Gazette des Mathématiciens, Soc. Math. France, 67, Janvier 1996, 3-9.

# — UNE FORMULE DE FOURIER SUR LES NOMBRES PREMIERS —

Jean-Pierre KAHANE

*Professeur Université Paris XI*

On va donner une formule simple d'où découle le théorème des nombres premiers :

$$\varpi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty),$$

$\varpi(x)$ désignant le nombre des nombres premiers $p$ inférieurs à $x$. On notera $n(x)$ la partie entière de $x$ et $\mathcal{P} = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots\}$ la suite des nombres premiers; on écrira $\sum_{p\in\mathcal{P}} f(p)$ au lieu de $\sum_{k=1}^{\infty} f(p_k)$.

Partons de

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma = \mathcal{R}e\, s > 1)$$

$$= \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{-s} d(n(x) - x) \quad (\sigma > 0).$$

Il résulte de ces égalités que $\zeta(s)$ est méromorphe dans le demi-plan $\sigma > 0$, avec un seul pôle, simple et de résidu 1, au point $s = 1$ et ne s'annule pas dans le demi-plan $\sigma > 1$. Nous ne nous servirons que de cela, et de calculs classiques sur séries et intégrales (1).

Posons

$$Z(s) = \exp \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \qquad (\sigma > 1).$$

Comme

$$\log(1-u) + u = O(|\, u\,|^2) \qquad (u \to 0)$$

et que la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-2\sigma}$ converge pour $\sigma > \frac{1}{2}$, la fonction $Z(s)/\zeta(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe et sans zéro dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$, donc $Z(s)$ est holomorphe pour $\sigma > 1$, méromorphe pour $\sigma > \frac{1}{2}$, avec les mêmes pôles et zéros que $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$, et un résidu positif au point $s = 1$(2).

Posons, pour $t$ réel et $\epsilon > 0$,

$$\ell_\epsilon(t) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{1+it+\epsilon}} = \log Z(1 + it + \epsilon)$$

$$\ell(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \ell_\epsilon(t)$$

de sorte que, formellement (3),

$$\ell(t) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{1+it}} = \log Z(1 + it).$$

La fonction $\ell(\cdot)$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$, analytique hors de 0 et des éventuels zéros de $Z(1+it)$, et au voisinage de 0 on a

$$\ell(t) = \log\frac{1}{it} + \text{fonction analytique}$$

où l'on convient que

$$\log\frac{1}{it} = \lim_{s\to 1+it} \log\frac{1}{s-1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}i + \log\frac{1}{t} & (t>0) \\ \frac{\pi}{2}i + \log\frac{1}{|t|} & (t<0) \end{cases}.$$

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, $C^\infty$ à support compact) et

$$\hat{f}(x) = \int f(t)e^{-itx}dt.$$

En passant par $\int f\,\ell_\epsilon$ et en faisant tendre $\epsilon$ vers 0, on obtient la formule simple [4] :

$$\text{(1)} \qquad \int f(t)\ell(t)dt = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}\hat{f}(\log p).$$

Nous allons montrer comment on en tire le théorème des nombres premiers.

Voici l'idée. Soit $y>0$, imaginons que la formule (1) vaille pour $f = f_y$ où $f_y$ est définie par :

$$\hat{f}_y(x) = \begin{cases} e^{x-y} & \text{pour} \quad x<y \\ 0 & \text{pour} \quad x>y \end{cases}$$

et

$$f_y(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}_y(x)e^{itx}dx = \frac{e^{ity}}{2\pi(1+it)}.$$

On obtiendrait

$$\text{(2)} \qquad e^{-y}\varpi(e^y) = \int \frac{\ell(t)}{2\pi(1+it)}e^{ity}dt.$$

Or cette formule a un sens moyennant une régularisation. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi} \geq 0$, $\varphi(0) = 1$. En choisissant $f = \varphi f_y$ on peut appliquer (1), ce qui donne[5] :

$$\text{(3)} \qquad \int \frac{\ell(t)\varphi(t)}{1+it}e^{ity}dt = \int \hat{\varphi}(-x)e^{x-y}\varpi(e^{y-x})dx.$$

Evaluons le premier membre de (3). Supposons d'abord que le support de $\varphi$ ne contient pas de point $t$ où $Z(1+it) = 0$. Comme

$$\frac{\ell(t)\varphi(t)}{1+it} = \psi(t)\log\frac{1}{it} + \lambda(t)$$





avec $\psi, \lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 1$, et que

$$\frac{d}{dt}\left(\psi(t)\log\frac{1}{it}\right) = -\pi i\delta - \psi(t)vp\,\frac{1}{t} + \psi'(t)\log\frac{1}{it},$$

le premier membre de (3), calculé en intégrant par partie, vaut [6] :

$$\frac{2\pi}{y} + O(y^{-2}).$$

Montrons maintenant qu'il en est toujours ainsi. Supposons, par l'absurde, que le support de $\varphi$ contienne exactement deux points $t_0$ et $-t_0$ où $Z(1+it)$ s'annule et que ce soient des zéros d'ordre $k$. Alors

$$\ell(t)\varphi(t) = \psi(t)\left(\log\frac{1}{it} - k\log\frac{1}{i(t-t_0)} - k\log\frac{1}{i(t+t_0)}\right)$$

avec $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(0) = 1$, $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\psi(-t_0) = \varphi(-t_0)$, donc

$$\int \ell(t)\varphi(t)e^{ity}dt = \frac{2\pi}{y}(1 - k\varphi(t_0)e^{it_0y} - k\varphi(-t_0)e^{-it_0y}) + O(y^{-2}).$$

Par choix de $\varphi$ (par exemple $\varphi(t_0) = \varphi(-t_0) > \frac{1}{2}$) et de $y$ (multiple de $2\pi t_0^{-1}$ et grand) la partie réelle du second membre est négative. Cependant, d'après la formule (1), appliquée à $f(t) = \varphi(t)e^{ity}$ (donc $\hat{f} \geq 0$), le premier membre est positif. L'hypothèse est donc à rejeter.

Ainsi on a $Z(1+it) \neq 0$ pour $t \neq 0$, donc

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi}(-x)e^{x-y}\varpi(e^{y-x})dx = \frac{1}{y} + O(y^{-2}) \qquad (y\to\infty)$$

dès que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\hat{\varphi} \geq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

Choisissons $\epsilon > 0$ et $\varphi$ telle que

$$1 - \epsilon \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{\varphi}(x)dx < \frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi}(x)dx = 1.$$

Minorons d'abord le premier membre de (4) en intégrant sur $[-\epsilon,\epsilon]$. On obtient

$$(1-\epsilon)e^{-\epsilon-y}\varpi(e^{y-\epsilon}) < \frac{1}{y} + O(y^{-2}) \qquad (y\to\infty)$$

et par conséquent, faisant tendre $\epsilon$ vers 0,

$$\text{(5)} \qquad \limsup_{y\to\infty} ye^{-y}\varpi(e^y) \leq 1.$$

Majorons maintenant le premier membre de (4) en intégrant sur $[-\epsilon,\epsilon]$, $(-\infty,-\epsilon]$ et $[\epsilon, y)$. On a d'abord

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \leq e^{\epsilon-y}\varpi(e^{y+\epsilon}).$$

Ensuite, comme (5) entraîne, pour un $K>0$ convenable et pour tout $x>0$,

$$e^{-x}\varpi(e^x) \le \frac{2\pi K}{x+1}$$

on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\epsilon} \le K\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\hat\varphi(-x)}{y-x+1}dx \le \frac{K}{y}\int_{-\infty}^{-\epsilon}\hat\varphi(-x)\,dx$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{y} &\le K\int_{\epsilon}^{y}\frac{\hat\varphi(-x)}{y-x+1}dx\\ &\le K\int_{\epsilon}^{y}\hat\varphi(-x)\left(\frac{1}{y-\epsilon+1}+\frac{x-\epsilon}{y-\epsilon}\Big(1-\frac{1}{y-\epsilon+1}\Big)\right)dx\\ &\le \frac{K}{y-\epsilon}\int_{\epsilon}^{\infty}\hat\varphi(-x)(1+x)dx.\end{aligned}$$

On peut choisir $\varphi$ de façon que, pour tout $y \ge 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon}^{y} \le \frac{\epsilon}{y}\,;$$

il suffit que, outre les conditions précédentes, $\hat\varphi(x)$ vérifie [7] :

$$K\int_{-\infty}^{-\epsilon}\hat\varphi(-x)dx + \frac{K}{1-\epsilon}\int_{\epsilon}^{\infty}\hat\varphi(-x)(1+x)dx < 2\pi\epsilon$$

Faisant alors tendre $\epsilon$ vers 0 on a

(6) $$\liminf_{y\to\infty} ye^{-y}\varpi(e^y) \ge 1.$$

(5) et (6) constituent le théorème des nombres premiers.

**Merci à la "Gazette" et en particulier à J.L. Nicolas, d'améliorer cet article par les notes qui suivent.**

## Notes :

**(1)** *On pourra trouver des explications supplémentaires sur le prolongement analytique de $\zeta(s)$ dans les livres classiques de théorie analytique des nombres, par exemple [1], p. 142 ou [2], p. 42.*

*On peut démontrer simplement que $\zeta(1+it) \neq 0$ pour tout $t$ réel non nul (Cf. [1], p.150) et c'est un ingrédient utile dans la démonstration usuelle du théorème des nombres premiers, mais la démonstration ci-dessous n'utilise pas ce résultat qu'en fait elle redémontre.*

**(2)** *Pour $\mathcal{R}e(s) > 0$, la fonction $\log(1-p^{-s}) = -p^{-s} - p^{-2s}/2 - \dots$ est holomorphe. La série $g(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s} + \log(1-p^{-s})$ converge uniformément pour $\mathcal{R}e(s) \ge \sigma_0 > \frac12$ et donc est holomorphe pour $\mathcal{R}e(s) > \frac12$. La fonction $e^{g(s)}$ est aussi holomorphe pour $\mathcal{R}e(s) > \frac12$ et pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, on a $Z(s) = e^{g(s)}\zeta(s)$.*





*Comme on sait prolonger $\zeta(s)$ en une fonction méromorphe pour $\mathcal{R}e(s) > \frac12$, on définit $Z(s) = e^{g(s)}\zeta(s)$ pour $\mathcal{R}e(s) > \frac12$ et $s \neq 1$. Le résidu de $Z(s)$ en $s = 1$ est $e^{g(1)} > 0$.*

**(3)** *Comme $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, $Z(s)$ ne s'annule pas non plus et l'on peut définir une fonction $\log Z(s)$, holomorphe pour $\mathcal{R}e(s) > 1$ et continue en tout $s = 1+it \notin E = \{1+it,\ \zeta(1+it) \neq 0\}$. Mais pour $\mathcal{R}e(s) > 1$, la fonction $\sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s}$ est une détermination de $\log Z(s)$ qui diffère de la première par une constante $2i\pi\lambda$. Il s'ensuit que $\sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s}$ est continue pour $s = 1+it \notin E$. Notons que $\ell(t)$ n'est pas définie pour $t = 0$ ni pour $1+it \in E$.*

**(4)** *Comme $f$ est $C^\infty$, en intégrant $k$ fois par parties, l'intégrale définissant $\hat f$, on obtient $\hat f(x) = O(x^{-k})$ quand $x \to \infty$, pour tout $k$. Cela entraîne la convergence absolue de la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} \hat f(\log p)/p$. Ensuite, $\ell$ a au plus un pôle et un nombre fini de zéros dans le support de $f$, et au voisinage de l'un de ces points $t_0$, on a :*

$$|\ell(1+it)| \sim |\log(t-t_0)|$$

*ce qui assure que $f\ell$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$ fixe on a :*

$$\int f\ell_\epsilon = \int f(t)\left(\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{1+it+\epsilon}}\right)dt =$$

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{1+\epsilon}}\int f(t)e^{-it\log p}dt =$$

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{1+\epsilon}}\hat f(\log p).$$

*La permutation des signes $\int$ et $\sum$ est licite car la quantité*

$$\int |f(t)|\left(\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{1+\epsilon}}\right)dt$$

*est finie. La famille de séries $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{1+\epsilon}}\hat f(\log p)$ est normalement convergente pour $\epsilon \ge 0$ puisque la série $\sum_{p\in\mathcal{P}}|\hat f(\log p)|/p$ est convergente. On a donc*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{1+\epsilon}}\hat f(\log p) = \sum_{p\in\mathcal{P}}\hat f(\log p)/p.$$

*Enfin, par le théorème de Lebesgue, on a :*

$$\lim_{\epsilon\to0}\int f\ell_\epsilon = \int f\ell$$

*ce qui établit (1).*

**(5)** *La fonction $f_y$ étant $C^\infty$, il s'ensuit que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On définit la convolution de la manière usuelle par :*

$$F * G(x) = \int F(t)G(x-t)dt$$

*et si $F$ et $G$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{F*G}$ existe et vaut $\hat{F}\hat{G}$ (Cf. [3], p.17); on a aussi la formule d'inversion : si $f$ et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et si $f$ est continue alors $\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$.*

*On en déduit :*

$$f(-t) = \varphi(-t)f_y(-t) = \frac{1}{4\pi^2}\,\hat{\varphi}(t)\left(\widehat{\hat{f}_y(t)}\right) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\widehat{\hat{\varphi} * \hat{f}_y}\right)(t)$$

*et*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{\varphi} * \hat{f}_y\right)(x).$$

*En reportant dans la formule (1) on trouve :*

$$\hat{f}(\log p) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi}(x)\hat{f}_y(\log p - x)dx$$

*et*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \hat{f}(\log p) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi}(x)\left(\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}\hat{f}_y(\log p - x)\right)dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi}(x)e^{-x-y}\varpi(e^{y+x})dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{\varphi}(-x)e^{x-y}\varpi(e^{y-x})dx.$$

**(6)** *Comme $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a (Cf. la note (4) ci-dessus)*

$$\int \lambda(t)e^{ity}dt = O(y^{-2}).$$

*Ensuite, l'intégrale*

$$\int \psi(t)\log\frac{1}{it}e^{it}dt$$

*peut se calculer de façon élémentaire comme :*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} F(\psi, y, \epsilon)$$

*avec*

$$F(\psi,y,\epsilon) = \int_\epsilon^\infty \psi(t)e^{ity}\left(-\frac{\pi}{2}i - \log t\right)dt + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\psi(t)e^{ity}\left(\frac{\pi}{2}i - \log(-t)\right)dt.$$

*On intègre par parties chacune des intégrales en posant $dv = e^{ity}dt$; la partie intégrée donne :*





$$\frac{\pi}{2y}\left(\psi(\epsilon)e^{iy\epsilon} + \psi(-\epsilon)e^{-iy\epsilon}\right) + \frac{\log\epsilon}{iy}\left(\psi(\epsilon)e^{iy\epsilon} + \psi(-\epsilon)e^{-iy\epsilon}\right).$$

*Le premier terme tend vers $\frac{\pi}{y}\psi(0) = \frac{\pi}{y}$ et par un développement limité d'ordre 0, on voit que le deuxième tend vers 0. Le deuxième terme de l'intégration par parties est :*

$$-\frac{1}{iy}F(\psi', y, \epsilon) + \frac{1}{iy}G(\psi, y, \epsilon)$$

*avec*

$$G(\psi,y,\epsilon) = \int_\epsilon^\infty \frac{\psi(t)}{t}e^{iyt}dt + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\psi(t)}{t}e^{iyt}dt.$$

*On a $G(\psi,y,\epsilon) = G(\psi(0),y,\epsilon) + G(\psi(t)-\psi(0),y,\epsilon)$ et, comme $(\psi(t)-\psi(0))/t \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on obtient :*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} G(\psi(t)-\psi(0),y,\epsilon) = \int \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}e^{ity}dt = O(y^{-1}).$$

*Ensuite*

$$G(1,y,\epsilon) = \int_\epsilon^\infty + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{e^{iyt}}{t}dt = \int_\epsilon^\infty \frac{e^{ity}-e^{-ity}}{t}dt = 2i\int_\epsilon^\infty \frac{\sin(yt)}{t}dt$$

*et donc*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} G(1,y,\epsilon) = 2i\int_0^\infty \frac{\sin(yt)}{t}dt = \pi i$$

*On évalue enfin $-\frac{1}{iy}F(\psi',y,\epsilon)$ en intégrant à nouveau par parties. La partie intégrée fournit une contribution $-\frac{1}{iy}\left(\frac{\pi}{y}\psi'(0)\right) = O(y^{-2})$. Le terme en $G$ fournit :*

$$\left(-\frac{1}{iy}\right)\left(\frac{1}{iy}\right)G(\psi'(0),y,\epsilon) \to \frac{\pi i\psi'(0)}{y^2}.$$

*Le dernier terme sera $\left(-\frac{1}{iy}\right)^2 F(\psi'',y,\epsilon)$ que l'on majore par*

$$\frac{1}{y^2}\int |\psi''(t)||\log\frac{1}{it}|dt = O(y^{-2}).$$

*La théorie des distributions permet de faciliter grandement ce calcul.*

**(7)** *Le choix d'une fonction $\varphi$ vérifiant ces contraintes est classique en analyse de Fourier (voir pour cela [3]).*

## Références


[1] **G Tenebaum**, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut d'Elie Cartan, **n°13**, Nancy (1991)

[2] **W.J. Ellison et M. Mendès-France**, *Les nombres premiers*, Hermann (1975)

[3] **K. Chandrasekharan**, *Classical Fourier transform*, Springer Verlag (1980)