Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.203-214

PROPRIÉTÉS PROBABILISTES des DIVISEURS d'un NOMBRE

par

P. ERDÖS et J.L. NICOLAS

INTRODUCTION

P. Erdös a démontré que la densité asymptotique des entiers ayant deux diviseurs d_1 et d_2 vérifiant : $d_1 < d_2 < 2\,d_1$ existe (cf. (2) et le livre de Halberstam et Roth (8), p. 262, th. 14). Soit :

$$F(n) = \max_t \Big(\sum_{\substack{t/2 < d \leq t \\ d \mid n}} 1 \Big)$$

L'énoncé précédent revient à dire : $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \Big(\sum\limits_{\substack{F(n) > 1 \\ n \leq x}} 1 \Big) = c$

P. Erdös a conjecturé que $c = 1$, c'est-à-dire que, presque tous les entiers ont deux diviseurs d_1 et d_2 tels que $d_1 < d_2 < 2\,d_1$.

Les résultats actuellement connus sont beaucoup moins satisfaisants sur la répartition probabiliste des *diviseurs* d'un nombre que sur celle des *diviseurs premiers* d'un nombre.

En effet, on sait, ((9)) que presque tous les nombres n ont

$$\log \log n + O(\psi(n) \sqrt{\log \log n})$$

facteurs premiers (ψ est une fonction quelconque telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \psi(n) = \infty$).

Mais on sait aussi que si l'on écrit : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\omega^{\alpha_\omega}$, pour l'entier " moyen " n, le $i^{\text{ème}}$ facteur premier est de l'ordre de $\exp$ (exp i). Plus précisément : ((5)

p. 178) : Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe i_o tel que pour tous les $n \leqslant x$ (sauf au plus εx), on a pour $i > i_o$:

$$(1-\eta)\, i < \log \log p_i < (1+\eta)\, i\,.$$

P. Erdös a également démontré (cf. [3] où le théorème 1 donne un résultat plus fort) que presque tous les entiers ont deux diviseurs premiers p et q vérifiant $p < q < p^2$. Enfin nous utiliserons (proposition 2) une autre propriété probabiliste des diviseurs premiers de n.

On peut ainsi considérer l'étude de la fonction $F(n)$ comme une approche de la répartition des diviseurs d'un nombre. On peut définir également la fonction g :

$$g(n) = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \frac{1}{m} \Big(\sum_{\substack{d \mid n \\ d \leqslant m}} d \Big)$$

Il est facile de voir (cf. [7]) que l'on a pour tout n :

$$\frac{1}{2} F(n) \leqslant g(n) \leqslant 2\, F(n)$$

Dans deux précédents articles, nous avons donné diverses propriétés des fonctions F et g concernant notamment les " grandes " valeurs qu'elles peuvent prendre. (cf. [6] et [7]). Signalons à ce propos que les résultats mentionnés dans ([6] p. 86) sur la fonction f:

$f(n) = n/d_n$ avec d_n le plus petit diviseur de n

tel que :

$$\sum_{d \mid n,\, d \leqslant d_n} d \geqslant n$$

ont été rédigés par Tran ([11]).

Nous allons nous intéresser à la fonction $\Delta(n)$, une des valeurs de m pour laquelle le maximum intervenant dans la définition de $g(n)$ est réalisé. On a donc :

$$g(n) = \frac{1}{\Delta(n)} \sum_{d \mid n,\, d \leqslant \Delta(n)} d$$

Les n pour lesquels le maximum est atteint en plusieurs points sont sûrement très difficiles à étudier, c'est un problème du type : nombres parfaits. Mais dans les résultats que nous obtenons, la détermination de la fonction Δ est sans importance.

Nous nous proposons de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1 -

Pour toute constante $c_1 \leq 0,23$ *et pour tout* n *assez grand, on a :*

$$\Delta(n) \geq \exp(c_1 \log n / \log \log n)$$

THÉORÈME 2 -

Il existe une constante $c_2 > 0$*, telle que pour une infinité de* n*, on ait :*

$$\Delta(n) \leq \exp(c_2 \log n / \log \log n)$$

THÉORÈME 3 -

Pour presque tout n*, on a :*

$$\Delta(n) < n, \text{ c'est-à-dire } g(n) > \frac{\sigma(n)}{n}$$

où $\sigma(n)$ *désigne la somme des diviseurs de* n.

Dans les démonstrations, il sera commode d'utiliser la notation :

$$g_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{d | n, d \leq m} d$$

On a ainsi : $\sigma(n) = g_n(n)$ et : $g(n) = \max\limits_{1 \leq m \leq n} g_m(n) = g_{\Delta(n)}(n)$.

Il est d'autre part facile de voir que $\Delta(n)$ est un diviseur de n.

§1. *DÉMONSTRATION du THÉORÈME 1*

LEMME 1 -

Soit p premier et α entier. Si p divise n, alors $\Delta(n) \geqslant p^{\alpha}$.

Démonstration -

Soit $m < p^{\alpha}$, on va montrer que $g_{pm}(n) > g_m(n)$.

Soit $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_i$ les diviseurs de n inférieurs à m; alors $1, p\, d_1, \ldots, p\, d_i$ seront des diviseurs de n inférieurs à pm. On aura donc :

$$g_{pm}(n) \geqslant \frac{1}{pm}(1 + p\, d_1 + \ldots + p\, d_i) = \frac{1}{pm} + g_m(n) > g_m(n).$$

Le lemme 1 montre que $\Delta(n) \geqslant f(n) = \max\limits_{p^{\alpha}|n} p^{\alpha}$.

Les " petites " valeurs de la fonction f sont obtenues pour $n = e^{\psi(x)}$, où $\psi(x) = \sum\limits_{p^{\alpha}\leqslant x} \log p$ est une des fonction de Tchebicheff.

Précisons aussi que $e^{\psi(x)}$ est le p.p.c.m. des entiers $\leqslant x$. Les nombres de la forme $n = e^{\psi(x)}$ ont beaucoup de diviseurs, et le théorème central limite des probabilités (cf. [7]) indique qu'ils sont regroupés en majorité autour de $\sqrt{n}$, ce qui implique que $\Delta(n)$ soit voisin de $\sqrt{n}$, alors que le lemme 1 ne donne qu'une minoration de l'ordre de $\log n$. C'est en utilisant cette opposition que l'on démontre le théorème 1.

Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$, vérifiant $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$

On écrit pour alléger : $A(n) = \exp(c \log n / \log \log n)$ et on suppose que $\max\limits_i q_i^{\alpha_i} \leqslant A(n)$ sinon le lemme 1 donne le résultat.

On écrit :

$$n = D_1\, D_2 \ldots D_r \tag{1}$$

où les D_j sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux et vérifiant pour tout j : $A(n)^2 \leqslant D_j \leqslant A(n)^3$. On peut obtenir une telle décomposition (1) en prenant par exemple :

$$D_1 = q_1^{\alpha_1} \dots q_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$$

i_1 étant le plus petit indice pour lequel D_1 soit supérieur à $A(n)^2$. Ensuite on choisit $D_2 = \prod_{i_1 < i \leqslant i_2} q_i^{\alpha_i}$ etc ...

Comme on a $D_j \leqslant A(n)^3$, le nombre r de facteurs dans la formule (1) vérifie :

$$r \geqslant \frac{1}{3} \frac{\log n}{\log A(n)} = \frac{1}{3\,c} \log \log n$$

Un diviseur d de n s'écrira :

$$d = d_1\, d_2 \dots d_r \quad \text{avec} \quad d_j \mid D_j$$

Choisissons maintenant $m < A(n)$. Si l'on a $d \leqslant m$, on aura forcément pour tout j : $d_j \leqslant m < \sqrt{D_j}$ et le nombre de diviseurs d de n inférieurs à m sera majoré par $d(n)/_{2^r}$. Il vient alors :

$$g_m(n) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid n, d \leqslant m} d \leqslant \sum_{d \mid n\ d \leqslant m} 1 \leqslant \frac{d(n)}{2^r} = \frac{d(n)}{(\log n)^{(\log 2)/3c}}$$

Maintenant, par le principe des tiroirs, on voit que pour tout n,

$$g(n) \geqslant \frac{\log 2}{2 \log 2\, n}\, d(n) \qquad \text{cf. (7), prop. 1.}$$

On en déduit que pour $c < \frac{1}{3} \log 2$, on a, pour n assez grand, $\Delta(n) \geqslant A(n)$ et cela démontre le théorème 1.

§2. DÉMONSTRATION du THÉORÈME 2

On considère des nombres premiers $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ vérifiant :

$$\frac{x'}{\lambda} < q_k < \frac{x''}{\lambda}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{x'}{\lambda^{3^i}} < q_{k-i} < \frac{x''}{\lambda^{3^i}}$$

où λ est un nombre réel fixé > 1, et x' et x'' des nombres voisins tendant simultanément vers l'infini; par exemple :

$$x'' = x'(1 + \frac{1}{\log x'}).$$

Soit $n = q_1 q_2 \dots q_k$. On va montrer que $\Delta(n) = q_k$.

Ce nombre $n = q_1 q_2 \dots q_k$ a les propriétés suivantes :

i) Tout r diviseur δ_r (i. e. tout diviseur produit de r facteurs premiers) est inférieur à tout $(r+1)$ diviseur δ_{r+1}.

On exigera même d'avoir :

$$\frac{\delta_r}{\delta_{r+1}} < \frac{q_1}{2 q_k} \tag{2}$$

Pour cela il suffit que :

$$2 \lambda^{3^k} \left(\frac{x''}{x'}\right)^k < x' \tag{3}$$

ii) On écrit un diviseur de n sous la forme $q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}$ avec toujours $q_{i_1} < q_{i_2} < \dots < q_{i_r}$. Les r-diviseurs de n sont rangés comme leurs plus petits facteurs premiers. Plus précisément, on a :

$$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r} < q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_s}$$

si et seulement si :

$(r < s)$ ou $(r = s$ et $i_1 < j_1)$ ou $(r = s,\ i_1 = j_1$ et $i_2 < j_2)$ etc ...

On exigera même d'avoir :

$$i_1 < j_1 \Longrightarrow \frac{q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r}}{q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_r}} < \frac{q_{i_1+1}}{2 q_k} \tag{4}$$

Comme on a :

$$q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_r} \leqslant \frac{x''^r}{\lambda^{3^{k-i_1}}}$$

et $j_1 \geqslant i_1 + 1$ donne

$$q_{j_1} \dots q_{j_r} \geqslant \frac{x'^r}{\lambda^{3^{k-j_1} + 3^{k-j_2} + \dots}} \geqslant \frac{x'^r}{\lambda^{\frac{3}{2} 3^{k-j_1}}} \geqslant \frac{x'^r}{\lambda^{\frac{1}{2} 3^{k-i_1}}}$$

Comme on a d'autre part :

$$\frac{q_{i_1+1}}{2 q_k} > \frac{\lambda x'}{2 \lambda^{3^{k-i_1-1}} x''}$$

Il suffira pour obtenir (4) d'avoir :

$$\frac{\lambda}{2}\ \lambda^{\frac{1}{6}3^{k-i_1}} > \left(\frac{x''}{x'}\right)^{r+1}$$

relation qui est entraînée par, car $i_1 < j_1 \leqslant k$ et $r \leqslant k-1$:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\ \lambda^{3/2} > \left(\frac{x''}{x'}\right)^{k}$$

iii) On remarque que les propriétés i et ii entraînent que le quotient de deux diviseurs successifs de n est $\geqslant 2$.

Il reste à démontrer que $\Delta(n) = q_k$. On a d'abord :

$$g_{q_k}(n) = 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} + \ldots + \frac{q_1}{q_k}$$

On va montrer que pour tout diviseur $m > q_k$, on a $g_m(n) < g_{q_k}(n)$

Trois cas se présentent, suivant la valeur de d, diviseur de n précédant m. On écrit $m = q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_r}$ avec $r \geqslant 2$.

Premier cas –

d a $(r-1)$ diviseurs. Par les propriétés iii et i, on a :

$$g_m(n) \leqslant 1 + \frac{d}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) \leqslant 1 + \frac{2\,d}{m} \leqslant 1 + \frac{q_1}{q_k}$$

Deuxième cas –

$d = q_{j_1} q_{j_2} \ldots q_{j_r}$ a r diviseurs premiers. On suppose que $i_1 = j_1$; ...; $i_{h-1} = j_{h-1}$; et $j_h < i_h$, c'est-à-dire $j_h \leqslant i_h - 1$ et on suppose $i_h \neq k$, ce qui entraîne $j_h \leqslant k-2$.

On a alors :

$$g_m(n) \leqslant 1 + \frac{d}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) < 1 + \frac{2\,d}{m} \leqslant$$
$$1 + \frac{q_{j_h+1}}{q_k} \leqslant 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k}$$

en utilisant la relation (4).

Troisième cas –

On suppose que $i_r = k$. Les diviseurs précédant m sont :

$$\frac{q_\ell}{q_k}\, m \quad \text{pour } \ell = k-1,\ k-2,\ \dots,\ i_{r-1}+1$$

et soit d celui qui vient juste avant. On a alors :

$$g_m(n) \leq 1 + \frac{q_{k-1}}{q_k} + \dots + \frac{q_{i_{r-1}+1}}{q_k} + \frac{2\,d}{m}$$

Si d a $(r-1)$ facteurs premiers, on sait que $\frac{2\,d}{m} < \frac{q_1}{q_k}$.

Si d a r facteurs premiers, on l'écrit $d = q_{j_1}\, q_{j_2} \dots q_{j_r}$

On suppose $i_1 = j_1$; ...; $i_{h-1} = j_{h-1}$; et $j_h < i_h$, c'est-à-dire $j_h \leq i_h - 1$. On a forcément $i_h \leq i_{r-1}$ et d'après la relation (4) on a $\frac{2\,d}{m} < \frac{q_{i_r}-1}{q_k}$, ce qui achève de montrer que $\Delta(n) = q_k$.

En regardant les conditions (3) et (5), on peut voir qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles :

$$\Delta(n) \leq \exp\left[(\log 3 + \varepsilon)\log n / \log\log n\right]$$

Ce qui démontre le théorème 2. Avec un peu plus de soin, on peut remplacer le 3 de $\log 3$ (qui vient des exposants 3^k) par $2+\varepsilon$. Il semble que la " bonne " constante c entre les théorèmes 1 et 2 soit $\log 2$.

PROPOSITION 1 -

La densité inférieure des n tels que $\Delta(n) < \sqrt{n}$ est strictement positive.

Démonstration -

On considère les $n \leq x$ ayant 3 diviseurs premiers q_1, q_2, q_3 vérifiant par exemple :

$$x^{\alpha-\varepsilon} < q_1 < x^{\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{1}{3} - \frac{3}{100}$$

$$x^{\beta-\varepsilon} < q_2 < x^{\beta} \qquad\qquad \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{100} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{1}{1000}$$

$$x^{\gamma-\varepsilon} < q_3 < x^{\gamma} \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{3} + \frac{2}{100}$$

Combien y a-t-il de tels nombres $n \leq x$? Il y en a :

$$\sum_{q_1,q_2,q_3} \left[\frac{x}{q_1\,q_2\,q_3}\right] = \sum_{q_1,q_2,q_3} \frac{x}{q_1\,q_2\,q_3} + O\left(\frac{x^{\alpha+\beta+\gamma}}{\log^3 x}\right)$$

$$= x \left(\sum_{q_1} \frac{1}{q_1}\right) \left(\sum_{q_2} \frac{1}{q_2}\right) \left(\sum_{q_3} \frac{1}{q_3}\right) + o(x).$$

Or $$\sum_{x^a \leq p \leq x^b} \frac{1}{p} = \log \log(x^b) - \log \log(x^a) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$
$$= \log \frac{b}{a} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

le nombre des $n \leq x$ est donc :

$$x\left(\log \frac{\alpha}{\alpha - \varepsilon}\right) \left(\log \frac{\beta}{\beta - \varepsilon}\right) \left(\log \frac{\gamma}{\gamma - \varepsilon}\right) + o(x)$$

Montrons maintenant que pour $n = n' q_1 q_2 q_3$, alors $\Delta(n) \leq q_3 n'$. Cela résulte d'abord de ce que $\Delta(q_1 q_2 q_3) = q_3$. Ensuite, comme n' est tout petit, les diviseurs de n de la forme $d' D$, où $d' \mid n'$ et $D \mid q_1 q_2 q_3$ sont rangés prioritairement suivant les valeurs de D. On a donc pour $m = m' D$:

$$g_{m'D}(n) = \frac{\sigma(m')}{m' D} \sum_{\substack{d \mid q_1 q_2 q_3 \\ d<D}} d + \frac{1}{m'} \sum_{\substack{d' \mid n' \\ d' \leq m'}} d'$$
$$= g_{m'}(n') + \frac{\sigma(m')}{m'} (g_D(q_1 q_2 q_3) - 1)$$

et cette dernière quantité est maximale pour $D = q_3$.

On sait d'autre part que, si l'on désigne par $P(n)$ le plus grand facteur premier de n, la densité des n pour lesquels $P(n) \geq n^c$ existe (cf : [1]) et vaut $\log \frac{1}{\alpha}$ pour $c \geq \frac{1}{2}$. D'après le lemme 1, la densité des n pour lesquels $\Delta(n) < \sqrt{n}$ est donc majorée par $1 - \log 2 < 0{,}31$. Tout ceci laisse conjecturer l'existence d'une fonction $\phi : [0,1] \to [0,1]$ croissante et continue telle que :

$$\lim \frac{1}{x} \operatorname{card} \{n \leq x,\ \Delta(n) < n^c\} = \phi(c)$$

§3. *DÉMONSTRATION du THÉORÈME 3*

Soit $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n.

On écrit :

$$n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} q_i^{\alpha_i}$$

et l'on pose pour $2 \leq j \leq \omega(n)$:

$$\prod_{j=1}^{j-1} q_i^{\alpha_i} = q_j^{\gamma_j(n)}$$

PROPOSITION 2 - *(P. ERDÖS, (4), Th. 2).*

Il existe une fonction continue strictement croissante ϕ, avec $\phi(0) = 0$, $\phi(\infty) = 1$ telle que, si l'on enlève un ensemble E de densité 0 on ait :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin E}} \frac{1}{\log \log n} \sum_{\gamma_j(n)\leq c} 1 = \phi(c)$$

PROPOSITION 3 -

Soit $\psi(n)$ une fonction croissante tendant vers l'infini avec n. Presque tous les entiers n vérifient, si $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$:

$$i \leq k-1 \quad et \quad q_i > \psi(n) \Rightarrow q_{i+1} > 2\, q_i$$

Démonstration -

Considérons les entiers n entre $\sqrt{x}$ et x. Ceux qui ne vérifient pas la propriété ont deux diviseurs premiers $q > \psi(\sqrt{x})$ et p, $q < p < 2\,q$. De tels entiers, il y en a au plus :

$$\sum_{\substack{q>\psi(\sqrt{x}) \\ q<p<2q}} \left[\frac{x}{p\,q}\right] \leq x \sum_{q>\psi(\sqrt{x})} \frac{1}{q} \left(\sum_{q<p<2q} \frac{1}{p}\right)$$

Or $\displaystyle\sum_{q<p<2q} \frac{1}{p} \sim \frac{\log 2}{\log q}$, et comme la série $\displaystyle\sum \frac{1}{q \log q}$ lorsque q est premier, est convergente, son reste, lorsque $q > \psi(\sqrt{x})$ tend vers 0.

PROPOSITION 4 -

Soit n vérifiant : Il existe $j \geq 7$ tel que $1 < \gamma_j(n) < \frac{3}{2}$ et $q_i > 2\, q_{i-1}$ pour $i \geq j$. Pour un tel n, on a

$$g_m(n) > \frac{\sigma(n)}{n} \quad avec \quad m = q_1^{\alpha_1} \ldots q_{j-1}^{\alpha_{j-1}}$$

et donc $\Delta(n) \neq n$.

Démonstration -

Comme $j \geq 7$, on a $q_j \geq 17$ et $m \geq 2.3.5.7.11.13 = 30\,030$

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{1}{q_i} + \ldots + \frac{1}{q_i^{\alpha_i}}\right)$$

$$\leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \frac{1}{1 - 1/q_i} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{2}{q_i}\right)$$

$$\leq \frac{\sigma(m)}{m} \prod_{i \geq j} \left(1 + \frac{2}{2^{i-j} q_j}\right) \leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \sum_{i \geq j} \log\left(1 + \frac{2}{2^{i-j} q_j}\right)$$

$$\leq \frac{(m)}{m} \exp \frac{1}{q_j} \sum_{i \geq j} \frac{2}{2^{i-j}} \leq \frac{\sigma(m)}{m} \exp \frac{4}{q_j} \leq \frac{\sigma(m)}{m}\left(1 + \frac{8}{q_j}\right)$$

Compte tenu de ce que pour $0 \leq x \leq 1$, $e^x \leq 1 + 2x$.

On a d'autre part : $(\gamma_j(n) > 1 \Rightarrow q_j < m)$

$$g_m(n) \geq \frac{1}{m}\left(\sigma(m) + q_j\right) = \frac{\sigma(m)}{m}\left(1 + \frac{q_j}{\sigma(m)}\right)$$

Il reste donc à démontrer :

$$\frac{8}{q_j} < \frac{q_j}{\sigma(m)}$$

soit, comme $q_j^{\gamma_j(n)} = m$, que : $m^{2/\gamma_j(n)} > 8\,\sigma(m)$.

Comme $\gamma_j(n) < 3/2$, ceci sera assuré pour $\sigma(m) < \frac{1}{8} m^{4/3}$.

Il n'y a qu'un nombre fini de m qui vérifient cette inégalité.

L'étude des nombres colossalement abondants nous apprend même, (cf. ([6]), tableau III) que tout n vérifie :

$$\sigma(n) \leq \sigma(12) \left(\frac{n}{12}\right)^{1,114} \leq 1,76\; n^{1,14}$$

ce qui entraîne $\sigma(m) > \frac{1}{8} m^{4/3}$ pour $m \geq 7317$.

La démonstration du théorème 3 se fait de la façon suivante : Les propositions 2 et 3 montrent que presque tous les entiers vérifient les hypothèses de la proposition 4.

Une caractérisation plus précise des entiers n pour lesquels $\Delta(n) = n$ semble difficile.

REFERENCES

[1] *N.G. BRUIN (de)* On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$.- Indagationes Math. 13, 1951.- p. 50-60.

[2] *P. ERDÖS* On the density of some sequences of integers.- Bull. Amer. Math. Soc.- (1948).- t. 54.- p. 685-692.

[3] *P. ERDÖS* Some remarks on prime factors of integers.- Canadian j. Maths.- (1959).- t. 11.- p. 161-167

[4] *P. ERDÖS* On some properties of prime factors of integers.- Nagoya Math. J. (1966).- t. 27.- p. 617-623.

[5] *P. ERDÖS* On the distribution of prime divisors.- Aequationes Math. (1969).- t. 2.- p. 177-183

[6] *P. ERDÖS & J.L. NICOLAS* Répartition des nombres superabondants.- Bull. Soc. Math. France.- (1975).- t. 103 p. 65-90.

[7] *P. ERDÖS & J.L. NICOLAS* Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres.- à paraître au Bulletin des Science Mathématiques.- t. 100 (1976) et Séminaire de Théorie des nombres de l'Université de Bordeaux.- (1974-75) exposé n° 13.

[8] *H. HALBERSTAM & K.F. ROTH* Séquences.- Oxford at the Clarendon Press (1966).

[9] *G.H. HARDY & S. RAMANUJAN* The Normal number of prime factors of a number n.- Quarterly Journal of Mathematics.- 48;- (1917) p. 76-92 et Collected papers of Ramanujan.- p. 262-275.

[10] *J. KUBILIUS* Probabilistic methods in the theory of numbers.- vol. 11.- Translations of Mathematical Monographs.

[11] *T. H. TRAN* Sur le nombre d'entiers $\leqslant x$ et non divisibles par les nombres premiers $> y$.- Séminaire de Théorie des nombres Delange-Pisot-Poitou.- (1975-76) (Groupe d'étude).

P. ERDÖS
Académie des Sciences de Hongrie
BUDAPEST, Hongrie

J.L. NICOLAS
Département de Mathématiques
U.E.R. des Sciences de LIMOGES
123, rue Albert Thomas
87100 - LIMOGES