$ . Ensuite, on montre que, pour un nombre superabondant  $n$  compris entre  $N$  et  $NP$ , on a :

$$\text{bén } n = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Enfin on montre que, si  $\pi(\lambda_k) - \pi(x_k)$  était trop grand,  $\text{bén } n$  serait trop grand, et on n'aurait pas  $\text{bén } n = O(1/x)$ .

Remarquons que le nombre colossalement abondant suivant  $N$  est  $\leq NP$  et donc, pour tout nombre superabondant  $n$ , il existe au moins un  $N$  colossalement abondant tel que  $N \leq n \leq NP$ .

4. Démonstration du théorème 1.

La démonstration du théorème 1 repose sur trois lemmes.

LEMME 2 (lemme technique).

(a) Il existe une seule fonction  $y(x)$  vérifiant  $y \geq 1$  pour  $x \geq 1$  et définie par la relation implicite

$$(15) \quad u(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\log(1 + (1/(y^2 + y)))}{\log y} = \frac{\log(1 + (1/x))}{\log x} \stackrel{\text{déf}}{=} v(x)$$

(b) Quand  $x \rightarrow \infty$ , on a  $y \sim \sqrt{2x}$  et aussi

$$(16) \quad y(x) = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2 \log x}\right) + \frac{\log 2(4 + 3 \log 2)}{8(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

(c) La fonction  $\theta(x)$ , définie par

$$(17) \quad \theta(x) = \frac{\log y(x)}{\log x} = \frac{\log(1 + (1/(y^2 + y)))}{\log x}$$

est décroissante pour  $x \geq 1$ . On a, pour  $x \rightarrow \infty$ ,

$$(18) \quad \theta'(x) \sim \frac{-\log 2}{2x(\log x)^2}$$

et

$$(19) \quad \theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log x} - \frac{\log 2}{2(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right).$$

LEMME 3 (lemme d'approximation diophantienne). - Soient  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , tels que  $2\alpha + \beta < 1$ . Pour  $x_0$  assez grand, il y a plus de  $x_0/(3 \log x_0)$  nombres premiers  $p$  entre  $x_0/2$  et  $x_0$  vérifiant

$$(20) \quad \exists \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, \quad s < x_0^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{x_0^\beta}{x_0} < |\theta(p) - \frac{r}{s}| < \frac{1}{sx_0^\alpha}$$

où  $\theta(p)$  est défini par (17).

LEMME 4. - Soit  $p$  un nombre premier vérifiant le lemme 3 avec  $\beta > \frac{1+\tau}{2}$ .

Soient  $\epsilon = (\log(1 + (1/p))/\log p)$  et  $N = N_\epsilon$  le nombre colossalement abondant associé à  $\epsilon$ ; donc le plus grand facteur premier de  $N$  est  $p$ , et soit  $P$  le nombre premier suivant  $p$ . Soient  $n$  et  $n'$  deux nombres superabondants consécutifs vérifiant  $N \leq n \leq NP$ . Il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$(21) \quad \frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Démonstration du lemme 2.

(a) Pour  $y > 1$ , la fonction  $u(y)$  est strictement décroissante, comme quotient d'une fonction décroissante par une fonction croissante. Elle admet donc une fonction réciproque  $u^{-1}$ , définie sur  $]0, +\infty[$ . Comme  $u(y) = v(x)$ , on a :

$$y = u^{-1}(v(x)).$$

(b) Quand  $x \rightarrow \infty$ , on a  $\lim y(x) = +\infty$ ,  $v(x) \sim 1/(x \log x)$  et  $u(y) \sim \frac{1}{y^2 \log y}$ . On doit donc avoir

$$(22) \quad y^2 \log y \sim x \log x$$

ce qui entraîne  $\log(y^2 \log y) \sim \log(x \log x)$  soit  $\log y \sim \frac{1}{2} \log x$ , et (22) donne alors  $y \sim \sqrt{2x}$ .

Pour trouver un développement limité de  $y$ , définissons  $\zeta(x)$  par la relation :

$$\zeta^2 \log \zeta = x \log x.$$

On a pour  $x \rightarrow \infty$ ,  $\zeta(x) \sim \sqrt{2x}$  et :

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= \frac{\log(1 + (1/(\zeta^2 + \zeta)))}{\log \zeta} = \frac{1}{\zeta^2 \log \zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta^3 \log \zeta}\right) \\ &= \frac{1}{x \log x} + o\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right) = v(x) + o\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$(23) \quad u(\zeta) - u(y) = o\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right).$$

On a d'autre part

$$(24) \quad u(\zeta) - u(y) = (\zeta - y) u'(\xi) \text{ avec } \xi \text{ entre } \zeta \text{ et } y,$$

et

$$(25) \quad u'(y) = \frac{-(2y+1)/((y^2+y+1)(y+1)) \log y + \log(1+(1/(y^2+y)))}{y(\log y)^2} \sim -\frac{2}{y^3 \log y}.$$

Comme  $y \sim \zeta \sim \sqrt{2x}$ , (23) et (24) donnent

$$(26) \quad y(x) = \zeta(x) + o(1).$$

Le développement limité de  $\zeta(x)$  s'obtient par itération :

$$\zeta(x) = \sqrt{2x}(1 + o(1))$$

$$\log \zeta = \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 2 + o(1)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{x \log x}{\log \zeta}} = \sqrt{2x/(1+(\log 2/\log x)+o(1/\log x))} = \sqrt{2x}(1 - \frac{\log 2}{2 \log x} + o(\frac{1}{\log x})).$$

En itérant à nouveau, et en utilisant (26), on obtient (16).

(c) On a :

$$(27) \quad \theta'(x) = \frac{x \log x (dy/dx) - y \log y}{xy(\log x)^2} = \frac{(1/(x+1)) - ((2y+1)/(y+1)(y^2+y+1))}{|u'(y)| xy(\log x)^2}$$

la valeur de  $u'(y)$  est donnée par (25) et le dénominateur de  $\theta'(x)$  est équivalent à  $(2x(\log x)^2)/(y^2 \log y) \sim 2 \log x$ . Le numérateur vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{2y+1}{(y+1)(y^2+y+1)} &= \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{y^2} + o(\frac{1}{y^3}) \\ &= \frac{1}{y^2} (\frac{y^2}{x} - 2) + o(\frac{1}{x^{3/2}}) = \frac{-2 \log 2}{y^2 \log x} + o(\frac{1}{x(\log x)^2}) \end{aligned}$$

en tenant compte de (16). Cela démontre (18).

Il reste à montrer que  $\theta'(x) < 0$  pour  $x > 1$ . Par (27), on doit montrer  $x > (y^2(y+2))/(2y+1)$ , c'est-à-dire, comme  $v$  est une fonction décroissante, que

$$v(x) = u(y) < v(\frac{y^2(y+2)}{2y+1})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\log(1 + ((2y+1)/y^2(y+2)))}{\log(y^2((y+2)/(2y+1)))} - \frac{\log(1 + (1/(y^2+y)))}{\log y} > 0 \text{ pour } y > 1.$$

Posons

$$\varphi(y) = \log(1 + \frac{2y+1}{y^2(y+2)}) \log y - \log(1 + \frac{1}{y^2+y}) \log(y^2 \frac{y+2}{2y+1}).$$

En décomposant le dernier logarithme, et en regroupant les termes en  $\log y$ , il vient

$$\varphi(y) = \log(\frac{2y+1}{y+2}) \log(1 + \frac{1}{y^2+y}) - \log y \log(1 + \frac{1}{(y+1)^3}).$$

Quand  $y \in [1, +\infty[$ ,  $1 + \frac{1}{y^2+y} \in ]1, 3/2]$  et, par la concavité de la fonc-

tion logarithme sur l'intervalle  $(1, \frac{3}{2})$ , on a

$$\log\left(1 + \frac{1}{y^2 + y}\right) \geq \frac{2 \log 3/2}{y^2 + y} \geq \frac{2\alpha}{y^2 + y}$$

avec  $\alpha = 0,405$  qui est une valeur approchée par défaut de  $\log 3/2$ .

En utilisant les inégalités valables pour tout  $u > -1$

$$\frac{u}{1+u} \leq \log(1+u) \leq u,$$

on obtient

$$\log \frac{2y+1}{y+2} \geq \frac{y-1}{2y+1} \text{ et } \log\left(1 + \frac{1}{(y+1)^3}\right) \leq \frac{1}{(y+1)^3},$$

ce qui donne, pour  $\varphi(y)$ , la minoration valable pour  $y > 1$

$$(28) \quad \varphi(y) \geq \left(\frac{y-1}{2y+1}\right)\left(\frac{2\alpha}{y^2+y}\right) - \frac{\log y}{(y+1)^3} = \frac{1}{(y+1)^3} \psi(y)$$

avec  $\psi(y) = 2\alpha((y-1)(y+1)^2)/(y(2y+1)) - \log y$ . En posant  $y = 1+t$ , il vient

$$\psi(y) = \psi(1+t) = \frac{2\alpha t(t+2)^2}{(t+1)(2t+3)} - \log(1+t).$$

En dérivant, on trouve

$$\psi'(1+t) = \frac{P(t)}{(t+1)^2(2t+3)^2}$$

avec  $P(t) = 4\alpha t^4 + (20\alpha - 4)t^3 + (42\alpha - 16)t^2 + (48\alpha - 21)t + (24\alpha - 9)$ .

Comme  $\alpha = 0,405$  on a

$$P(t) = 1,62t^4 + 4,1t^3 + 1,01t^2 - 1,56t + 0,72.$$

Le trinôme  $1,01t^2 - 1,56t + 0,72$  a un discriminant négatif, donc  $P(t)$  est positif pour  $t \geq 0$ . On en déduit que  $\psi(y)$  est croissante pour  $y \geq 1$  et comme  $\psi(1) = 0$ , que  $\psi(y)$  est positive pour  $y \geq 1$  et donc aussi  $\varphi(y)$  par (28), ce qui achève la démonstration.

Démonstration du lemme 3. — D'après un lemme de Dirichlet (Cf. [9], chap. 5 ou [3], chap. 11), étant donné un réel  $\xi$  quelconque et un nombre  $A > 1$ , il existe une fraction  $r/s$ , avec  $s \leq A$  telle que  $|\xi - \frac{r}{s}| \leq \frac{1}{sA}$ . Posant ici  $\xi = \theta(p)$  et  $A = x_0^\alpha$ , on obtient

$$|\theta(p) - \frac{r}{s}| \leq \frac{1}{sx_0^\alpha}.$$

D'après le lemme 2, la fonction  $\theta(x)$  est décroissante. Pour chaque fraction  $\frac{r}{s}$  comprise entre  $\theta(\infty) = \frac{1}{2}$  et  $\theta(1) = (\log 3/2)/(\log 2) = 0,585 \dots$  il existe une seule valeur  $x_{r,s}$  telle que  $\theta(x_{r,s}) = \frac{r}{s}$ . Soit  $\beta' > \beta$  tel que  $2\alpha + \beta' < 1$ . Pour chaque fraction  $\frac{r}{s}$  telle que  $s \leq x_0^\alpha$  et telle que  $x_0/2 \leq x_{r,s} \leq x_0$ , on retire, autour de  $x_{r,s}$ , une zone  $|x - x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$ . En dehors de cette zone, on aura :

$$|\theta(x) - \frac{r}{s}| \geq \frac{|x - x_{r,s}|}{|\theta'(\xi)|} \gg \frac{x_0^{\beta'}}{x_0(\log x_0)^2} \geq \frac{x_0^\beta}{x_0}.$$

Dans chaque zone  $|x - x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$ , il y a au plus  $x_0^{\beta'} + 1$  nombres premiers, et comme  $s \leq x_0^\alpha$ , il y a au plus  $x_0^{2\alpha}$  zones. On retire donc  $O(x_0^{2\alpha+\beta'})$  nombres premiers. Comme  $2\alpha + \beta' < 1$ , il reste donc plus de  $x_0/(3 \log x_0)$  nombres premiers pour lesquels (20) est vérifié.

Démonstration du lemme 4. - Soient  $p_1$  et  $q_1$  les plus grands nombres premiers divisant  $n$  avec les exposants 1 et 2. Désignons les nombres premiers successifs entourant  $p_1$  et  $q_1$  par

$$\dots > p_3 > p_2 < p_1 < P_1 < P_2 < P_3 \dots$$

$$\dots < q_3 < q_2 < q_1 < Q_1 < Q_2 < Q_3 \dots$$

On applique la proposition 5 avec  $\lambda_1 = p_1$ ,  $\lambda_2 = q_1$  et  $x = p$  (par (8)) :

$$(29) \quad p_1 = x + O(\sqrt{x})$$

et, à cause de (8) et (15)

$$(30) \quad q_1 = x_2 + O(\sqrt{x_2}) = y + O(\sqrt{y}) .$$

Si l'on choisit  $r < x^\tau / \log x$ , on aura, d'après le lemme 1,

$$(31) \quad P_r = p_1 + O(p_1^\tau) = x + O(x^\tau)$$

et

$$P_r = x + O(x^\tau) .$$

De même, si l'on choisit  $s < y^\tau / \log y$ , on aura

$$q_s = y + O(y^\tau) \text{ et } Q_s = y + O(y^\tau) .$$

Avec la proposition 5, et comme par (9),  $x_k \sim k\sqrt{kx}$ , on voit que, pour  $r < \frac{x^\tau}{\log x}$  et  $s < y^\tau / \log y$ , les nombres premiers  $q_1 \dots q_s$  vont diviser  $n$  avec l'exposant 2, les nombres  $Q_1 \dots Q_s$ ,  $p_1 \dots p_r$  avec l'exposant 1.

On prend pour  $r$  et  $s$  les valeurs fournies par le lemme 3. Comme  $\beta > (1+\tau)/2$ , on a  $\alpha < (1-\beta)/2 < (1-\tau)/4$ , et comme  $\tau > 1/3$ , il s'ensuit que

$$s \leq x_0^\alpha \Rightarrow s < \frac{y^\tau}{\log y} .$$

Si  $r/s > \theta(p)$ , on considère

$$(32) \quad n_1 = n \frac{P_1 \dots P_r}{q_1 \dots q_s} .$$

Si  $r/s < \theta(p)$ , on considèrerait de même  $n_2 = n ((Q_1 \dots Q_s)/(p_1 \dots p_r))$ ; les raisonnements seraient tout à fait semblables. On va montrer que

$$(33) \quad \frac{\sigma(n_1)}{n_1} > \frac{\sigma(n)}{n} .$$

On a

$$\frac{\sigma(n_1)}{n_1} = \frac{\sigma(n)}{n} \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{P_i}\right) \prod_{i=1}^s \left(\frac{1}{1 + (1/(q_i^2 + q_i))}\right)$$

$$= \frac{\sigma(n)}{n} \frac{(1+(1/x))^r}{1+(1/(y^2+y))^s} \prod_{i=1}^r \left(\frac{1+(1/P_i)}{1+(1/x)}\right) \prod_{i=1}^s \frac{(1+(1/(y^2+y)))}{(1+(1/(q_i^2+q_i)))}$$

et

$$\log \frac{\sigma(n_1)}{n_1} - \log \frac{\sigma(n)}{n} = S_1 + S_2 + S_3,$$

avec

$$S_1 = r \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - s \log \left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right) = s \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}\right) \gg \frac{sx_0^\beta}{x_0^2}$$

compte tenu de (15) et de (20), car  $x = p$  ;

$$S_2 = \sum_{i=1}^r \log \left(1 + \frac{1}{P_i}\right) - \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = - \sum_{i=1}^r \frac{P_i - x}{\xi_i^2 + \xi_i} = O\left(\frac{s}{x_0^{2-\tau}}\right)$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, (31) et la relation  $r < s$ . On a de même

$$S_3 = \sum_{i=1}^s \log \left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right) - \log \left(1 + \frac{1}{q_i^2+q_i}\right) = O\left(\frac{sy^\tau}{y^3}\right) = O\left(\frac{s}{x_0^{(3-\tau)/2}}\right).$$

Les sommes  $S_2$  et  $S_3$  sont négatives et  $S_2 + S_3 = O(s/(x_0^{(3-\tau)/2}))$ . Comme  $\beta > \frac{1+\tau}{2}$ , on a  $S_1 + S_2 + S_3 > 0$ , ce qui démontre (33)Majorons maintenant  $n_1/n$ 

$$\frac{n_1}{n} = \frac{P_1 \cdots P_r}{q_1 \cdots q_s} = \frac{x^r}{y^s} \left( \prod_{i=1}^r \left( \frac{P_i}{x} \right) \right) / \left( \prod_{i=1}^s \left( \frac{y}{q_i} \right) \right).$$

On a

$$\log \frac{n_1}{n} = S_4 + S_5 + S_6$$

avec

$$S_4 = r \log x - s \log y = s \log x \left( \frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x} \right) \leq \frac{\log x_0}{x_0^\alpha}$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^r \log \frac{P_i}{x} = \sum_{i=1}^r \log \left(1 + \frac{P_i - x}{x}\right) = O\left(\frac{sx_0^\tau}{x_0}\right) = O\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{1-\tau}}\right)$$

$$S_6 = - \sum_{i=1}^s \log \left( \frac{q_i}{y} \right) = - \sum_{i=1}^s \log \left( 1 - \frac{y - q_i}{y} \right) = O\left(s \frac{y^\tau}{y}\right) = O\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}\right)$$

ce qui donne

$$(34) \quad \log \frac{n_1}{n} = O\left(\frac{\log x_0}{x_0^\alpha}\right) + O\left(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}\right) = O\left(\frac{1}{c}\right)$$

pour tout  $c < \min(\alpha, ((1-\tau)/2) - \alpha)$ . En choisissant  $\alpha$  légèrement inférieur à  $(1-\tau)/4$  et  $\beta$  légèrement supérieur à  $(1+\tau)/2$ , on peut prendre, pour  $c$ , toute valeur inférieure à  $(1-\tau)/4 = 5/48$ .

Maintenant, par (33), on a  $(\sigma(n_1))/n_1 > (\sigma(n))/n$ ; d'après la définition des nombres superabondants, cela entraîne  $n < n' \leq n_1$ , donc, par (34), que

$$\log \frac{n'}{n} = O\left(\frac{1}{x_0^c}\right).$$

Comme par (2) et (29) on a

$$\log n \sim p_1 \sim p = x < x_0,$$

on obtient (21), ce qui démontre le lemme 4.

Démonstration du Théorème 1. - Soient  $X$  assez grand et  $N_0$  le nombre colossalement abondant précédent  $X$ . Soient  $\epsilon_0$  associé à  $N_0$ , et  $x_0$  défini par (8). Soient  $p_0$  le plus grand facteur premier de  $N_0$ , et  $P_0$  le nombre premier suivant  $p_0$ . On a :

$$N_0 \leq X < N_0 P_0,$$

par (11)

$$p_0 \leq x_0 < P_0,$$

et par (2)

$$p_0 \sim P_0 \sim \log N_0.$$

On a donc :

$$(35) \quad x_0 \sim \log N_0 \sim \log X.$$

On conserve les notations du lemme 4. Si  $p$  vérifie le lemme 3, on a :

$$Q(NP) - Q(N) \gg (\log N)^c \gg x_0^c$$

et

$$Q(X) \geq Q(N_0) \geq \sum_{\substack{p \text{ vérifiant} \\ \text{le lemme 3}}} [Q(NP) - Q(N)] \gg \frac{x_0}{3 \log x_0} x_0^c.$$

On en déduit par (35) :

$$Q(X) \gg \frac{(\log X)^{1+c}}{\log \log X}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout  $c < (1 - \tau)/4$ , on a aussi, pour tout  $c < (1 - \tau)/4$  et  $X$  assez grand,

$$Q(X) \geq (\log X)^{1+c}.$$

ce qui démontre le théorème 1.

## 5. Nombres sans cube superabondants.

Définition. - Soit  $\sigma^*(n)$  la fonction multiplicative qui vaut  $\sigma^*(p^\alpha) = \sigma(p^\alpha)$  si  $\alpha \leq 2$  et  $\sigma^*(p^\alpha) = 0$  si  $\alpha \geq 3$ . On dit que  $n$  est un nombre "sans cube superabondant" si :

$$(36) \quad m < n \Rightarrow \frac{\sigma^*(m)}{m} < \frac{\sigma^*(n)}{n}.$$

Cette définition est équivalente à la suivante. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des nombres entiers non divisibles par un cube. On dit que  $n$  est un nombre "sans cube superabondant", si  $n \in \mathcal{C}$  et si :

$$m \in \mathcal{C}, \quad m < n \Rightarrow \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Les propriétés de ces nombres sont très voisines de celles des nombres superabondants. Si  $n^*$  est un nombre sans cube superabondant, et s'écrit  $n^* = \prod p^{\alpha_p}$ , on a (Cf. proposition 1)

$$2 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_p.$$

Un tel nombre dépend donc de deux nombres premiers  $q$  (le plus grand tel que  $\alpha_q = 2$ ) et  $p$  (le plus grand diviseur premier).

On définit sans difficultés les nombres "sans cube colossalement abondants". Pour  $\epsilon > 0$ , il existe  $N_\epsilon^*$  en lequel la fonction  $(\sigma^*(n))/(n^{1+\epsilon})$  est maximale. Si  $T$  est l'application de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ , définie par

$$T(\prod p^{\alpha_p}) = \prod p^{\min(\alpha_p, 2)},$$

on a  $N_\epsilon^* = T(N_\epsilon)$ . Mais il n'est pas vrai que  $n$  superabondant  $\Rightarrow T(n)$  sans cube superabondant. Enfin, la proposition 5 s'adapte aisément aux nombres sans cube superabondants. On pose :

$$Q^*(X) = \text{card}\{n^* \leq X, n^* \text{ sans cube superabondant}\}.$$

La démonstration du théorème 1 est valable, puisqu'on ne considère que les nombres premiers divisant le nombre superabondant  $n$  avec un exposant égal à 1 ou 2. On a donc

$$Q^*(X) \geq (\log X)^{1+\epsilon}.$$

THÉORÈME 2. - Soient  $n^*$  et  $n'^*$  deux nombres sans cube superabondants consécutifs, on a

$$\lim_{n^* \rightarrow \infty} \frac{n'^*}{n^*} \geq \sqrt[4]{2} = 1,19.$$

Démonstration. - Soit  $a$  entier  $\geq 6$ . Il existe, d'après le lemme 2, un nombre réel  $x$  tel que :

$$(37) \quad \theta(x) = \frac{\log y}{\log x} = \frac{a+1}{2a}.$$

On choisit  $\epsilon = (\log(1 + (1/x)))/\log x$  et  $N_\epsilon^*$  un nombre sans cube colossalement abondant associé à  $\epsilon$ . On désigne les nombres premiers successifs entourant  $x$  et  $y$  (définis par (15)) par

$$\begin{aligned} \dots & p_3 < p_2 < p_1 \leq x < P_1 < P_2 < P_3 \dots \\ \dots & q_3 < q_2 < q_1 \leq y < Q_1 < Q_2 < Q_3 \dots \end{aligned}$$

On a

$$N = N_\epsilon^* = 2^2 3^2 \dots q_2^2 q_1^2 Q_1 Q_2 \dots p_1$$

et les nombres sans cube superabondant  $n^*$  vérifiant  $N \leq n^* < Nx$  sont de la forme

$$n_s = N \frac{Q_1 \cdots Q_s}{P_1 \cdots P_r} \quad \text{ou} \quad n'_s = N \frac{P_1 \cdots P_r}{Q_1 \cdots Q_s}$$

$r$  étant déterminé en fonction de  $s$  par la condition  $N \leq n_s < Nx$ . On a, d'autre part,  $s = O(\sqrt{y})$  par la proposition 5.

Si  $s \geq 2a$ , on a, avec (37),

$$x > \frac{n_s}{N} > \frac{y^s}{x^r} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}} \frac{y^{2a}}{x^{a+1}} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}},$$

d'où il vient

$$x^{r-a} > y^{s-2a} \geq 1$$

et  $r - a > 0$  c'est-à-dire  $r \geq a + 1$  ce qui entraîne que  $p_1, p_2, \dots, p_{a+1}$  ne divisent pas  $n_s$ . Considérons

$$n''_s = n_s \frac{P_1 \cdots P_{a+1}}{Q_1 \cdots Q_{2a}}.$$

On a, par (37)

$$(38) \quad n''_s < n_s \frac{x^{a+1}}{y^{2a}} = n_s$$

et

$$\frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \prod_{i=1}^{a+1} \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) \prod_{i=1}^{2a} \left(\frac{1}{1 + (1/(Q_i^2 + Q_i))}\right)$$

d'où l'on tire, par (37) et (15) :

$$(39) \quad \frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} > \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \frac{(1 + (1/x))^{a+1}}{(1 + (1/(y^2 + y)))^{2a}} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s}.$$

Si  $s \geq 2a$ , on voit par (36), (38) et (39) que  $n_s$  n'est pas sans cube superabondant. On démontre la même chose pour  $n'_s$  et il y a donc entre  $N$  et  $Nx$  au plus  $4a$  nombres sans cube superabondants. En comparant (37) et (19), on a :

$$a \sim \frac{\log x}{\log 2},$$

ce qui démontre le théorème 2.

## 6. Quelques conjectures.

Il semble difficile de démontrer que l'on a, pour tout  $n$  superabondant (avec  $n' =$  nombre superabondant suivant  $n$ ),

$$\frac{n'}{n} < 1 + \frac{1}{(\log n)^c}.$$

Si le lemme 4 ne s'applique pas, on peut essayer d'utiliser les nombres premiers autour de  $x_3 \sim \sqrt[3]{3x}$ , mais il est difficile de voir si cela suffit à résoudre la question.

Il semble un peu plus facile de montrer que  $Q(X) < (\log X)^{c^*}$ .

On peut s'intéresser aux nombres  $M_{\eta}$  où la fonction  $(\sigma(n))/(n(\log n)^{\eta})$  atteint son maximum. Les nombres  $M_{\eta}$  sont superabondants, mais il est difficile de les étudier, car la fonction  $\log n$  n'est pas multiplicative. Il serait intéressant de savoir si les  $M_{\eta}$  sont colossalement abondants.

Enfin, on peut définir  $d_n$  comme le plus petit diviseur de  $n$  pour lequel

$$\sum_{d|n, d \leq n/d} d \leq n .$$

On pose  $d_n = f(n)$ . Si  $n$  est déficient (c'est-à-dire si  $\sigma(n) < 2n$ ), on a  $f(n) = 1$ . P. ERDÖS sait montrer que, pour  $n > n_0(\epsilon)$ , on a :

$$f(n) < (\log n)^{(1+\epsilon)c} \log \log \log n ,$$

mais que, pour une infinité de  $n$ , on a :

$$f(n) > (\log n)^{(1-\epsilon)c} \log \log \log n .$$

On peut considérer les entiers  $n$  tels que  $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$  et regarder leurs rapports avec les nombres superabondants.

On peut étudier la généralisation du problème des nombres parfaits ( $\sigma(n) = 2n$ ) : Quels sont les nombres tels que :

$$n = \sum_{d|n, d \leq n/3} d , \quad n \equiv 0 \pmod{3} ?$$

Ces nombres sont ou parfaits et impairs, ou vérifient  $\sigma(n) = \frac{5n}{2}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ERDÖS (P.) and ALAOGLU (L.). - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc., t. 56, 1944, p. 448-469.
- [2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers, J. of London math. Soc., t. 19, 1944, p. 130-133.
- [3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.
- [4] HUXLEY (M. N.). - The distribution of prime numbers. Large sieves and zero density theorems, Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).
- [5] LANG (S.). - Introduction to the transcendental numbers. - New York, Addison-Wesley, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [6] LANG (S.). - Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 18e année, 1965/66, n° 305, 8 p.
- [7] NICOLAS (J.-L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe  $S_n$  des permutations et "highly composite numbers", Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.
- [8] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Canad. J. of Math., t. 23, 1971, p. 116-130.
- [9] RADEMACHER (H.). - Lectures on elementary number theory. - New York, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[10] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 347-409 ; and "Collected papers", p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.

Paul ERDŐS  
Magyar Tudományos Akadémia  
Matematikai Kutató Intézete  
Réaltanoda u 13-15  
BUDAPEST V (Hongrie)

et

Jean-Louis NICOLAS  
Département de Mathématique  
UER des Sciences de Limoges  
123 rue Albert Thomas  
87100 LIMOGES

---