QUELQUES MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES EN THÉORIE DES NOMBRES

par

Jean-Louis NICOLAS

-:-:-:-

Introduction

Soit n un entier positif. On désigne par $d(n)$ le nombre de diviseur de n et par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n . On a ainsi (cf. [8], ch. 16) : pour

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \qquad d(n) = \sum_{d|n} 1 = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$$

et

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i^{\alpha_{i+1}} - 1}{p_i - 1}\right) .$$

Nous allons étudier plus précisément les deux fonctions suivantes :

$$g(n) = \max_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{m} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq m}} d$$

et

$$F(n) = \max q_t(n) \quad \text{avec} \quad q_t(n) = \sum_{\substack{d|n \\ t < d \leq 2t}} 1 .$$

Ces deux fonctions sont liées par les inégalités :

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\, F(n) \leq g(n) \leq 2\, F(n)\,.$$

On a en effet pour tout m :

$$g(n) \geq \frac{1}{m} \sum_{\substack{d \mid n \\ m/2 < d \leq m}} d \geq \frac{1}{m} \sum_{\substack{d \mid n \\ m/2 < d \leq m}} \frac{m}{2} = \frac{1}{2}\, q_m(n)$$

ce qui entraîne $g(n) \geq \frac{1}{2} F(n)$ et d'autre part on a :

$$g(n) \geq \frac{2}{m} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leq m/2}} d\,.$$

Soit m_o une valeur pour laquelle le maximum est atteint, on a :

$$g(n) = \frac{1}{m_o} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leq m_o}} d = \frac{1}{m_o} \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leq m_o/2}} d + \frac{1}{m_o} \sum_{\substack{d \mid n \\ m_o < d \leq m_o}} d$$

$$\leq \frac{g(n)}{2} + F(n) \quad \text{d'où l'on tire } g(n) \leq 2\, F(n)\,.$$

Remarquons encore que l'on a, pour tout n, $g(n) \leq \frac{\sigma(n)}{n}$ avec égalité lorsque n est une puissance d'un nombre premier. La détermination des entiers n tels que $g(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$ n'est pas facile.

Enfin $g(n)$ est une fonction surmultiplicative : Si n_1 et n_2 sont premiers entre eux, on a :

$$g(n_1\, n_2) \geq g(n_1)\, g(n_2)\,.$$

En effet, soit $g(n_1) = \frac{1}{m_1} \sum_{\substack{d \mid n_1 \\ d \leq m_1}} d_1$

$$g(n_2) = \frac{1}{m_2} \sum_{\substack{d_2 \mid n_2 \\ d_2 \leq m_2}} d_2\,.$$

Il vient : $g(n_1)\, g(n_2) = \dfrac{1}{m_1\, m_2} \sum_{d \in D} d\,.$

Les éléments $d \in D$, divisent $n_1 n_2$ et sont $\leq m_1 m_2$. On a donc :

$$g(n_1)\, g(n_2) \leq \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{\substack{d \mid n_1 n_2 \\ d \leq m_1 m_2}} d \leq g(n_1 n_2) .$$

Pour la fonction F, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - <u>On a pour tout</u> n :

$$\frac{\log 2}{\log 2n}\, d(n) \leq F(n) \leq d(n) .$$

<u>Démonstration</u> : Soit k l'entier tel que $2^{k-1} \leq n < 2^k$. On a :

$$k = [\frac{\log n}{\log 2}] + 1 \leq \frac{\log 2n}{\log 2} .$$

Si l'on répartit les $d(n)$ diviseurs de n dans les intervalles $[2^{i-1}, 2^i[$ pour $i = 1$ à k, un des intervalles contiendra plus de $\frac{d(n)}{k}$ diviseurs.

Nous allons étudier les grandes valeurs que peuvent atteindre les fonctions g et F.

Pour étudier les grandes valeurs que prend une fonction arithmétique f, on définit les nombres f-hautement abondants :

DEFINITION. - Dire que n est f-hautement abondant équivaut à dire :

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) .$$

Lorsque $f = d$, on trouve les nombres hautement composés de Ramanujan (cf. [9] et [10]). Les nombres σ-hautement abondants ont aussi été étudiés (cf. [1]) mais la plupart des techniques ne se généralisent pas aux fonctions non multiplicatives.

On obtient les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - <u>On a</u> :

$$\lim \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F(n) = +\infty .$$

THÉORÈME 2. - Si n est un nombre F- (ou g-) hautement abondant, on a :

$$c_1 \frac{d(n)}{\sqrt{\log n \log \log n}} \leq F(n) \leq c_2 \frac{d(n)\sqrt{\log \log n}}{\sqrt{\log n}}$$

THÉORÈME 3. - Soit q un nombre premier et a un entier. Il existe n_o tel que si n est g-hautement abondant et $n \geq n_o$, alors q^a divise n.

Ces résultats ont été obtenus en commun avec P. Erdös et quelques uns avaient été esquissés dans ([5]). Leur intérêt dépend surtout des méthodes utilisées : la minoration du théorème 2 est obtenue à l'aide du théorème central limite des probabilités et la majoration à l'aide d'un théorème combinatoire, le théorème de Sperner.

§. 1. - Démonstration du théorème 1

Elle est basée sur le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit d_a la densité supérieure des entiers n ayant un diviseur d vérifiant $a < d \leq 2a$.

On a :

$$d_a \leq \frac{c}{\log \log a} .$$

Le lemme 1 est pratiquement démontré dans le livre de Halberstam et Roth ([7], p. 256) où le théorème 10 dit que $\lim_{a \to +\infty} d_a = 0$, mais la démonstration donnée permet d'obtenir $d_a = 0(1/\log \log a)$.

Remarque : H. Delange en utilisant les méthodes de [3] peut démontrer le lemme suivant, qui est plus fort :

LEMME 2. - Soit a réel $\geq a_o > e = 2,718$. Pour tout $x > 0$, le nombre des n entiers $\leq x$ ayant un diviseur $d \in]a, 2a]$ est au plus égal à :

$$M_{a_o} \frac{x}{(\log a)^{\alpha} (\log \log a)^{1/2}} + 2a$$

avec $\alpha = 1 - \frac{e \log 2}{2} = 0,057$.

Démonstration du théorème 1 : On a d'abord :

$$F(n) \geq q_t(n) = \sum_{\substack{d|n \\ t<d\leq 2t}} 1$$

et

$$\sum_{n\leq x} F(n) \geq \sum_{n\leq x} q_t(n) = \sum_{t<d\leq 2t} \sum_{\substack{d|n \\ n\leq x}} 1 = \sum_{t<d\leq 2t} [\frac{x}{d}]$$

$$= x \sum_{t<d\leq 2t} (\frac{1}{d}) + O(t) \geq x (\log 2 - \varepsilon)$$

en choisissant t assez grand.

On a d'autre part, d'après le lemme 1, pour $x > x_o(t)$:

$$\sum_{\substack{n\leq x \\ q_t(n)\neq 0}} 1 \leq \frac{2cx}{\log \log t}$$

et l'on a de façon évidente $q_t(x) \leq t+1$.

Soit $t_1 < t_2 < \dots < t_k$. On a :

$$\sum_{n=1} F(n) \geq \sum_{i=1}^{k} (\sum_{n\leq x}{}' q_{t_i}(n))$$

le Σ' voulant dire qu'on somme sur les n tels que $q_{t_j}(n) = 0$ pour $j>i$.
Mais on a :

$$\sum_{n\leq x}{}' q_{t_i}(n) = \sum_{n\leq x} q_{t_i}(n) - \sum_{j=i+1}^{k} (\sum_{\substack{n\leq x \\ q_{t_j}(n)\neq 0}} q_{t_i}(n))$$

$$\geq \sum_{n\leq x} q_{t_i}(n) - (t_i+1) \sum_{j=i+1}^{k} \frac{2cx}{\log \log t_j}$$

pour $x > x_o(t_j)$.

En choisissant $t_1, t_2, \dots, t_k$ tel que $t_i \leq \varepsilon \log \log t_{i+1}$ et t_1 assez grand, on aura :

$$\sum_{n\leq x}{}' q_{t_i}(n) \geq x (\log 2 - \varepsilon) - 2kc\varepsilon x$$

et, pour $x > x_o(t_k)$:

$$\sum_{n=1}^{x} F(n) \geq k\, x(\log 2 - \varepsilon) - 2k^2 c\, \varepsilon\, x\ .$$

Soit : $$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} F(n) \geq k \log 2 - \varepsilon\,(k+2k^2 c)\ .$$

Comme ε peut être choisi petit, cela montre que pour tout k, on a : $\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} F(n) \geq k \log 2$, ce qui démontre le théorème 1.

§. 2. - Théorème central limite des probabilités

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ un entier et sa décomposition en facteurs premiers. Soit d un diviseur de n. On peut considérer $\log d$ comme une variable aléatoire somme des k variables aléatoires X_i prenant comme valeur : 0, $\log p_i$, $2 \log p_i$, ..., $\alpha_i \log p_i$ avec égale probabilité. On peut appliquer le théorème central limite des probabilités, pour montrer que, lorsque k tend vers l'infini la distribution de $\log d$ tend vers la distribution de Gauss. Plus précisément, nous allons appliquer le théorème de Berry-Esseen ([6], tome 2, p. 544) qui donne une évaluation du reste.

Soit $P(\lambda)$ la probabilité qu'un diviseur d de n vérifie

$$-\lambda \leq \frac{\log d - \frac{1}{2} \log n}{S(n)} \leq \lambda\ .$$

Soit

$$(2) \qquad A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\ .$$

On a :

$$(3) \qquad |P(\lambda) - A(\lambda)| \leq 12\, \frac{\rho(n)}{S^3(n)}\ .$$

Soit μ_i la moyenne de la variable X_i, $S^2(n)$ est la variance de la somme :

$$(4) \qquad S^2(n) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i - \mu_i)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i(\alpha_i + 2)}{12} \log^2 p_i\ .$$

D'autre part, $\rho(n)$ est le moment du 3ème ordre :

$$(5) \qquad \rho(n) = \sum_{i=1}^{k} E(|X_i - \mu_i|^3) = \sum_{i=1}^{k} \frac{J(\alpha_i) \log^3 p_i}{8}$$

avec

$$J(\alpha) = \frac{\alpha^2(\alpha+2)^2}{4(\alpha+1)} \quad \text{si } \alpha \text{ est pair}$$

$$J(\alpha) = \frac{(\alpha+1)((\alpha+1)^2-2)}{4} \quad \text{si } \alpha \text{ est impair.}$$

On rappelle que pour une variable aléatoire discrète X qui prend des valeurs $(x_t)_{1 \le t \le T}$ avec égale probabilité, l'espérance mathématique de la variable X^m est :

$$E(X^m) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t^m \ .$$

PROPOSITION 2. - <u>Pour tout</u> n <u>entier</u>, <u>et</u> λ <u>réel</u> >0 , <u>on a</u> :

$$F(n) \ge \frac{d(n) \log 2}{2\lambda\, S(n) + \log 2} (A(\lambda) - 12 \frac{\rho(n)}{S^3(n)})$$

$\rho(n)$ <u>et</u> $S(n)$ <u>étant définis par</u> (5) <u>et</u> (4) <u>et</u> $A(\lambda)$ <u>par</u> (2).

<u>Démonstration</u> : La formule (3) nous dit que le nombre de diviseurs d vérifiant

$$\frac{1}{2} \log n - \lambda\, S(n) \le \log d \le \frac{1}{2} \log n + \lambda\, S(n)$$

est égal à $P(\lambda)\, d(n)$ et vérifie :

$$(6) \qquad P(\lambda)\, d(n) \ge d(n)\, (A(\lambda) - \frac{12\, \rho(n)}{S^3(n)}) \ .$$

Si l'on coupe l'intervalle $[\frac{1}{2} \log n - \lambda\, S(n)\, ,\ \frac{1}{2} \log n + \lambda\, S(n)]$ en sous-intervalles de longueur $\log 2$, il y aura au plus $(\frac{2\lambda\, S(n)}{\log 2} + 1)$ sous-intervalles, et l'un de ces sous-intervalles contiendra plus que $\dfrac{P(\lambda)\, d(n)}{\frac{2\lambda\, S(n)}{\log 2} + 1}$ valeurs de $\log d$, avec d divisant n .

La proposition résulte alors de l'inégalité (6) .

PROPOSITION 3. - Soit $n = 2.3 \dots p_k$ le produit des k premiers nombres premiers. Soit $\eta > 0$ fixé, on a pour k assez grand :

$$F(n) \geq \frac{2 \log 2}{\sqrt{2\pi}} (1 - \eta) \frac{d(n)}{\sqrt{\log n \log \log n}} .$$

Démonstration : On applique la proposition précédente. Il faut calculer $S(n)$ et $\rho(n)$.

Soit $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ la fonction de Chebichev (cf. [8], ch. 22). On a :

$$n = e^{\theta(p_k)} .$$

On a d'autre part : $\theta(x) \sim x$ et $p_k \sim k \log k$ (cf. [8], ch. 22) d'où il vient :

$$\log n = \theta(p_k) \sim p_k \sim k \log k$$

et (7)
$$k \sim \frac{\log n}{\log \log n} .$$

On a d'après (4) :

$$S^2(n) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{k} \log^2 p_i = \frac{1}{4} \int_1^{p_k} \log t \, d[\theta(t)]$$

$$= \frac{1}{4} \theta(x) \log x \Big|_1^{p_k} - \int_1^{p_k} \frac{\theta(x)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \theta(p_k) \log p_k + 0(p_k) \sim \frac{1}{4} k \log^2 k$$

d'où l'on tire :

$$S(n) \sim \frac{1}{2} \sqrt{k} \log k \sim \frac{1}{2} \sqrt{\log n \log \log n} .$$

On calcule de même $\rho(n) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{k} \log^3 p_i \sim \frac{k}{8} \log^3 k$, et

$$\rho(n) \sim \frac{\log n}{8} (\log \log n)^2 .$$

La proposition montre alors que pour tout λ fixé, on a :

$$F(n) \geq \frac{d(n) \log 2}{\sqrt{\log n \log \log n}} (1-\varepsilon) \frac{A(\lambda)}{\lambda} .$$

Quand $\lambda \to 0$, $A(\lambda) \sim \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}$ ce qui achève la démonstration.

§. 3. - Etude des nombres F hautement abondants

Grâce à la proposition 1 , un nombre F-hautement abondant a beaucoup de diviseurs. On va pouvoir utiliser, pour étudier ces nombres, les techniques utilisées pour étudier les nombres hautement composés de Ramanujan. Rappelons rapidement certains résultats (cf. [9] et [10]) :

Soit $\varepsilon > 0$, la fonction $\frac{d(n)}{n^{\varepsilon}}$ a un maximum qu'elle atteint en $N_{\varepsilon} = \Pi\, p^{\alpha_p}$ avec

$$\alpha_p = [\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}]$$

où [u] désigne la partie entière de u .

On pose $x = 2^{1/\varepsilon}$ soit $\varepsilon = \frac{\log 2}{\log x}$ et $x_2 = x^{\frac{\log 3/2}{\log 2}}$. Un tel nombre N_{ε} est dit hautement composé supérieur.

Pour un entier n quelconque, on appelle bénéfice de n par rapport à N_{ε} la quantité :

$$\text{bén. } n = \varepsilon \log \frac{n}{N_{\varepsilon}} - \log \frac{d(n)}{d(N_{\varepsilon})} .$$

Le bénéfice est additif sur les nombres premiers p :

$$(8) \qquad \text{bén.}(\Pi\, p^{\beta_p}) = \sum_p \left(\varepsilon \log(p^{\beta_p - \alpha_p}) - \log \frac{\beta_p + 1}{\alpha_p + 1}\right)$$

et chaque terme de la sommation est positif.

PROPOSITION 4. - Soit n un nombre F hautement abondant et N_ε le nombre hautement composé supérieur précédant n.

On pose $x = 2^{1/\varepsilon}$ et $x_2 = x^{\frac{\log 3/2}{\log 2}}$. On sait que l'on a $x \sim \log N_\varepsilon \sim \log n$.

Alors si $n = \Pi\, p^{\beta_p}$, on a les résultats suivants :

i) pour tout p, $p^{\beta_p} = 0(x^{2 \log x})$,

ii) pour $x_2 < p < x$, on a $\beta_p = 1$ sauf pour $0(\sqrt{x} \log x)$ nombres premiers,

iii) pour $x < p$, on a $\beta_p = 0$ sauf pour $0(\sqrt{x} \log x)$ nombres premiers.

Démonstration : Majorons d'abord le bénéfice. Comme n est F-hautement abondant, on a :

$$F(N_\varepsilon) < F(n)$$

et, par la proposition 1 :

$$\frac{d(N_\varepsilon) \log 2}{\log 2 N_\varepsilon} \leq F(N_\varepsilon) < F(n) < d(n)$$

d'où :

$$\text{bén. } n = \varepsilon \log \frac{n}{N_\varepsilon} - \log \frac{d(n)}{d(N_\varepsilon)} \leq \log \frac{d(N_\varepsilon)}{d(n)} \leq \log \frac{\log 2N_\varepsilon}{\log 2}$$

$$\text{bén. } n \leq (1+\eta) \log x \quad . \tag{9}$$

Les points ii) et iii) se démontrent alors comme la proposition 4 de ([9]).

Démonstration de i) : Supposons que l'on ait $p^\beta = c\,x^{2 \log x}$. On aurait alors en utilisant la formule (8) :

$$\text{bén. } n \geq \varepsilon \log (p^{\beta - \alpha}) - \log \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$$

$$\text{bén. } n > 2\varepsilon (\log x)^2 + \varepsilon \log c - \varepsilon\, \alpha \log p - \log \frac{\beta + 1}{\alpha + 1} \quad .$$

Mais

$$(10) \qquad \alpha = \left[\frac{1}{p^{\varepsilon}-1}\right] < \frac{1}{e^{\varepsilon \log p}-1} \leq \frac{1}{\varepsilon \log p}$$

entraîne $\varepsilon\, \alpha \log p \leq 1$.

D'autre part, $\beta = \dfrac{2 \log^2 x + \log c}{\log p} \leq \dfrac{2 \log^2 x + \log c}{\log 2}$ et $\varepsilon = \dfrac{\log 2}{\log x}$, on aurait alors :

$$\text{bén. } n \geq (2 \log 2) \log x - 2 \log \log x + 0(1) \ .$$

Pour $p^{\beta} > c\, x^{2 \log x}$, comme le bénéfice croît avec β , on aurait a fortiori la relation précédente, qui est en contradiction avec (9).

La minoration dans le théorème 2 , se démontre comme la proposition 3, en utilisant les propriétés énoncées dans la proposition 4 :
Si n est F-hautement abondant, on a :

$$S^2(n) = \sum_{p^{\alpha} \| n} \frac{\alpha(\alpha+2)}{12} \log^2 p$$

$$= \sum_{\substack{p<x_2 \text{ ou } p>x \\ p^{\alpha} \| n}} \frac{\alpha(\alpha+2)}{12} \log^2 p + \frac{1}{4} \sum_{x_2<p<x} \log^2 p$$

$$- \sum_{\substack{x_2<p<x \\ p^{\alpha} \neq p}} \frac{\alpha(\alpha+2)}{12} \log^2 p = S_1 + S_2 + S_3 \ .$$

Par un calcul déjà vu, on a $S_2 \sim \frac{1}{4}\, x \log x \sim \frac{1}{4} \log n \log \log n$.
Dans les sommes S_1 et S_3 le nombre de termes est

$$0(x_2) = 0\left(x^{\frac{\log 3/2}{\log 2}}\right)$$

et chaque terme est inférieur ou égal à :

$$\frac{\alpha(\alpha+2)}{12} \log^2 p \leq \frac{1}{4} (\log p^{\alpha})^2 = 0(\log^4 x)$$

d'où :

$$S(n) \sim \sqrt{S_2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\log n \log \log n} \ .$$

On évalue de même $\rho(n) \sim \frac{\log n}{8} (\log \log n)^2$ et la proposition 2 donne pour toute constante $c_1 < \frac{2 \log 2}{\sqrt{2\pi}}$ et n F-hautement abondant assez grand :

$$F(n) \geq c_1 \frac{d(n)}{\sqrt{\log n \log \log n}} .$$

§. 4. - Le théorème de Sperner

LEMME 3. (Théorème de Sperner) cf. ([2], t. 2, p. 114 et [7] p. 248). - Dans un ensemble à k éléments si des parties $A_1, A_2, \dots, A_h$ sont telles qu'aucune d'entre elles n'en contient une autre, leur nombre h vérifie :

$$h \leq \binom{k}{[\frac{k}{2}]}$$

où $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!}$ est le coefficient du binôme.

Soit $n = 2 . 3 \dots p_k$ le produit des k premiers nombres premiers. Il y a une bijection simple entre les parties de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ et les diviseurs d de n :

à $A \subset \{1, 2, \dots, k\}$, on fait correspondre :

$$d_A = \prod_{i \in A} p_i$$

et la relation $A \subset B$ se traduit par : $d_A | d_B$.

A l'ensemble des diviseurs d de n vérifiant $t < d \leq 2t$, correspond une famille de Sperner :

$$A \subset B \text{ et } A \neq B \Rightarrow d_A | d_B \quad \text{et} \quad d_A \neq d_B \Rightarrow d_A \leq 2\, d_B$$

et d'après le lemme précédent, on a donc :

$$F(n) \leq \binom{k}{[\frac{k}{2}]}.$$

Lorsque $k \to \infty$, la formule de Stirling $(n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})$ donne :

$$\binom{k}{[\frac{k}{2}]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^k}{\sqrt{k}}$$

et d'après la formule (7) on a $k \sim \dfrac{\log n}{\log\log n}$ ce qui donne pour $n = 2 . 3 \ldots p_k$ assez grand,

$$F(n) \leq (1+\varepsilon) \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, d(n) \sqrt{\frac{\log\log n}{\log n}} .$$

Le théorème de Sperner se généralise de la façon suivante :

LEMME 4 (cf. [4]). - Soit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$. La plus grande famille de diviseurs de n tels qu'aucun d'entre eux n'en divise un autre est obtenue en considérant la famille :

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} , \quad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} \beta_i = [\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i] .$$

Désignons par $D(n)$ le cardinal de cette famille. Si $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_j^{\alpha_j} p_{j+1} \ldots p_k$, on a en posant $t = k-j$:

$$D(n) \leq (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_j + 1) \binom{t}{[\frac{t}{2}]} .$$

En effet, il y a $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_j + 1)$ choix possibles pour $\beta_1 \ldots \beta_j$. Ensuite, pour chaque choix de $\beta_1 , \ldots , \beta_j$, il faut choisir $\beta_{j+1} , \ldots , \beta_k$ de telle façon que la somme $\sum_{i=j+1}^{k} \beta_i$ soit une certaine constante r.

Il y a $\binom{t}{r}$ façons de le faire et l'on a :

$$\binom{t}{r} \leq \binom{t}{[\frac{t}{2}]} .$$

Appliquons cela à un nombre n F-hautement abondant. Il résulte de la proposition 4 que le nombre t de nombres premiers divisant n avec l'exposant 1 est équivalent à $\pi(x) \sim \pi(\log n) \sim \dfrac{\log n}{\log\log n}$. On a donc :

$$F(n) \leq D(n) \leq (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_j + 1) \binom{t}{[\frac{t}{2}]} .$$

Comme $\binom{t}{[\frac{t}{2}]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\sqrt{t}}$ et $k \sim \frac{\log n}{\log \log n}$, on a pour toute constante $c_2 > \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et n assez grand :

$$F(n) \le c_2 \frac{d(n) \sqrt{\log \log n}}{\sqrt{\log n}}$$

ce qui donne la majoration dans le théorème 2 .

§. 5. - Démonstration du théorème 3

Le théorème 2 va nous permettre d'obtenir une meilleure majoration du bénéfice que la formule (9). Soit n un nombre F-hautement abondant et N_ε le nombre hautement composé supérieur précédant n . On a :

$$c_1 \frac{d(N_\varepsilon)}{\sqrt{\log N_\varepsilon \log \log N_\varepsilon}} \le F(N_\varepsilon) < F(n) < c_2 \frac{d(n)}{\sqrt{\log n}} \sqrt{\log \log n}$$

l'inégalité de gauche se démontrant comme la proposition 3 . On en déduit :

$$\text{bén. } n = \varepsilon \log \frac{n}{N_\varepsilon} - \log \frac{d(n)}{d(N_\varepsilon)} \le \log \frac{d(N_\varepsilon)}{d(n)}$$

$$\le \log \left(\frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{\log N_\varepsilon}{\log n}} \sqrt{\log \log n} \sqrt{\log \log N_\varepsilon}\right) .$$

Comme $\log n \sim \log N_\varepsilon \sim x$, on a :

$$(11) \qquad \text{bén. } n \le (1+\eta) \log \log x .$$

Supposons maintenant que q^β, avec $\beta < a$ divise exactement n, cela entraînerait, d'après la formule (8) :

$$\text{bén. } n \ge \varepsilon \log q^{\beta - \alpha_q} - \log \frac{\beta+1}{\alpha_q+1}$$

$$\ge \log(\alpha_q + 1) - \log(\beta + 1) - 1$$

$$\ge \log(\alpha_q + 1) - \log(\beta + 1) - 1$$

en utilisant (10).

Quand n tend vers l'infini, q étant fixé, $\varepsilon \to 0$ et

$$\alpha = \left[\frac{1}{q^{\varepsilon}-1}\right] = \frac{1}{e^{\varepsilon \log q}-1} + 0(1) \sim \frac{1}{\varepsilon \log q} \sim \frac{\log x}{\log 2 \log q}$$

d'où bén. $n \geq \log\log x + 0(1)$.

Cela ne suffit pas à faire une contradiction avec (11) mais seulement à démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> q_1 <u>et</u> q_2 <u>deux nombres premiers fixés et</u> a_1 <u>et</u> a_2 <u>deux entiers. Il existe</u> n_o <u>tel que si</u> n <u>est</u> F-<u>hautement abondant et</u> $n \geq n_o$ <u>alors</u> $q_1^{a_1}$ <u>ou</u> $q_2^{a_2}$ <u>divise</u> n.

<u>Démonstration</u> : La formule (8) donnerait alors :

$$\text{bén. } n \geq \varepsilon \log q_1^{\beta_1 - \alpha_{q_1}} - \log \frac{\beta_1+1}{\alpha_{q_1}+1} + (\varepsilon \log q_2^{\beta_2-\alpha_{q_2}} - \log \frac{\beta_2+1}{\alpha_{q_2}+1})$$

$$\geq 2 \log\log x + 0(1) .$$

Le théorème 3 se démontre grâce à la proposition suivante :

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> n <u>un nombre</u> g-<u>hautement abondant. Supposons que</u> q^a <u>ne divise pas</u> n. <u>Soit</u> $1 \leq r < q^a$ <u>et soit un nombre premier</u> $p \equiv r \bmod 2^a$, $p \neq r$. <u>Alors</u> p <u>ne divise pas</u> n.

<u>Démonstration</u> : Soit $g(n) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{d|n \\ d \leq m}} d$.

Si p^k divisait exactement n, écrivons

$$g(n) = \frac{1}{m}(S_1 + S_2 + S_3)$$

avec $S_1 = \sum_{\substack{d_1 | \frac{n}{p} \\ m/p < d_1 \leq m}} d_1$; $S_2 = \sum_{\substack{p^k | d_2 | n \\ d_2 \leq m}} d_2$; $S_3 = \sum_{\substack{d_3 | \frac{n}{p} \\ d_3 \leq m/p}} d_3$.

Les diviseurs d_2 intervenant dans S_2 sont de la forme $p\,d'_2$ avec $d'_2 \mid \frac{n}{p}$ et $d'_2 \leq m/p$. On a donc :

$$S_2 \leq p\,S_3 .$$

Considérons le nombre $n' = \frac{p-1}{p}\,n$, plus petit que n . Il a pour diviseurs les diviseurs de la forme

$$d_1 \;,\; \frac{p-1}{p}\,d_2 \quad ; \quad d_3 \text{ et } q^a\,d_3 .$$

Ces diviseurs sont tous distincts car $q^{2a} \mid \frac{p-1}{p}\,d_2$ et sont inférieurs à m . On a donc :

$$g(n') \geq \frac{1}{m}\left(S_1 + \frac{p-1}{p}\,S_2 + (q^a + 1)\,S_3\right)$$

$$\geq \frac{1}{m}\left(S_1 + S_2 + S_3\right) + \frac{q^a - r}{m}\,S_3 > g(n)$$

ce qui contredit le fait que n soit g-hautement abondant.

Le théorème 3 se déduit de la proposition 5 -qui est valable pour les nombres g-hautement abondants à cause de la relation (1) - et de la proposition 6.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. ALAOGLU et P. ERDÖS, On highly composite and similar numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944) p. 448-469.

[2] L. COMTET, Analyse combinatoire. Collection "Sup", Presses Universitaires de France, (1970).

[3] H. DELANGE, Sur des formules de Atle Selberg. Acta Arithmetica 19, (1971) p. 105-146.

[4] N. G. de BRUIJN, C. van E. TENBERGEN and D. KRUYSWIJK, On the set of divisors of a number. Nieuw Arch. Qisk. , ser. II, 23, (1949-51), p. 191-193.

[5] P. ERDÖS et J.-L. NICOLAS, Répartition des nombres superabondants. Bull. Soc. Math. France, tome 103 (1975), p. 65-90.

[6] W. FELLER, An introduction to Probability theory and its applications. Vol. II, second edition, Wiley, (1971).

[7] H. HALBERSTAM and K.F. ROTH, Sequences. Oxford at the Clarendon Press, (1966).

[8] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers. 4th edition, Oxford, at the Clarendon Press, (1960).

[9] J.-L. NICOLAS, Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan. Canad. J. of Maths, t. 23, (1971) p. 116-130.

[10] S. RAMANUJAN, Highly composite numbers. Proc. London Math. Soc. série 2, t. 14, (1915), p. 347-409 ; and "Collected papers" p. 78-128, Cambridge at the University Press, (1927).

-:-:-:-

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
U.E.R. des Sciences de Limoges
123, rue Albert Thomas
87100 LIMOGES