REPARTITION DES NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES DE RAMANUJAN

par

Jean-Louis NICOLAS (1)

-:-:-:-

1. INTRODUCTION. On dit qu'un nombre entier A est hautement composé si tout nombre M plus petit que A a moins de diviseurs que A. Si l'on définit $d(n)$ = nombre de diviseurs de n, on sait que, si la décomposition en facteurs premiers de n est :

$$n = \prod_i p_i^{a_i} \quad , \text{ on a } \quad : \quad d(n) = \prod_i (a_i + 1) \; .$$

La définition devient : A est hautement composé si et seulement si :

$$(1) \qquad M < A \Longrightarrow d(M) < d(A) \; .$$

S. RAMANUJAN (8) a défini et étudié les nombres hautement composés, démontrant les propriétés suivantes :

- Si $A = 2^{a_2} 3^{a_3} \dots p_k^{a_{p_k}}$ est un nombre hautement composé, on a :

$$(2) \qquad a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \geqslant a_{p_k}$$

et à l'exception de $A = 4$ et $A = 36$, on a : $a_{p_k} = 1$ ([8], § 8).

- Soit $p = p_k$ le plus grand nombre premier divisant A, soit λ un nombre premier plus petit que p, S. RAMANUJAN donne des formules permettant de déterminer a_λ à une unité près lorsque λ est grand, et donnant un équivalent de a_λ lorsque λ est petit ([8], § 18 à 24).

- Le quotient de deux nombres hautement composés consécutifs tend vers 1, et $Q(X)$, le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X, vérifie : ([8], § 28)

$$(3) \qquad \lim_{X \to \infty} \frac{Q(X)}{\log X} = + \infty$$

---

(1) L'auteur de cet article a reçu l'octroi n° A 7201 du Conseil National de recherches du Canada.

- Enfin, S. RAMANUJAN définit les nombres hautement composés supérieurs ([8], §32) dont nous rappelons la définition et les propriétés un peut plus loin et qui sont à la base des résultats obtenus dans cet article.

En utilisant principalement le résultat de A.E. INGHAM ([4]) affirmant que pour $\frac{5}{8} \leqslant \tau \leqslant 1$, on a :

(4) $$\pi(x + x^{\tau}) - \pi(x) \sim \frac{x^{\tau}}{\log x}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x , P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont donné ([1], théorème 13) une formule permettant de déterminer a_{λ} à une unité près quel que soit λ, et P. ERDÖS a amélioré la formule (3) en montrant ([2]) :

(5) $$Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c}$$

avec $c = \frac{1 - \tau}{4} = \frac{3}{32}$.

L'objet de cet article est d'étudier la répartition des nombres hautement composés entre deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Nous montrerons que ce problème est lié à celui des approximations diophantiennes du nombre $\theta = \frac{\log 3/2}{\log 2}$ et plus précisément à l'étude des formes linéaires à coefficients entiers $\sum u_k \theta_k$, avec $\theta_k = \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log 2}$

Le récent théorème de N. FELDMANN ([3]) améliorant les travaux de A. BAKER sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, nous dit qu'il existe des constantes c et κ telles que l'on ait : $|q\theta - p| > \frac{c}{q^{\kappa}}$ pour tous p, q entiers. Cela nous permettra de montrer que: $Q(X) \leqslant (\log X)^{c'}$ (théorème 4)

Nous améliorerons les résultats de P. ERDÖS et L. ALAOGLU sur le calcul des exposants a_{λ} (théorème 2) et nous augmenterons légèrement la constante c de la formule (5) . Finalement nous conjecturons que:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log Q(X)}{\log \log X} = 1 + \frac{\log 3/2 + \log 5/4}{4 \log 2} = 1.277...$$

2. NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES SUPERIEURS.

On dit que N est un nombre hautement composé supérieur s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout M entier, on ait:

$$\frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} \leqslant \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$$

Propriétés: ([8], §32 à 34) . ε étant donné, $0 < \varepsilon < 1$, il existe un nombre hautement composé supérieur associé à ε dont la décomposition en facteurs premiers, $N = \prod \lambda^{a_\lambda}$ est donnée par:

(6) $$a_\lambda = \left[\frac{1}{\lambda^{\varepsilon} - 1}\right] = \text{partie entière de } \frac{1}{\lambda^{\varepsilon} - 1}$$

On attache à $N = N_\varepsilon$ les nombres:

(7) $$x = 2^{1/\varepsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2}}$$

On a alors:

(8) $$a_\lambda = k \iff x_{k+1} < \lambda \leqslant x_k$$

Soit $p \leqslant x < P$ les nombres premiers encadrant x. Le plus grand nombre premier qui divise N est p et le nombre hautement composé supérieur suivant N est inférieur ou égal à NP.

Proposition 1 . Soit $N = N_\varepsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit r/s une fraction irréductible telle que s divise N. On note $v_\lambda(n)$ l'exposant de λ dans la décomposition en facteurs premiers de n. On a alors, λ et μ étant premiers, et a_λ et a_μ étant déterminés par (6):

$$\log d(\tfrac{r}{s} N) - \log d(N) = \varepsilon \log \frac{r}{s} - \sum_{\lambda | r} v_\lambda(r)\left(\varepsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}\right)\right)$$
$$- \sum_{\mu | s} v_\mu(s)\left(\log\left(1 + \frac{1}{a_\mu}\right) - \varepsilon \log \mu\right) - \sum_{\lambda | r} \log U_\lambda - \sum_{\mu | s} \log V_\mu$$

les nombres U_λ et V_μ vérifiant: $U_\lambda \geqslant 1$ et $V_\mu \geqslant 1$ avec égalité lorsque $v_\lambda(r) = 1$ et $v_\mu(s) = 1$

Démonstration: En raison de l'additivité des fonctions $\log d(n)$ et $\log n$, il suffit de vérifier cette formule pour $r = \lambda^k$, $s = 1$ puis pour $r = 1$, $s = \mu^k$.

Si $r = \lambda^k$, $s = 1$, posons $a_\lambda = a$, la formule nous permet de calculer U_λ:

$$\log d(\frac{r}{s} N) - \log d(N) = \log \frac{a+k+1}{a+1} = \varepsilon k \log \lambda - k(\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1})) - \log U_\lambda$$

d'où il vient:

$$U_\lambda = \frac{a+1}{a+1+k} \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a+i}{a+i+1}\right)\left(\frac{a+2}{a+1}\right) \tag{9}$$

Pour $k = 1$, on a : $U_\lambda = 1$ et pour $i \geqslant 2$, $\frac{a+i+1}{a+i} < \frac{a+2}{a+1}$ d'où il vient: $U_\lambda > 1$ si $k \geqslant 2$

Si $r = 1$, $s = \mu^k$, on calcule de même V_μ :

$$V_\mu = \frac{a+1}{a+1-k} \left(\frac{a}{a+1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{a+2-i}{a+1-i}\right) \left(\frac{a}{a+1}\right) \tag{10}$$

On trouve de même: pour $k = 1$, $V_\mu = 1$ et pour $k > 1$, $V_\mu > 1$.

<u>Définition</u>: <u>Soit</u> $N = N_\varepsilon$ <u>un nombre hautement composé supérieur. Soit</u> M <u>un entier que l'on écrit</u> : $M = \frac{r}{s} N$ <u>avec</u> r <u>et</u> s <u>premiers entre eux. On appelle bénéfice de</u> M <u>relatif à</u> N, <u>la quantité</u>:

$$\text{bén } M = \sum_{\lambda | r} v_\lambda(r)(\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1})) + \sum_{\lambda | r} \log U_\lambda \tag{11}$$

$$+ \sum_{\mu | s} v_\mu(s)(\log(1 + \frac{1}{a_\mu}) - \varepsilon \log \mu) + \sum_{\mu | s} \log V_\mu .$$

La proposition 1 s'écrit alors :

$$\varepsilon \log \frac{M}{N} = \log \frac{d(M)}{d(N)} + \text{bén } M \tag{12}$$

avec $\text{bén } M \geqslant 0$.

Proposition 2 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé. Soit</u> M <u>et</u> M' <u>deux nombres tels que</u>: $d(M) \leqslant d(A) \leqslant d(M')$. <u>On a</u>:

$$\text{bén } A \leqslant \text{bén } M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}$$

<u>Démonstration</u>: Le nombre A étant hautement composé, la relation (1) nous donne: $d(M') \geqslant d(A) \Longrightarrow M' \geqslant A$. La formule (12) nous donne:

$$\text{bén } A = \varepsilon \log \frac{A}{N} - \log \frac{d(A)}{d(N)} \leqslant \varepsilon \log \frac{M'}{N} - \log \frac{d(M)}{d(N)} = \text{bén } M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}$$

Proposition 3 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé. Soit</u> $N = N_\varepsilon$ <u>le nombre hautement composé supérieur précédant</u> A . <u>On a</u>: bén $A \leqslant \varepsilon + \log 2$.

<u>Démonstration</u>: Soit P le plus petit nombre premier ne divisant pas N . On sait que $N \leqslant A \leqslant NP$. La formule (11) nous donne:

bén $NP = \varepsilon \log P - \log 2$. Posant $x = 2^{1/\varepsilon}$, soit $\varepsilon = \dfrac{\log 2}{\log x}$, il vient :

bén $NP = \varepsilon \log \dfrac{P}{x} \leqslant \varepsilon \dfrac{P-x}{x}$. D'après le postulat de Bertrand, on a: $P - x \leqslant x$ donc: bén $NP \leqslant \varepsilon$.

Ensuite, ou bien on a : $d(N) \leqslant d(A) \leqslant d(NP)$ et la proposition 2 nous dit: bén $A \leqslant$ bén $NP + \log 2 \leqslant \varepsilon + \log 2$, ou bien on a: $d(NP) < d(A)$ et comme $A \leqslant NP$, la formule (12) nous dit: bén $A \leqslant$ bén $NP \leqslant \varepsilon$.

<u>Calcul de bénéfices</u>. Soit $N = N_\varepsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit k un entier fixé. On définit x et x_k par la formule (7).

Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de x_k . On choisit n tendant vers l'infini avec x et $n \leqslant \dfrac{x^\tau}{\log x}$ avec $\tau = 5/8$. D'après la formule (4) de A.E. INGHAM on a $Q_n - x_k = O(x^\tau)$, et pour x assez grand $Q_n < x_{k-1}$, ce qui entraîne par (8) que l'exposant des Q_i dans la décomposition en facteurs premiers de N est (k-1) .

Posons $W_n = NQ_1 Q_2 \ldots Q_n$. On a par la formule (11):

$$\text{bén } W_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \log Q_i - \log(1 + \frac{1}{k}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \log \frac{Q_i}{x_k}$$

Comme on a toujours $\frac{u-1}{u} \leqslant \log u \leqslant u-1$, on obtient:

$$\text{(13)} \qquad \text{bén } W_n \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i - x_k}{x_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{x_k} \; n(Q_n - x_k) \leqslant \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}$$

et :

$$\text{bén } W_n \geqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i - x_k}{Q_i} \geqslant \frac{\varepsilon}{Q_n} \sum_{i=1}^{n} 2(i-1) = \frac{\varepsilon}{Q_n} (n^2 - n)$$

d'où il vient :

$$\text{(14)} \qquad \text{bén } W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}$$

Soit, de la même façon $q_1, q_2, \dots q_n$ les nombres premiers précédant x_k , rangés par ordre décroissant à partir de x_k . Dans les mêmes conditions, en posant $W'_n = \frac{N}{q_1 \, q_2 \cdots q_n}$, on obtient :

$$\text{(15)} \qquad \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x} \lesssim \text{bén } W'_n \lesssim \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}$$

Proposition 4 . <u>Soit</u> A <u>un nombre hautement composé, et</u> $N = N_\varepsilon$ <u>le nombre hautement composé supérieur précédant</u> A . <u>On définit</u> x <u>et</u> x_k <u>par la formule (7).</u> <u>Soit</u> p_k <u>le plus grand nombre premier divisant</u> A <u>avec l'exposant</u> k . <u>On a:</u>

$$\pi(p_k) - \pi(x_k) \quad = \quad O(\sqrt{x_k \log x})$$

<u>où</u> $\pi(x)$ <u>désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à</u> x .

Démonstration: Supposons par exemple $p_k \geqslant x_k$. Posons $n = \pi(p_k) - \pi(x_k)$. Les relations (11) et (14) donnent

bén $A \geqslant$ bén $W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}$. D'autre part la proposition 3 nous indique:

bén $A = O(1)$, d'où le résultat .

<u>Corollaire. Avec les mêmes notations, si</u> $x_k \to \infty$, <u>on a, avec</u> $\tau = 5/8$:

$$p_k - x_k = O(x_k^\tau)$$

Démonstration: D'après la formule $(4)_\tau$ de A.E. INGHAM, si l'on avait $p_k - x_k \geqslant x_k^\tau$, cela entraînerait $\pi(p_k) - \pi(x_k) \geqslant \dfrac{x_k^\tau}{\log x}$, ce qui contredirait la proposition 4 .

3. THEOREME DE MAJORATION DES BENEFICES ET APPLICATIONS.

Théorème 1. *Soit A un nombre hautement composé, soit $N = N_\varepsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. Posons $x = 2^{1/\varepsilon}$. Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ telles que:*

$$\text{bén } A \leqslant C\, x^{-\gamma}$$

Démonstration. Nous allons construire une famille de nombres M_h, compris entre N et NP (où P désigne le nombre premier suivant x) tels que bén M_h ne soit pas trop grand et tels que les nombres $d(M_h)$ soient assez proches les uns des autres. La proposition 2 appliquée aux nombres M_h nous donnera le résultat.

Soit y un nombre réel, on note $[y]$ la partie entière de y ($[y] \leqslant y < [y]+1$), on note $\{y\} = y - [y]$ la partie fractionnaire de y et on note $||y|| = \min(\{y\}, 1-\{y\})$ la distance de y à l'entier le plus proche. Soit $\theta = \dfrac{\log 3/2}{\log 2}$, la formule (7) donne: $x_2 = x^\theta$. Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de x_2 et $q_1, q_2, \ldots, q_h$ les nombres premiers précédant x_2 et rangés par ordre décroissant. Définissons de même $P_1 = P, P_2, \ldots P_h$ et $p_1, p_2, \ldots, p_h$ à partir de x.

Pour $h > 0$, on définit $M_h = N \dfrac{Q_1 Q_2 \ldots Q_h}{P_1 P_2 \ldots P_k}$ avec $k = [h\,\theta]$

Pour $h < 0$, on pose $h' = -h$ et $M_h = N \dfrac{P_1 P_2 \ldots P_{k'}}{q_1 q_2 \ldots q_{h'}}$ avec $k' = [h'\,\theta] + 1$

On a, pour $h > 0$:

$$\delta_h = \log \frac{d(M_h)}{d(N)} = \frac{\log(3/2)^h}{2^k} = h \log 3/2 - k \log 2 = \{h\,\theta\} \log 2$$

et pour $h < 0$:

$$\delta_h = \log \frac{d(M_h)}{d(N)} = \log \frac{2^{k'} 2^{h'}}{3^{h'}} = k' \log 2 - h' \log 3/2 = \{h\ \theta\} \log 2$$

Pour $h = 0$, on pose $M_o = N$ et $\delta_o = 0$.

On considère les nombres M_h, $-H \leqslant h \leqslant H$, H étant un entier que l'on précisera par la suite, et le nombre $M = NP$. On pose: $\delta_M = \log \frac{d(M)}{d(N)} = \log 2$, et on les range par ordre croissant de δ_h. Soit $\frac{u_n}{v_n}$ le $n^{\text{ième}}$ convergent principal de θ, et choisissons n de façon que:

(16) $$v_{n+1} < H \leqslant v_{n+2}$$

D'après les propriétés des fractions continues, (voir, par exemple [6], Ch. 1) l'un des convergents $\frac{u_n}{v_n}$ et $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$, soit $\frac{u}{v}$ va vérifier $v\ \theta > u$, et par suite $v\ \theta = u + ||v\theta||$, l'autre soit $\frac{u'}{v'}$ va vérifier $v'\ \theta < u'$ et $v'\ \theta = u' - ||v'\theta||$

Pour $h \geqslant 0$, on a: $(h - v')\theta = [h\theta] + \{h\theta\} - u' + ||v'\theta||$

Si $\{h\theta\} < 1 - ||v'\theta||$, on a: $\{(h - v')\theta\} = \{h\theta\} + ||v'\theta||$ et :

$$\delta_h < \delta_{h-v'} < \delta_h + ||v'\theta|| \log 2$$

le nombre $M_{h-v'}$ suivra M_h dans le rangement par ordre croissant des δ_h et l'écart entre δ_h et $\delta_{h-v'}$ est inférieur à $||v'\theta|| \log 2$.

Si $1 - ||v'\theta|| \leqslant \{h\theta\}$, on aura : $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v'\theta|| \log 2$, et le nombre $M = NP$ suivra M_h, avec un écart $\delta_M - \delta_h$ inférieur à $||v'\theta|| \log 2$.

Pour $h < 0$, on a de même: $(h + v)\theta = [h\theta] + \{h\theta\} + u' + ||v\theta||$.

Si $\{h\theta\} < 1 - ||v\theta||$, on aura $\delta_h < \delta_{h+v} < \delta_h + ||v\theta|| \log 2$.

Si $1 - ||v\theta|| \leqslant \{h\theta\}$, on aura $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v\theta|| \log 2$.

Dans tous les cas, l'écart entre deux nombres consécutifs de la famille δ_h, $-H \leqslant h \leqslant H$ et δ_M rangés par ordre croissant est au plus $||v\theta|| \log 2$, ou $||v'\theta|| \log 2$, c'est à dire au plus $||v_n\theta|| \log 2$.

D'après le théorème de N. FELDMANN ([3]), il existe deux constantes κ

et c_1 telles que, pour tous u et v entiers, on ait:

$$|v\theta - u| > \frac{c_1}{v^\kappa}$$

On a en particulier:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| > \frac{c_1}{v_{n+1}^{\kappa}}$$

Mais, d'après les propriétés des fractions continues (voir [6] , Ch. 1), on a:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| < \frac{1}{v_{n+2}}$$

On en déduit:

$$v_{n+2} < \frac{1}{c_1} \quad v_{n+1}^{\kappa}$$

La relation (16) donne:

$$H < \frac{1}{c_1} \quad v_{n+1}^{\kappa} \text{ , soit : } v_{n+1} > (c_1 \; H)^{1/\kappa}$$

Finalement, on obtient:

(17) $$||v_n \; \theta|| \log 2 \leqslant ||v_n\theta|| = |v_n\theta - u_n| < \frac{1}{v_{n+1}} < c_2 \; H^{-1/\kappa}$$

Choisissons H de façon à avoir: $H < x_2^\tau < x^\tau$. Pour $-H \leqslant h \leqslant H$, on aura, par les relations (13) et (15):

(18) $$\text{bén } M_h \lesssim \frac{|h| \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{([h\theta]+1)\log 2}{x^{1-\tau} \log x} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x}$$

Considérons le nombre hautement composé A . On pose, $\delta_A = \log \frac{d(A)}{d(N)}$. Le nombre δ_A va être compris entre deux nombres consécutifs δ_h et $\delta_{h'}$ de la famille des δ_h . On aura:

$$d(M_h) \leqslant d(A) \leqslant d(M_{h'})$$

et

(19) $$\log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} = \delta_{h'} - \delta_h \leqslant ||v_n\theta|| \log 2 < c_2 \; H^{-1/\kappa}$$

en appliquant l'inégalité (17) .

On applique la proposition 2 aux nombres A, M_h et $M_{h'}$:

$$\text{bén } A \leqslant \text{bén } M_{h'} + \log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + c_2 H^{-1/\kappa}$$

en appliquant les inégalités (18) et (19) . Si l'on choisit:

$H = \left[x^{\gamma\kappa}\right]$, on obtient bén $A \leqslant C\, x^{-\gamma}$

avec $\gamma = \theta \frac{1-\tau}{\kappa+1}$, ce qui établit le théorème 1.

Proposition 5 . Soit A un nombre hautement composé assez grand, $N = N_\varepsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A . Ecrivons $A = \frac{r}{s} N$ avec r et s premiers entre eux . Alors r et s ne sont divisibles par aucun carré.

Démonstration: D'après la relation (11) , si λ^2 divisait r , on aurait:

$$\text{bén } A \geqslant 2(\varepsilon \log \lambda - \log \frac{1}{1+a_\lambda}) + \log U_\lambda \geqslant \log U_\lambda$$

où a_λ est défini par (6) . U_λ est donné par la formule (9), en posant $a = a_\lambda$:

$$\log U_\lambda \geqslant \log\left(\frac{a+1}{a+3} \frac{(a+2)^2}{(a+1)^2}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{(a+1)(a+3)}\right) \geqslant \frac{1}{(a+2)^2}$$

Soit a_2 l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de N , on a: $a = a_\lambda \leqslant a_2$ et $a_2 \sim \frac{1}{2^\varepsilon - 1} \sim \frac{1}{\varepsilon \log 2}$. On aurait donc:

$$\text{bén } A \geqslant \log U_\lambda \gtrsim (\varepsilon \log 2)^2 = \frac{(\log 2)^4}{(\log x)^2}$$

ce qui est en contradiction avec le théorème 1 pour x assez grand.

On démontrerait de même que s n'a pas de facteurs carrés.

Proposition 6 . Soit A un nombre hautement composé assez grand. Soit $N = N_\varepsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A . Soit λ un nombre premier et posons $a = a_\lambda = v_\lambda(N)$ défini par (6) et $b = b_\lambda = v_\lambda(A)$. Alors:

Si $\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1}) \leqslant C\, x^{-\gamma}$, on a: $b = a$ ou $b = a+1$

Si $\log(1 + \frac{1}{a}) - \varepsilon \log \lambda \leqslant C\, x^{-\gamma}$, on a: $b = a$ ou $b = a-1$

Sinon, on a $b = a$.

<u>Démonstration</u>: D'après la proposition 4 , on doit avoir: $|b-a| \leqslant 1$.

Si $b = a+1$, alors: $\text{bén}\ A \geqslant \text{bén}\ \lambda N = \varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1})$

le cas n'est possible que si $\varepsilon \log \lambda - \log(1 + \frac{1}{a+1}) \leqslant C\ x^{-\gamma}$ d'après le théorème 1 .

Si $b = a-1$, alors: $\text{bén}\ A \geqslant \text{bén}\ \frac{N}{\lambda} = \log(1 + \frac{1}{a}) - \varepsilon \log \lambda$

Cela n'est possible que si $\log(1 + \frac{1}{a}) - \varepsilon \log \lambda \leqslant C\ x^{-\gamma}$.

Cela nous permet de déterminer l'exposant $b = v_\lambda(A)$ avec lequel λ divise A , suivant les valeurs croissantes de λ .

λ		x_{k+1}		x_k	
$\varepsilon \log \lambda$		$\log(1+\frac{1}{k+1})$		$\log(1+\frac{1}{k})$	
$\frac{1}{\lambda^\varepsilon - 1}$		$k + 1$		k	
$a=v_\lambda(N)$	$k + 1$		k		$k - 1$
$b=v_\lambda(A)$	$k + 1$	$k + 1$ ou k	k	k ou $k - 1$	$k - 1$

La demi longueur des zones hachurées dans lesquelles b peut varier de une unité est:

Pour $\varepsilon \log \lambda$, la proposition 6 nous donne: $C\ x^{-\gamma}$

Pour $\lambda = e^{\frac{\varepsilon \log \lambda}{\varepsilon}}$, on trouve: $\frac{\lambda}{\varepsilon} C\ x^{-\gamma}$ soit: $O(x_k\ x^{-\gamma} \log x)$

Pour $\frac{1}{\lambda^\varepsilon - 1} = \frac{1}{e^{\varepsilon \log \lambda} - 1}$,on trouve $\frac{\lambda^\varepsilon}{(\lambda^\varepsilon - 1)^2}\ C\ x^{-\gamma}$ soit: $O(x^{-\gamma} \log^2 x)$

<u>Remarque</u> : Soit p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k . Le tableau précédent nous indique:

$$p_k - x_k = O(x_k\ x^{-\gamma} \log x)$$

et le corollaire de la proposition 4 nous donne:

$$p_k - x_k = O(x_k^{\ \tau})$$

ce qui est meilleur lorsque k est petit.

Théorème 2. Soit A un nombre hautement composé et p son plus grand facteur premier. Soit $\lambda < p$ un nombre premier, et posons: $b = v_\lambda(A)$. Alors on a:

$$\log(1 + \frac{1}{b}) \geq \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma})$$

$$\log(1 + \frac{1}{b+1}) \leq \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma})$$

Démonstration: Associons à A le nombre hautement composé supérieur, $N = N_\varepsilon$ précédant A . Pour avoir $b = v_\lambda(A)$, le tableau précédent nous dit que:

$$\log(1 + \frac{1}{b+1}) - C\, x^{-\gamma} \leq \varepsilon \log\lambda \leq \log(1 + \frac{1}{b}) + C\, x^{-\gamma}$$

Le corollaire de la proposition 4 nous donne: $p - x = O(x^\tau)$ soit $p \sim x$ et:

$$\varepsilon\log\lambda - \frac{\log 2 \log \lambda}{\log p} = \log 2 \log \lambda(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log p}) = O(\log \lambda \frac{p - x}{\log^2 x}) = o(x^{1-\tau})$$

et comme $\gamma < 1 - \tau$, $x^{1-\tau} \sim p^{1-\tau} = o(p^{-\gamma})$

Cela démontre le théorème 2, qui améliore les théorèmes 11 et 12 de L. ALAOGLU et P. ERDÖS ([1]) . La remarque précédant le théorème 2 nous permettrait de remplacer $O(p^{-\gamma})$ par une quantité plus petite, lorsque b est petit.

Théorème 3. Soit $Q(X)$ le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X . Soit $N = N_\varepsilon$ et N' deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Il existe une constante c pour laquelle on a: $Q(N') - Q(N) = O(\log N)^c$.

Démonstration: Nous allons étudier toutes les possibilités de construire un nombre hautement composé, A entre N et N' , ayant un bénéfice inférieur à $C\, x^{-\gamma}$

La première ligne du tableau suivant la proposition 6 nous indique qu'un nombre premier λ a le même exposant dans N et dans A , sauf s'il est voisin d'un nombre x_k .

Il existe un entier k' , tel que pour $k > k'$ il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de x_k, soit: $x_k + O(x_k\, x^{-\gamma} \log x)$. Cela arrivera lorsque $x_k\, x^{-\gamma} \log x = o(1)$ c'est à dire, (compte tenu de (7)) pour:

$\frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log 2} - \gamma < 0$. Cela nous donne $k' = \left[\frac{1}{e^{\gamma\log 2}-1}\right]$ et l'on voit que k' ne dépend pas de N mais seulement de γ .

Pour k assez grand, il y aura plusieurs nombres x_k compris entre deux nombres premiers consécutifs. Cela aura lieu lorsque $x_k - x_{k+1} \leqslant 2$. Définissons k'' par :

$$x_{k''-1} - x_{k''} < 2 \leqslant x_{k''} - x_{k''+1}$$

Nous allons chercher un équivalent de k'' .

On a:

$$\log(1 + \frac{1}{k+1}) - \log(1 + \frac{1}{k}) = \log(1 - \frac{1}{(k+1)^2})$$

et:

(20) $$x_k - x_{k+1} = x_k \{1 - \exp(\frac{\log(1 - \frac{1}{(k+1)^2})\log x}{\log 2})\} \sim x_k \frac{\log x}{k^2 \log 2}$$

Pour $k = \frac{C \log x}{\log \log x}$, on a: $x_k - x_{k+1} \sim x_k \frac{(\log \log x)^2}{C^2 \log x \log 2}$

et:

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \log x \frac{\log(1 + \frac{1}{k})}{\log 2} + 2 \log_3(x) - \log \log x + O(1)$$

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \frac{\log \log x}{C \log 2} - \log \log x + 2\log_3(x) + O(1)$$

On voit que, pour $C > \frac{1}{\log 2}$, $\lim(x_k - x_{k+1}) = 0$, et pour $C < \frac{1}{\log 2}$, $\lim(x_k - x_{k+1}) = +\infty$. On en conclut:

$$k'' \sim \frac{\log x}{\log \log x \ \log 2}$$

et par la relation (20) , $2 \sim x_{k''} \frac{\log x}{k^2 \log 2}$

$$x_{k''} \sim \frac{2}{\log 2} \frac{\log x}{(\log \log x)^2}$$

Regardons maintenant quel peut être l'exposant $b_\lambda = v_\lambda(A)$ de λ dans la décomposition en facteurs premiers de A par rapport à $a_\lambda = v_\lambda(N)$.

Pour $\lambda \leqslant x_{k''}$ il y a trois choix au plus pour b_λ: $a_\lambda + 1$, a_λ et $a_\lambda - 1$ à cause de la proposition 5.

Pour $x_{k''} < \lambda < x_{k'}$, pour chaque valeur de k il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de x_k . Pour un tel nombre premier, il y aura deux choix pour b_λ .

Pour $2 \leqslant k \leqslant k'$, pour chaque nombre k , il y aura au plus $2\sqrt{x_k \log x}$ possibilités de choisir p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k , à cause de la proposition 4.

Enfin, pour $k = 1$, il y aura en général une et au plus deux possibilités de choisir p_1 , le plus grand facteur premier de A , pour que le nombre A ainsi construit soit entre N et N' .

Dans ces deux derniers cas, la relation (2) montre que le choix des p_k détermine exactement les exposants b_λ pour tous les nombres λ .

On aura donc:

(21) $$Q(N') - Q(N) \leqslant 2\left(\prod_{k=2}^{k'} 2\sqrt{x_k \log x}\right)(2^{k''-k'})(3^{\pi(x_{k''})})$$

Or, on a: $x_{k''} = o(\log x)$ et $k'' = o(\log x)$ donc:

$$\log(Q(N') - Q(N)) \leqslant \sum_{k=2}^{k'} \frac{1}{2} \log x_k + o(\log x) .$$

Mais, d'après (7) ,

$$\sum_{k=2}^{k'} \frac{1}{2} \log x_k = \frac{\log x}{2 \log 2} \sum_{k=2}^{k'} \log(1 + \frac{1}{k}) = \frac{\log \frac{k'+1}{2}}{2 \log 2} \log x ,$$

On trouve donc:

$$Q(N') - Q(N) = O(x^c) \quad \text{avec} \quad c > \frac{\log \frac{k'+1}{2}}{2 \log 2}$$

Comme on a: $x \sim \log N$ ([8] , §39), cela démontre le théorème 3 .

Théorème 4 . Soit $Q(X)$ le nombre de nombre hautement composés inférieurs à X . On a: $Q(X) = O(\log X)^{1+c}$, c ayant la même valeur que dans le théorème 3 .

Démonstration: On a, avec le théorème 3:

$$Q(X) \leqslant \sum_{\substack{N \leqslant X \\ N \text{ h.c.s.}}} Q(N') - Q(N) = O\Big(\sum_{\substack{N \leqslant X \\ N \text{ h.c.s.}}} (\log N)^c \Big)$$

les sommations s'effectuant sur les nombres hautement composés supérieurs N précédant X , et N' désignant le nombre hautement composé supérieur suivant N .

On a ensuite:

$$\sum_{\substack{N\leqslant X\\ N \text{ h.c.s.}}} (\log N)^c \leqslant (\log X)^c \sum_{\substack{N\leqslant X\\ N \text{ h.c.s.}}} 1 \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{\log\log X}$$

Cette dernière équivalence est donnée par S. RAMANUJAN ([8] , §44). Une évaluation plus précise donnerait:

$$\sum_{\substack{N\leqslant X\\ N \text{ h.c.s.}}} (\log N)^c \sim \sum_{\substack{\lambda\leqslant\log X\\ \lambda \text{ premier}}} \lambda^c \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{(c+1)\log\log X}$$

Cette dernière équivalence étant donnée par [5], §55 .

4. MINORATION DE $Q(X)$.

__Théorème 5.__ __Soit__ $Q(X)$ __le nombre de nombres hautement composés inférieurs à__ X . __Il existe une constante__ $c' > 0$ __telle que__ $Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c'}$.

__Démonstration.__ Ce théorème a déjà été démontré par P. ERDÖS ([2]) . Nous allons obtenir ici une valeur de c' un peu plus grande. La méthode de démonstration est essentiellement la même.

Soit $\theta = \dfrac{\log 3/2}{\log 2}$ et $\theta' = \dfrac{\log 5/4}{\log 2}$. On considère les nombres $\{u\theta + v\theta'\}$, où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y , avec u, v entiers, $|u| \leqslant U$ et $|v| \leqslant V$, U et V étant deux nombres que l'on déterminera par la suite . Les $(2U+1)(2V+1)$ nombres de cette forme sont tous distincts et tous compris entre 0 et 1 . Si l'on divise le segment $[0, 1]$ en $4UV + 2(U+V)$ intervalles de même longueur, l'un de ces intervalles contiendra deux points: $\{u_1\theta + v_1\theta'\} < \{u_2\theta + v_2\theta'\}$ d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, et on aura:

$$\{(u_2 - u_1)\theta + (v_2 - v_1)\theta'\} \leqslant \frac{1}{4UV + 2(U+V)}$$

Posons: $u = u_2 - u_1$, $v = v_2 - v_1$ et $w = -[u\theta + v\theta']$, on a: $|u| \leqslant 2U$, $|v| \leqslant 2V$ et :

$$0 < u\theta + v\theta' + w = \{u\theta + v\theta'\} \leqslant \frac{1}{4UV + 2(U+V)} \leqslant \frac{1}{4UV} \tag{22}$$

Soit A un nombre hautement composé, $N = N_\varepsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. On définit x et x_k par (7) et, en particulier, $x_2 = x^\theta$ et $x_4 = x^{\theta'}$. Soit r, q, p les plus grands nombres premiers divisant A avec les exposants 4, 2, 1. D'après la proposition 4, on a:

$$\pi(r) - \pi(x_4) = O(\sqrt{x_4 \log x}) \quad ; \quad \pi(q) - \pi(x_2) = O(\sqrt{x_2 \log x})$$

et
$$\pi(p) - \pi(x) = O(\sqrt{x \log x})$$

Les nombres U et V étant choisis, et u et v vérifiant (22) on construit un nombre A' tel que:

$$\log d(A') = \log d(A) + (u\theta + v\theta' + w) \log 2$$

dont la forme varie avec le signe de u, v, w. Dans le cas $u > 0$, $v > 0$, $w < 0$, on a:

$$A' = A \frac{Q_1 Q_2 \dots Q_u R_1 R_2 \dots R_v}{p_1 p_2 \dots p_w}$$

où $Q_1, Q_2, \dots$ sont les nombres premiers suivant q, $R_1, R_2, \dots$ les nombres premiers suivant r, et $p_1 = p, p_2, \dots$ les nombres premiers précédant p.

Si U est inférieur à $\dfrac{x_2^\tau}{\log x_2}$ on aura:

$$\pi(Q_u) - \pi(x_2) \leqslant |u| + |\pi(q) - \pi(x_2)| = O\left(\frac{x_2^\tau}{\log x_2}\right)$$

et on aura aussi: $|Q_u - x_2| = O(x_2^\tau)$. Si, de même $V \leqslant \dfrac{x_4^\tau}{\log x_4}$,

on aura $|R_v - x_4| = O(x_4^\tau)$. Comme $w = O(U + V)$, on aura également $|p_w - x| = O(x^\tau)$. On peut donc appliquer les formules (13) et (15):

$$\text{bén } A' - \text{bén } A \leqslant \frac{u \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{v \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x} + \frac{w \log 2}{x^{1-\tau} \log x}$$

$$\text{(23)} \qquad \text{bén } A' - \text{bén } A \leqslant \left(\frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}\right)(1 + o(1))$$

on a d'autre part: $\log \dfrac{d(A')}{d(A)} = (u\theta + v\theta' + w) \log 2 \leqslant \dfrac{1}{4UV}$

La relation (12) appliquée à A puis à A' donne:

$$\varepsilon \log \frac{A'}{A} = \log \frac{d(A')}{d(A)} + \text{bén } A' - \text{bén } A \lesssim \frac{1}{4UV} + \frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}$$

On choisit $U=x^{\alpha}$, $V=x^{\beta}$ avec $\alpha = \frac{2\theta - \theta'}{3}(1-\tau)$; $\beta = \frac{2\theta'-\theta}{3}(1-\tau)$ et on obtient:

$$\varepsilon \log \frac{A'}{A} = O(x^{-(\alpha+\beta)}) = O(x^{\frac{\theta+\theta'}{3}(1-\tau)})$$

D'où l'on tire, en posant $c' < \frac{\theta+\theta'}{3}(1-\tau)$:

$$A' \leqslant A(1 + \frac{1}{x^{c'}})$$

et comme $x \sim \log A$, on obtient:

$$A' \leqslant A(1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}})$$

Cette inégalité a été obtenue par P. ERDÖS ([2]) avec $c' = \frac{1-\tau}{4} = \frac{3}{32}$. Ici nous avons $c' < \frac{\theta+\theta'}{3}(1-\tau) = 0.113 \ldots$ La fin de la démonstration est la même: Comme $d(A') > d(A)$. On a $A' > A$ et il existe un nombre hautement composé A'' tel que $A < A'' \leqslant A'$ qui vérifie $A'' \leqslant A(1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}})$. Cela entraîne: $Q(X) \geqslant (\log X)^{1+c'}$.

5. CONCLUSION. Si l'on supposait les nombres premiers très bien répartis, c'est-à dire distants de $\log x$ au voisinage de x , les formules (13), (14) et (15) deviendraient: bén $W_n \sim \frac{n^2 \log 2}{2x_k}$

La formule (23) deviendrait:

$$\text{bén } A' - \text{bén } A \sim \frac{u^2 \log 2}{2x_2} + \frac{v^2 \log 2}{2x_4}$$

et l'on trouverait $c' = \frac{\theta+\theta'}{4} = 0.277 \ldots$ dans le théorème 5 .

D'autre part, si l'on avait pour les formes linéaires en θ et θ' une relation :

$$\frac{1}{K(\eta)(uv)^{1+\eta}} < |u\theta + v\theta' + w|$$

pour tout $\eta > 0$, cela nous permettrait d'obtenir $\gamma = \frac{\theta+\theta'}{4} - \eta$ dans le théorème 1 et on obtiendrait dans la démonstration du théorème 3 , $k' = 5$. Comme les nombres $\frac{\log 4/3}{\log 2} = 1 - \theta$, et $\frac{\log 6/5}{\log 2} = \theta-\theta'$ sont rationnellement dépendants de $1, \theta, \theta'$, les nombres premiers voisins de x_3 et x_5 n'apportent pas de valeurs nouvelles à la fonction d et le produit dans la formule (21) ne porterait que sur $k = 2$ et $k = 4$. On en déduirait alors :

$$(\log X)^{c-\eta} < Q(X) < (\log X)^{c+\eta} \quad \text{avec} \quad c = 1 + \frac{\theta+\theta'}{4} = 1.277 \ldots$$

Si, par contre les nombres $\{u\theta + v\theta'\}$ étaient mal répartis, il est vraisemblable que la quantité $\frac{\log Q(X)}{\log \log X}$ n'aurait pas de limite.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALAOGLU (L.) and ERDÖS (P.). - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc. t. 56, 1944, pp. 448-469.

[2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers. J. London math. Soc. t. 19, 1944, pp. 130-133.

[3] FELDMANN (N.). - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers. Math. Sbornik, t. 77, (119), 1968, n°3 (en russe) Math U.S.S.R. Sbornik t. 6, 1968, n° 3 - (traduction de l'A.M.S.).

[4] INGHAM (A.E.). - On the difference of two consecutive primes. Quart. J. Math. Oxford, t. 8, (1937), p. 255.

[5] LANDAU (E.). - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.

[6] LANG (S.). - Introduction to Diophantine Approximations. Addison-Wesley, 1966.

[7] NICOLAS (J.L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers. Bull. Soc. Math. France, t. 97 (1969) pp. 129-191.

[8] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers. - Proc. London math. Soc., Séries 2, t. 14, (1915), pp. 347-400 ; Collected papers, pp. 78-128.

-:-:-:-

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 - ORSAY