Paul ERDÖS
1913-1996

Lauréat du prix Wolf en 1983, Paul Erdös, mathématicien brillant et hors du commun, est décédé à Varsovie le 20 septembre 1996.
Né le 26 mars 1913 à Budapest, Paul Erdös fut un enfant prodige et, à l'âge de quatre ans, il savait déjà compter avec des nombres de trois chiffres et avait redécouvert les nombres négatifs. Il fut élevé par ses parents, professeurs de mathématiques, comme un fils unique, ses deux sœurs étant décédées de la scarlatine peu après leur naissance. Sa mère ne l'envoya pas à l'école par crainte de contagion et préféra l'instruire elle-même.
Après avoir soutenu sa thèse de doctorat en mathématiques en 1934, à l'université de Budapest, il alla à Manchester puis aux États-Unis, où il séjourna pendant la guerre. Plusieurs membres de sa famille restés en Hongrie furent tués par les nazis.
Dans son premier article, publié en 1932, il redémontre un théorème établi par le russe Pafnoutii Lvovitch Tchebychev un siècle plus tôt : entre un nombre et son double il y a toujours un nombre premier. Sa démonstration est plus simple et plus élégante que celle de Tchebychev.
En 1949, il donne avec Atle Selberg une preuve « élémentaire » du théorème des nombres premiers : le nombre de nombres premiers inférieurs à x est équivalent à $x / \ln(x)$, lorsque x tend vers l'infini. Ce résultat avait été conjecturé par Carl Friedrich Gauss, et Bernhard Riemann, au milieu du XIXᵉ siècle, montrait le lien entre la distribution des nombres premiers et la fameuse fonction :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s,$$

où la variable s est complexe.
En 1896, Jacques Hadamard et Charles Joseph de La Vallée-Poussin démontraient le théorème des nombres premiers en utilisant les propriétés de la fonction $\zeta(s)$. Le mathématicien britannique Godfrey Harold Hardy avait déclaré qu'il semblait impossible de donner pour ce théorème une preuve « élémentaire », c'est-à-dire n'utilisant ni les fonctions de variables complexes ni le calcul intégral. C'est pourtant ce que firent Erdös et Selberg, à l'étonnement général ; mais leur preuve, pour être « élémentaire », n'en demeure pas moins longue et technique.
En 1939, avec le probabiliste Marc Kac, il établit le fameux théorème d'Erdös-Kac qui sera le point de départ de la théorie probabiliste des nombres. Soit $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n. Une conséquence du théorème d'Erdös-Kac est que la distribution des valeurs de $\omega(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ suit une loi de Gauss d'espérance mathématique $\ln \ln(N)$ et d'écart type $\sqrt{\ln \ln N}$.
En dehors de la théorie des nombres, Paul Erdös a beaucoup travaillé en analyse combinatoire et grandement contribué au développement de ce domaine des mathématiques. Donnons comme exemple la théorie de Ramsey : deux compagnies aériennes, la rouge et la noire, se partagent les vols entre N aéroports. Entre deux aéroports, il y a un vol régulier assuré par une seule des deux compagnies. Soit m et n deux nombres entiers. Le théorème de Ramsey affirme l'existence d'un nombre $r(m, n)$ tel que, si $N \geqslant r(m, n)$, alors ou bien il existe un sous-réseau de m aéroports entièrement reliés par la compagnie rouge ou bien il existe un sous-réseau de n aéroports reliés par la compagnie noire. Le nombre $r(m, n)$ n'est pas connu pour toutes valeurs de m et n, mais Paul Erdös en a donné la majoration :

$$r(m, n) \leq \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$$

et a créé la théorie de Ramsey infinie.
Paul Erdös a écrit mille cinq cents articles, ce qui, sur une période d'activité d'une soixantaine d'années, représente une moyenne de vingt-cinq articles par an, soit environ deux par mois. En dehors des différents domaines de la théorie des nombres et de l'analyse combinatoire, les sujets traités concernent la théorie des ensembles, la théorie des graphes, l'analyse et l'étude des polynômes, la géométrie combinatoire, les statistiques dans les groupes finis. Beaucoup de ses articles ont été écrits en collaboration avec plus de quatre cents coauteurs.
La façon de vivre de Paul Erdös était très originale : il parcourait le monde, allant de congrès en congrès, d'université en université, restant rarement plus de huit jours au même endroit. Dans ses articles, ses lettres ou ses conférences, il posait de nombreux problèmes, souvent d'énoncé simple et compréhensible, et lorsque quelques-uns de ces problèmes étaient résolus, il était possible d'en déduire une théorie. Sa démarche est ainsi essentiellement différente de celle des mathématiciens bourbakistes, qui étudient d'abord une théorie générale et l'appliquent ensuite à des problèmes concrets. Un des problèmes non encore résolus et qu'il affectionnait beaucoup est le suivant : on dit que k couples (n_1, a_1), ..., (n_k, a_k) forment un système de congruences recouvrantes si les n_i sont distincts, si $0 \leqslant a_i \leqslant n_i$ et si, pour tout entier N, il existe i tel que le reste dans la division de N par n_i soit égal à a_i. Exemple : (2, 0), (3, 0), (4, 1), (6, 1), (12, 11). Existe-t-il un système de congruences recouvrantes tel que tous les n_i soient supérieurs à un nombre fixé arbitrairement grand ?
Le comportement hors normes d'Erdös a fait fleurir les anecdotes qui émaillent les références bibliographiques données ci-après. En dehors des mathématiques, Paul Erdös était passionné d'histoire et s'intéressait à la politique. Il a beaucoup aidé financièrement les jeunes mathématiciens hongrois et, au-delà de l'originalité de son comportement, c'était un personnage très attachant. Son influence sur les mathématiques n'est pas près de s'éteindre.

Jean Louis NICOLAS

Bibliographie

L. DEMBART, « In the world of numbers, he's nº 1 », in *Los Angeles Times*, 26 mars 1983 / « P. Erdös », in *Mathematical People, Profile and Interviews*, D. J. Albers et G. L. Alexanderson dir., Birkhaüser, 1985 / P. HOFFMAN, « The Man who loves only numbers », in *The Atlantic Monthly*, nov. 1987 / J. TIERNEY, « Paul Erdös is in town. His brain is open », in *Science*, oct. 1984.

Universalia 1997, la politique, les connaissances, la culture en 1996, Encyclopædia Universalis, Paris, 1997, p. 471.