Paul Erdös, poseur de problèmes

De Paul Erdös (1913 - 1996), on se souvient de l'humour, du style atypique, les nombreuses publications et collaborations. Il a légué aux mathématiciens de son temps et des générations futures une multitude de problèmes (dont certains demeurent ouverts), en particulier dans le domaine de la théorie des nombres.

Le mathématicien Paul Erdös était un personnage hors du commun. Sa façon de vivre et de travailler a été décrite dans deux livres biographiques ainsi que de nombreux articles (voir *Bibliographie*). Un film, du cinéaste George -Paul Csicsery, a même été réalisé à son sujet : *N is a number. A portrait of Paul Erdös* (on peut se le procurer auprès de l'éditeur Springer : http://www.springer.com).
Près de dix ans après son décès, on se souviendra en particulier de l'originalité qu'il mettait à faire des mathématiques en les présentant de façon attractive.

Auteur prolifique, Paul Erdös a écrit plus de mille cinq cents articles portant sur la théorie des nombres, sur la théorie des graphes, ainsi que sur d'autres domaines mathématiques : l'analyse, les polynômes, la géométrie, etc. Une part importante de ses travaux a été écrite en collaboration avec plus de 450 auteurs (voir l'encadré *Quel est votre nombre d'Erdös ?*).

Il a aussi été un grand poseur de problèmes. Les siens présentaient souvent un énoncé simple à comprendre, mais s'avéraient rarement faciles à résoudre. Erdös avait pris l'habitude d'offrir un prix (entre 100 et 10 000 dollars) à ceux qui parviendraient à résoudre ses problèmes favoris. Lorsqu'un problème avait résisté longtemps, sa côte montait. Erdös voyageait, écrivait, téléphonait beaucoup et connaissait énormément de monde et il avait le génie de deviner celui ou celle, parmi ses collaborateurs, qui serait le plus apte à s'attaquer à un problème donné. Il appréciait les démonstrations courtes et élégantes. Il ne croyait pas en Dieu, mais il croyait en l'existence d'un grand Livre contenant la solution la meilleure pour chacun des problèmes. C'était de sa part un grand compliment lorsqu'il vous disait que votre preuve provenait directement du Livre.

Les problèmes posés par Paul Erdös sont un réservoir de sujets de recherche de grande qualité pour les chercheurs du monde entier.

Voici trois problèmes de théorie des nombres parmi les favoris de Paul Erdös.

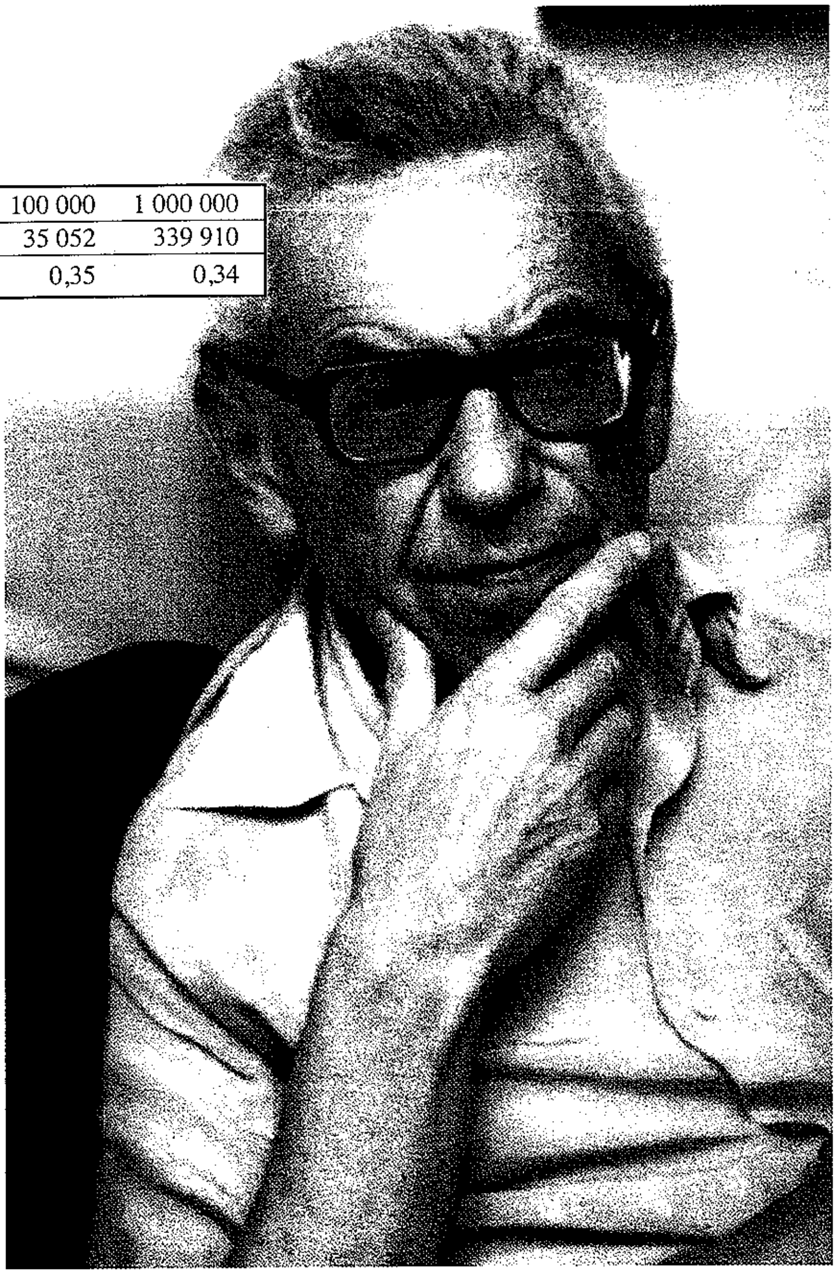
Les bons et les mauvais nombres

Appelons *bon* un nombre qui a deux diviseurs d et d' tels que $d < d' \leq 2d$. Un nombre pair est toujours *bon* puisque, parmi ses diviseurs, il y a 1 et 2. Le nombre 15 est *bon* car divisible par 3 et 5, avec $3 < 5$ et $5 < 6$.
Pour vérifier qu'un nombre est *mauvais* (c'est-à-dire *pas bon*), on écrit la liste de ses diviseurs rangés par ordre croissant et l'on s'assure que chaque diviseur différent de 1 est plus grand que le double de son précédent. Par exemple, 21 est

mauvais car ses diviseurs sont 1, 3, 7, 21. Naturellement, les nombres premiers différents de 2 sont tous *mauvais*.
Soit M(x) le nombre de nombres *mauvais* au plus égaux à x. Un calcul sur ordinateur donne les valeurs.

x	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
M(x)	5	42	388	3 653	35 052	339 910
M(x)/x	0,5	0,42	0,39	0,37	0,35	0,34

Lorsque x tend vers l'infini, le rapport M(x)/x reste-t-il toujours supérieur à un certain nombre réel positif (par exemple 0,2) ou bien est-il vrai que les nombres *mauvais* se raréfient de plus en plus, autrement dit que le rapport M(x)/x tend vers 0 ? Voilà une alternative que même le plus rapide des ordinateurs ne sait pas, pour le moment, trancher. Ce problème a été posé par Paul Erdös qui l'avait primé 500 dollars. En 1984, Gérald Tenenbaum (professeur à l'Université de Nancy) et Helmut Maier (professeur à l'Université d'Ulm, Allemagne) ont montré que M(x)/x tendait vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Je peux témoigner qu'ils ont reçu chacun un chèque de 250 dollars.



Des progressions arithmétiques de nombres premiers

Une progression arithmétique de k termes et de raison r est une famille de la forme :

$$a, a + r, a + 2r, ..., a + (k - 1)r.$$

Est-il possible de trouver des nombres premiers formant une progression arithmétique ? Les cinq nombres premiers 5, 11, 17, 23, 29 forment une progression de raison 6 alors que 7, 37, 67, 97, 127, 157, 187 en forment une de raison 30. Le record est détenu par Markus Frind, Paul Jobling et Paul Underwood depuis le 24 juillet 2004 avec la progression de 23 nombres premiers dont le plus petit est 56 211 383 760 397 et la raison :

$$44\,546\,738\,095\,860 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 99\,839.$$

Paul Erdös avait conjecturé que pour tout nombre k arbitrairement grand, il existe une progression arithmétique de k nombres premiers. Ben Green et Terence Tao viennent de démontrer cette conjecture d'Erdös.
Malheureusement, leur preuve n'est pas constructive et ne permet pas de calculer, par exemple, 100 nombres premiers en progression arithmétique. Ce sera pour une prochaine étape...

Les nombres jouent à pile ou face

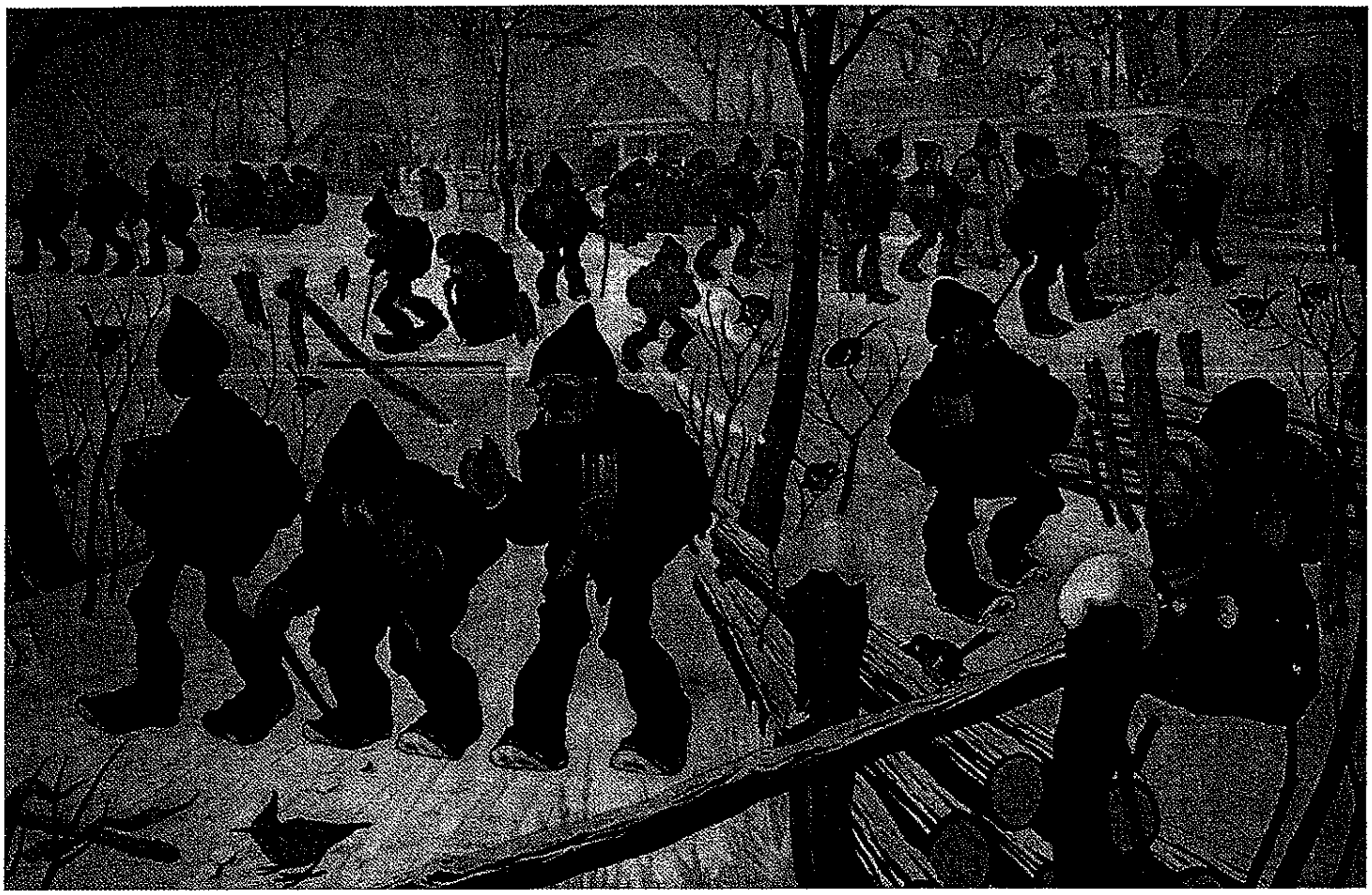
La fameuse courbe en cloche de Gauss est la courbe représentative de la fonction

$$y = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right).$$

La surface située entre l'axe des x et cette courbe mesure $\sqrt{2\pi}$. Appellons G(t) le produit de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ par la portion de cette surface située à gauche de la verticale $x = t$. La fonction G intervient dans de nombreux problèmes de probabilité.
Supposons que l'on joue à pile ou face simultanément avec 100 pièces ; quelle est la probabilité que le nombre de pile soit inférieur ou égal à 40 ?

Quel est votre nombre d'Erdös ?

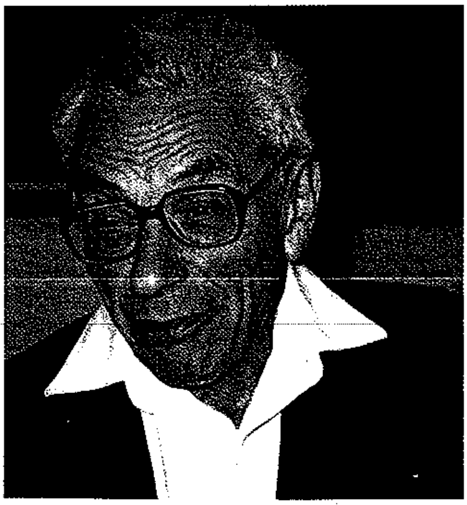
Erdös ayant co-écrit de nombreux articles avec ses collaborateurs, est apparue la définition du nombre d'Erdös : une personne a un nombre d'Erdös égal à 1 si elle a publié un article en commun avec Erdös ; une personne a un nombre d'Erdös égal à 2 si elle a publié un article en commun avec une personne ayant un nombre d'Erdös égal à 1, etc. Albert Einstein a ainsi un nombre d'Erdös égal à 2. Pour plus de détails, on consultera le site Erdos Number Project : http://www.oakland.edu/enp/index.html



En notant $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, cette probabilité vaut $\dfrac{C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + \dots + C_{100}^{40}}{2^{100}} = 0{,}028$, nombre proche de G(– 2) = 0,023. En effet, on peut démontrer que, lorsque le nombre n de pièces tend vers l'infini, la probabilité que le nombre de pile soit inférieur ou égal à $\dfrac{n}{2} + t\sqrt{\dfrac{n}{4}}$ tend vers G(t).

Tout nombre entier peut s'écrire comme produit de facteurs premiers. Désignons par $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n ; par exemple $\omega(140) = 3$ car $140 = 2^2 \times 5 \times 7$.

La valeur de la fonction ln ln x s'obtient en tapant deux fois sur la touche ln de la calculatrice.



C'est une fonction qui tend vers l'infini mais très lentement : par exemple,

$$\ln \ln 10^{100} = 5{,}4392...$$

En travaillant ensemble en 1939, le probabiliste Mark Kac et le théoricien des nombres Paul Erdös ont montré que la probabilité qu'un nombre n, choisi au hasard entre 1 et x, ait un nombre $\omega(n)$ de facteurs premiers plus petit que $\ln \ln x + t\sqrt{\ln \ln x}$ tendait vers G(t) lorsque x tend vers l'infini. Le théorème d'Erdös-Kac a marqué une étape importante dans le développement de la branche des mathématiques qui s'appelle *Théorie probabiliste des nombres* et qui est actuellement très étudiée.

Les problèmes posés par Paul Erdös constituent un réservoir de sujets de recherche de grande qualité pour les chercheurs du monde entier.

J. - L. N.

Bibliographie

Pour en savoir plus sur Paul Erdös :

- *Erdös, l'homme qui n'aimait que les nombres* (Ed. Belin, 2000) de Paul Hoffman, préfacé par Gérald Tenenbaum.
- *My Brain is open. The Mathematical Journeys of Paul Erdös de Bruce Schechter* (non traduit en français).
- *Paul Erdös : les Mathématiques pour sixième sens*, par Roger Cuculière, *Tangente*, n°55, Janvier-Février 1997.
- *Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes* (Ed. Springer-Verlag, 2002), de Martin Aigner et Günter M. Ziegler. Ce livre donne une démonstration aussi simple que possible de plusieurs théorèmes classiques.
- *Unsolved Problems in Number Theory* (2e édition, Springer, 1994), de Richard K. Guy. Ce livre contient une bonne sélection de problèmes posés par Erdös.