PLOT n° 19, 1982, p 25-26

# Calcul Formel & Ordinateur

Jean-Louis NICOLAS · Limoges

Si vous demandez à votre calculette, ou à votre miniordinateur combien font deux et deux, vous aurez une réponse. Mais vous n'obtiendrez pas les identités remarquables comme

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Certains gros ordinateurs sont équipés pour le "calcul formel", c'est à dire pour traiter ce type de questions et d'ici peu de temps (si ce n'est déjà fait) les Universités pourront disposer d'un terminal ayant accès à un système de calcul formel. Comme pour les langages d'ordinateurs (Basic, Fortran, Algol...), la tour de Babel s'est reconstruite, et il existe plusieurs systèmes de calcul formel : REDUCE, FORMAC, FORDECAL, SCRATHPAD, ALTRAN, SAC, etc... Voici les possibilités qu'offrent actuellement la plupart de ces systèmes.

1) Arithmétique en multiprécision : on peut traiter des nombres entiers ayant quelques milliers de chiffres (ou moins) et aussi des nombres rationnels, mis sous la forme irréductible p/q automatiquement.

2) Polynômes à plusieurs variables à coefficients dans Z, ou Z/pZ, p étant un nombre premier. On peut ajouter, multiplier, faire la division euclidienne et suivant les puissances croissantes, substituer une variable par une expression, décomposer en produits de polynômes irréductibles, calculer le PGCD de deux polynômes. La mise en place de ces opérations a nécessité la construction de nouveaux algorithmes ou l'amélioration d'algorithmes déjà existants qui ont posé et qui posent encore des problèmes difficiles de mathématiques.

3) Calcul sur les fonctions rationnelles à plusieurs variables.

4) Manipulations d'expressions algébriques ou transcendantes. On peut ainsi travailler dans l'anneau $Z + \sqrt{2}Z$. La quantité $\sqrt{2}$ sera gardée comme telle, et son carré remplacé par 2. Cela pose des problèmes de simplification. Le système doit pouvoir simplifier

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$$

mais sait-il voir que

$$\sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$

est un nombre entier naturel ? Ou bien si l'on pose

$$\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

que l'on a $\alpha = \beta$ ?

On peut aussi faire de la trigonométrie, et rajouter aux fonctions de base du système des fonctions nouvelles en précisant les identités qu'elles doivent satisfaire (par exemple la fonction réciproque de la fonction $x \longmapsto (x-1)e^x$ pour $x \geqslant 0$)

5) Calcul matriciel. On peut effectuer des calculs linéaires avec des matrices dont les éléments sont des polynômes à plusieurs variables. Inverse formel d'une matrice A, calcul de déterminants, résolution formelle de $Ax = B$, calcul de valeurs propres...

6) Différentiation. On peut différencier des polynômes, des fractions rationnelles composées de fonctions usuelles sin, exp, log...etc.

7) Intégration. Le système sait décomposer en éléments simples les fractions rationnelles et trouver leur primitive. Il sait également calculer les primitives usuelles que l'on est en droit d'exiger d'un taupin ou d'un étudiant de DEUG. De même que pour intégrer certaines fractions rationnelles ( $\int \frac{dx}{x}$ , $\int \frac{dx}{1+x^2}$ ) on doit introduire des fonctions transcendantes, on peut introduire de nouvelles primitives (par exemple

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$ , c'est le logarithme intégral) et demander au système de calculer de nouvelles intégrales en fonction de celles-là (par exemple $\int \frac{e^x}{x} dx$). Le système doit pouvoir décider si une intégrale proposée ne s'exprime pas en fonction des fonctions élémentaires (c'est à dire celles introduites dans le système). Tout cela pose des problèmes mathématiques qui ne sont pas tous résolus et qui avaient été laissés de côtés, parce que nécessitant des calculs rébarbatifs.

8) Résolution d'équations différentielles. Les méthodes classiques sont connues du système : équations linéaires, homogènes, à variables séparées, etc... Les problèmes sont de même nature, mais en plus difficiles, que ceux du paragraphe précédent.



9) Calcul de développements limités.

10) Calcul d'intégrales définies par la méthode des résidus.

Le mathématicien est intéressé à double titre par ces systèmes : en tant qu'utilisateur, on voit l'intérêt pour des travaux de recherche nécessitant de gros calculs; en pédagogie, l'influence de tels systèmes sur l'enseignement du calcul des primitives sera comparable à l'influence des calculettes à l'école primaire sur l'apprentissage des 4 opérations. Enfin, voici quelques questions que l'existence du calcul formel sur ordinateur amène à se poser.

C'est un exercice classique que de calculer

$$\sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{N} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$

Pour quelles types de fractions rationnelles ce genre de simplifications a-t-il lieu ? Pour quelles fractions rationnelles Q(x) la quantité

$$\sum_{x=1}^{N} Q(x)$$

est-elle une fraction rationnelle de N ? Ce problème s'apparente au problème de primitives : pour quelles fractions rationnelles Q(x), $\int Q(x)dx$ est une fraction rationnelle. L'ordinateur sait résoudre ce type de problème maintenant. Mieux même. Si l'on pose

$$H(N) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x}$$

la simplification précédente n'a pas lieu et H(N) n'est pas une fraction rationnelle de N. Mais l'ordinateur peut montrer que la quantité

$$K(N) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x^2}$$

est une fraction rationnelle de H(N). Voilà, parmi d'autres, un problème soulevé par l'existence du calcul formel. •