

Les nombres colossalement abondants  
et le théorème de Lang

Jean-Louis NICOLAS  
(Orsay 27 mars 1973)

Désignons par  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$  la somme des diviseurs de  $n$ . On sait que  $\sigma$  est une fonction multiplicative et que  $\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$  (cf, Hardy and Wright [2], chapitre XVI). Erdős et Alaoglu ont donné dans [1] la définition suivante

Définition : On dit que  $n$  est superabondant si :

$$(1) \quad m < n \implies \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}.$$

On trouvera dans [1] et dans [5] quelques propriétés des nombres superabondants, en particulier :

Proposition 1 : Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant  $n$  est  $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ , on a :  $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$  et  $\alpha_k = 1$  sauf si  $n = 4$  ou  $n = 36$ , en désignant par  $p_k$  le  $k^{\text{ième}}$  nombre premier.

Proposition 2 : On a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^\gamma$ , où  $\gamma$  est la constante d'Euler.

Cette proposition se trouve dans Hardy and Wright [2], chapitre XVIII.

Soit  $\varepsilon > 0$  ; il découle de la proposition 2 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} = 0$ . La fonction  $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$  a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points  $N_\varepsilon$ . On est ainsi conduit à la définition suivante :

Définition : On dit que  $N$  est colossalement abondant, s'il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que

la fonction  $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$  atteigne son maximum en  $N$ .

$\varepsilon$  étant fixé, on a vu qu'il existe toujours au moins un nombre colossalement abondant  $N$  associé à  $\varepsilon$  et l'on a pour tout  $n \geq 1$  :

$$(2) \quad \frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \leq \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}}$$

d'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant :

$$n < N \implies \frac{\sigma(n)}{n} \leq \frac{\sigma(N)}{N} \left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon < \frac{\sigma(N)}{N}$$

Proposition 3 : Soit  $N$  un nombre colossalement abondant associé à  $\varepsilon$ . On définit, pour  $p$  premier et  $\alpha$  entier  $\geq 1$  :

$$F(p, \alpha) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + \dots + p}\right)}{\log p} = \frac{\log\left(\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\alpha+1}-p}\right)}{\log p}$$

et pour  $\alpha = 0$ ,  $F(p, 0) = +\infty$ . Alors si  $p$  premier divise  $N$  avec l'exposant  $\alpha \geq 0$ , on a :

$$(3) \quad F(p, \alpha) \geq \varepsilon \geq F(p, \alpha+1).$$

Démonstration : Si  $\alpha > 0$ , on applique l'inégalité (2) avec  $n = Np$ . Il vient :

$$(4) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \leq \left(\frac{Np}{N}\right)^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon}$$

et d'autre part :

$$(5) \quad \frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^\alpha)} = \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}-1} = p\left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1} + \dots + p}\right)$$

En comparant (4) et (5), on obtient  $\varepsilon \geq F(p, \alpha+1)$ . L'inégalité  $F(p, \alpha) \geq \varepsilon$  est évidente si  $\alpha = 0$ . Si  $\alpha \geq 1$ , on la démontre en appliquant (2) avec  $n = \frac{N}{p}$ .

Définition : On pose

$$E_p = \{F(p, \alpha) , \alpha \geq 1\}$$

$$E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i, \dots\}.$$

Pour tout  $\eta > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $E$  supérieurs à  $\eta$  et l'on peut ranger les éléments de  $E$  en une suite décroissante :  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \dots > \varepsilon_i$ .

On pose  $\varepsilon_0 = +\infty$ .

Théorème : a) Si  $\varepsilon \notin E$ , la fonction  $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}}$  atteint son maximum en un seul point  $N_\varepsilon$

dont la décomposition en facteurs premiers est :

$$(6) \quad N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[ \frac{\log \left( \frac{p^{1+\varepsilon}-1}{p^\varepsilon-1} \right)}{\log p} \right] - 1.$$

Soit  $i \geq 1$ ; pour tout  $\varepsilon \in [\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i]$ ,  $N_\varepsilon$  est constant et égal (par définition) à  $N_i$ . Les nombres  $N_i$  sont tous distincts.

b) Si les ensembles  $E_p$  sont tous disjoints, il n'y a pas d'autres nombres colossalement abondants que les  $N_i$ , et la fonction  $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$  atteint son maximum aux deux points  $N_i$  et  $N_{i+1}$ .

c) Si les ensembles  $E_p$  ne sont pas tous disjoints, pour chaque  $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$ , la fonction  $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon_i}}$  atteint son maximum en 4 points :  $N_i, qN_i, rN_i$  et  $N_{i+1} = qrN_i$ . Les nombres  $qN_i$  et  $rN_i$  sont colossalement abondants.

Démonstration : a) Soit  $p$  un nombre premier fixé. Comme  $\varepsilon \notin E$ , alors  $\varepsilon \notin E_p$ , et comme la suite  $F(p, \alpha)$  est strictement décroissante en  $\alpha$ , il existe  $\alpha$  tel que :

$$(7) \quad \frac{\log \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha-1}}{\log p} = F(p, \alpha) > \varepsilon > F(p, \alpha+1).$$

En résolvant en  $\alpha$ , les inégalités (7) on trouve, en désignant par  $[x]$  la partie entière de  $x$

$$(8) \quad \alpha = \left[ \frac{\log \frac{p^{1+\varepsilon}-1}{p^\varepsilon-1}}{\log p} \right] - 1$$

et la proposition 3 dit que l'exposant de  $p$  dans  $N_\varepsilon$  est  $\alpha$ .

b) Choisissons  $\varepsilon = \varepsilon_i = F(q, \beta)$ . Pour  $p \neq q$ ,  $\varepsilon \notin E_p$  et l'exposant de  $p$  dans  $N_\varepsilon$  est déterminé par (7) ou (8). L'exposant de  $q$  peut être choisi égal à  $\beta$  ou  $\beta-1$  d'après la proposition 3. Dans le premier cas on trouve  $N_{i+1}$ , dans le second  $N_i$  et la fonction  $\frac{\sigma(n)}{1+\varepsilon_i}$  atteint son maximum en ces deux points.

c) Soit  $\varepsilon = F(p, \alpha) \in E$ . Alors  $\varepsilon$  est irrationnel. Si l'on avait  $\varepsilon = \frac{a}{b}$ ,  $a$  et  $b$  entiers, on aurait  $p^a = (1 + \frac{1}{p^\alpha + \dots + p})^b$  avec  $p^a$  entier et  $(1 + \frac{1}{p^\alpha + \dots + p})^b$  non entier. D'après le théorème de Gelfond-Schneider ([3], chap. 3),  $\varepsilon$  est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang ([3] chap. 2, et [4]), on déduit que si,  $p, q, r$  sont des nombres premiers distincts et si  $p^\varepsilon, q^\varepsilon, r^\varepsilon$  sont algébriques, alors  $\varepsilon$  doit être rationnel. Mais si  $\varepsilon \in E_p$ ,  $p^\varepsilon$  est rationnel et on conclut que  $E_p \cap E_q \cap E_r = \emptyset$ .

S'il existe deux ensembles  $E_q$  et  $E_r$  non disjoints, et si l'on choisit  $\varepsilon_i = F(q, \beta) = F(r, \gamma) \in E_q \cap E_r$ , pour  $p \neq q, r$  l'exposant de  $p$  est déterminé par (7) et (8), l'exposant de  $q$  peut être  $\beta$  ou  $\beta-1$ , et celui de  $r$ ,  $\gamma$  ou  $\gamma-1$  ce qui donne les 4 possibilités annoncées. Remarquons que le quotient des deux nombres colossalement abondants consécutifs  $qN_i$  et  $rN_i$  n'est pas un nombre premier.

Tables numériques. La table 1 donne les valeurs de  $10^5 F(p, \alpha)$ . Les valeurs non indiquées sont inférieures à 1. Les colonnes "exposant = i" indiquent l'exposant de  $p$  dans  $N_\varepsilon$ . Ainsi pour  $\varepsilon = 500 10^{-5}$ , pour  $p = 7$ , on a  $129 < 500 < 910$  et l'exposant de 7 dans  $N_\varepsilon$  est 2.

La table 2 donne les valeurs de  $v^{-1}(F(p, \alpha))$  avec  $v(x) = \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\log x}$ . Comme  $v$  est une fonction décroissante de  $x$ , l'ordre des termes est inversé par rapport à la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier  $p$  donné. Pour avoir  $p = 97$ , on doit choisir  $97 \leq x \leq 101 =$  nombre premier suivant 97, et l'on trouve :

$$2^8 4^5 5^3 7^2 11^2 13 17 \dots \dots 97 \text{ pour } x < 100,9$$

et  $2^8 3^5 5^3 7^2 11^2 13^2 17 \dots \dots 97 \text{ pour } x > 100,9$ .

La table 3 donne la suite des nombres colossalement abondants.

Table 1

$p \setminus \alpha$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$	$\alpha = 5$
2	58 496	22 239	9 954	4 731	2 308
3	26 286	7 286	2 305	755	250
5	11 328	2 037	400	79	16
7	6 862	910	129	18	3
11	3 629	315	29	3	
13	2 889	214	16	1	
17	2 017	115	7		

Table 2

$\alpha = 1$		$\alpha = 2$		$\alpha = 3$		$\alpha = 4$		$\alpha = 5$
2	exposant = 1	3,29	exposant = 2	5,44	exposant = 3	9,08	exposant = 4	15,36
3		6,72		15,38		36,3		88,57
5		16,8		60,50		230,4		920,5
7		31,4		153,9		812,8		4 531,5
11		73,4		554,9		4 580,6		40 080,3
13		100,9		897,2		8 743,5		90 404,7
17		168,8		1 951,4		24 842,7		335 898,5
$\alpha = 6$	exposant = 6	$\alpha = 7$	exposant = 7	$\alpha = 8$	exposant = 8	$\alpha = 9$	exposant = 9	$\alpha = 10$
p = 2	26,3	45,7	80,2			142,4		255,4
p = 3	221,7	567,6	1 480,4			3 919,7		10 507,9

Table 3

n

 $\sigma(n)$  $\sigma(n)/n$ 

$\epsilon_1 =$	58 496	1	1	1
$\epsilon_2 =$	26 286	2	3	1,5
$\epsilon_3 =$	22 239	2 3	12	2
$\epsilon_4 =$	11 328	4 3	28	2,333
$\epsilon_5 =$	9 954	4 3 5	168	2,8
$\epsilon_6 =$	7 286	8 3 5	360	3
$\epsilon_7 =$	6 862	8 9 5	1 170	3,25
$\epsilon_8 =$	4 731	8 9 5 7	9 360	3,7143
$\epsilon_9 =$	3 629	16 9 5 7	19 344	3,8381
$\epsilon_{10} =$	2 889	16 9 5 7 11	232 128	4,1870
$\epsilon_{11} =$	2 308	16 9 5 7 11 13	3 249 792	4,5091
$\epsilon_{12} =$	2 305	32 9 5 7 11 13	6 604 416	4,5818
$\epsilon_{13} =$	2 037	32 27 5 7 11 13	20 321 280	4,6993
$\epsilon_{14} =$	2 017	32 27 25 7 11 13	104 993 280	4,8559
		32 27 25 7 11 13 17	1 889 879 040	5,1416

Références

- [1] Erdős (P) and Alaoglu (L).- On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc. t. 56, 1944, p. 448-469.
- [2] Hardy (G.H.) and Wright (E.M.).- An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press.
- [3] Lang (S).- Introduction to transcendental numbers, Addison Wesley 1966.
- [4] Lang (S).- Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki 18e année, 1965-66, n° 305.
- [5] Nicolas (J.L.).- Ordre maximal d'un élément du groupe  $S_n$  des permutations et "highly composite numbers", Bull. Soc. Math. France, 97, 1969, p. 129-191.