J. Math. pures et appl.,
56, 1977, p. 307 à 326.

NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSÉS

Par Gérard BESSI et Jean-Louis NICOLAS

RÉSUMÉ. — Ramanujan a défini et étudié les nombres *hautement composés*. Un tel nombre a strictement plus de diviseurs que les entiers qui lui sont inférieurs. Nous étudions ici une restriction de cette définition à l'ensemble $\mathcal{N}_2$ des nombres qui n'ont pas de facteurs premiers autres que 2 et 3. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n; on dit que n est 2-*hautement composé* (2-h. c.) si $n \in \mathcal{N}_2$ et si $M \in \mathcal{N}_2$ et, $m < n \Rightarrow d(m) < d(n)$.

Si $N = 2^a 3^b$ est 2-h. c., on indique comment sont faits tous les nombres 2-h. c. compris entre N et 3 N et on évalue leur quantité à 2 unités près. On en déduit des estimations sur $Q(X) = \text{Card}\{n \leq X, n \text{ 2-h. c.}\}$ en particulier : $Q(X) \geq c(\log X)^{4/3}$.

Les méthodes et les résultats font intervenir le développement en fraction continue de $(\log 2/\log 3)$ et résolvent le problème d'optimisation en nombres entiers x et y :

$$\begin{cases} x\log 2 + y\log 3 \leqq C \\ \max(x+1)(y+1). \end{cases}$$

On peut généraliser sans difficulté, si l'on remplace log 2 et log 3 par deux réels positifs quelconques.

Introduction

On dit qu'un nombre entier n est *hautement composé* (*cf.* [8]), si tout nombre plus petit que n a moins de diviseurs que n. Si l'on désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n et si la décomposition en facteurs premiers de n est : $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ on a : $d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1)$ et la définition devient : n est hautement composé si et seulement si $m < n$ entraîne $d(m) < d(n)$.

On restreint maintenant la définition des nombres hautement composés à

$$\mathcal{N}_2 = \{n \in \mathbf{N};\ n = 2^a 3^b,\ a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N}\}.$$

La définition devient : n est 2-*hautement composé* (2-*h. c.*) si $n \in \mathcal{N}_2$ et si pour tout $m \in \mathcal{N}_2$ avec $m < n$, on a : $d(m) < d(n)$.

Considérons pour a donné : $\max_{n \leqq a,\ n \in \mathcal{N}_2} d(n)$. Soit n^* le plus petit entier où ce maximum est atteint. On voit que n^* est 2-h. c. Rechercher ce maximum revient à résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers (*cf.* [6]) :

$$\begin{cases} x\log 2 + y\log 3 \leqq C = \log a \\ \max(x+1)(y+1). \end{cases}$$

Tous les résultats que nous obtenons s'adaptent presque immédiatement pour résoudre le problème d'optimisation, pour α et β réels :

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y \leqq C; \qquad x \geqq 0,\ y \geqq 0, \quad x \text{ et } y \text{ entiers}, \\ \qquad\qquad\qquad \max xy, \end{cases}$$

et fournissent un algorithme de calcul de la solution. Probablement, les méthodes que nous utilisons peuvent s'adapter à des classes beaucoup plus larges de problèmes d'optimisation en nombres entiers à *deux* variables. Le passage à trois variables ou plus sera délicat. En effet, nous utiliserons essentiellement les approximations rationnelles d'un nombre réel, et la théorie des fractions continues nous donne pour cela des résultats précis. L'algorithme de Jacobi-Perron, qui généralise l'algorithme des fractions continues, est moins satisfaisant.

De même que Ramanujan [8] a introduit les nombres hautement composés supérieurs on peut définir les nombres 2-*hautement composés supérieurs* (2-*h. c. s.*) par (*cf.* [1]) :

$$N\,2-\text{h.c.s.} \Leftrightarrow N\in\mathcal{N}_2 \quad \text{et} : \ \exists\,\varepsilon>0 \quad \text{tel que} \ \forall M\in\mathcal{N}_2,$$
$$\frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} \leqq \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}.$$

Pour M < N, on a :

$$d(M) \leqq \left(\frac{M}{N}\right)^{\varepsilon} d(N).$$

Ainsi tout nombre 2-h. c. s. est 2-h. c. On peut montrer également que (*cf.* [1]) : le nombre $N = 2^a\,3^b$ est 2-h. c. s. si et seulement si

(1) $$\frac{1}{(1+1/b)^{\theta}-1}-1 \leqq a \leqq \frac{1}{(1+1/(b+1))^{\theta}-1}, \qquad \text{avec} \quad \theta = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}631.$$

Dans [1] pour étudier $Q(X) = \text{card}\,\{n\ 2\text{-h. c.};\ n \leqq X\}$, nous étions amenés à étudier $\mathscr{C}(N) = \text{card}\,\{n\ 2\text{-h. c.};\ N \leqq n < 3N\}$ dans le cas où N est 2-h. c. s. Le but de cet article sera de calculer $\mathscr{C}(N)$ lorsque N est 2-h. c.

La première remarque est d'écrire les éléments de $\mathcal{N}_2$ compris entre $N = 2^a\,3^b$ et 3 N sous la forme :

$$M_i = 2^{a+i}\,3^{b-h(i)}.$$

L'écriture est unique, et $N \leqq M_i < 3N$ donne : $h(i) = [i\,\theta]$ avec $[x]$ = partie entière de x.

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit* $N = 2^a\,3^b$ *un nombre 2-hautement composé. Il existe deux entiers* $i_0 \geqq 0$ et $i'_0 \geqq 0$ *tels que tous les nombres n 2-hautement composés vérifiant* $N \leqq n < 3N$ *soient de la forme*

$$n = M_i = 2^{a+i}\,3^{b-[i\theta]},$$

avec $-i'_0 \leqq i \leqq i_0$. *Ces nombres sont classés suivant les valeurs de* $\{i\,\theta\} = i\,\theta-[i\,\theta]$.

Définition de la fonction φ. — Soit p_k/q_k le k-ième convergent dans le développement en fraction continue de $\theta = (\log 2)/\log 3$. Les valeurs de p_k/q_k, pour $k = 0, 1, \ldots$ sont :

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{8};\ \frac{12}{19};\ \frac{41}{65};\ \frac{53}{84};\ \frac{306}{485};\ \frac{665}{1054};\ \frac{15601}{24727};\ \text{etc.}$$

Pour x réel, $x > 1$, on définit q_k tel que $q_k \leqq x < q_{k+1}$ puis

$$r = \left[\frac{x-q_{k-1}}{q_k}\right] \qquad \text{et} \qquad q = rq_k + q_{k-1}.$$

On pose alors :

$$\varphi(x) = \theta\, q_k\, q\,(2x - q - q_k).$$

La fonction φ est linéaire par morceau, croissante, continue et convexe. Elle admet une fonction réciproque notée φ^{-1}.

THÉORÈME 2. — *Soit* $N = 2^a 3^b$ *un nombre 2-hautement composé, vérifiant* $a \geqq 345$. *On pose* $x_a = \varphi^{-1}(a+1)$. *Soit* $\mathscr{C}(N) = i_0 + i_0' + 1$ *le nombre de nombres n 2-hautement composés, vérifiant* $N \leqq n < 3N$. *On a*

$$x_a - 2 \leqq \mathscr{C}(N) \leqq x_a + 2.$$

De plus, on sait calculer à une unité près les nombres i_0 et i_0' et le théorème 1 permet ainsi de décrire l'ensemble des nombres 2-hautement composés.

L'idée de la démonstration du théorème 1 est simple : si n n'est pas 2-h. c., il existe $m < n$, $m \in \mathscr{N}_2$ tel que $d(m) \geqq d(n)$. On dit alors que *m barre n*. On remarque encore, que si n n'est pas 2-h. c. il est barré par le nombre 2-h. c. qui le précède. Il suffit alors de constater que si M_i (avec $i \geqq 0$) n'est pas 2-h. c., alors M_{i+1} n'est pas non plus 2-h. c.

Dans la démonstration du théorème 2, on suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'on suppose i_0 et i_0' connus. On obtient alors 4 inégalités fondamentales (prop. 3), en écrivant que M_{i_0+1} est barré par le nombre 2-h. c. qui le précède, tandis que M_{i_0} n'est pas barré; et de même pour $M_{-i_0'-1}$ et $M_{-i_0'}$. Le calcul du nombre 2-h. c. qui précède M_{i_0+1} repose sur le rangement des nombres réels $\{i\theta\}$ pour $-i_0' \leqq i \leqq i_0$, rangement qui est donné par un beau résultat de calcul modulo 1 (prop. 2). Il reste alors à manipuler les 4 inégalités, le plus délicat étant lorsque x_a voisine les ruptures de pente de la fonction φ.

Pour finir (prop. 6) on déduit du théorème 2 une estimation de

$$Q(X) = \text{card}\,\{n \leqq X,\ n-\text{2-h. c.}\}.$$

Nous avons plaisir à remercier M. Giry du Centre de Calcul de l'Université de Limoges qui a dressé, en utilisant leur définition, une table des nombres 2-h. c. inférieurs à 10^{80}. Cette table nous a permis de conjecturer, de démontrer, puis de vérifier nos résultats qui en retour donnent un algorithme de calcul des nombres 2-h. c.

1. Répartition modulo 1

On note pour x réel :

$$[x] = \text{partie entière de } x,$$

$$\{x\} = \text{partie fractionnaire de } x,$$

$$\|x\| = \min_{n \in \mathbf{Z}} |x-n| = \min(\{x\}, 1-\{x\}),$$

$$= \text{distance à l'entier le plus proche.}$$

Soit θ un nombre irrationnel positif. On écrit son développement en fraction continue. $\theta = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, en suivant les notations de Hardy et Wright ([2], chap. 10) ou de Lang ([4]). Soit p_k/q_k les convergents principaux. On sait que l'on a

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} \qquad \text{et} \qquad p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}.$$

Les convergents intermédiaires sont :

$$\frac{p}{q} = \frac{rp_k + p_{k-1}}{rq_k + q_{k-1}} \qquad \text{avec} \quad 1 \leqq r < a_{k+1}.$$

PROPOSITION 1. — *Soit* $m \in \mathrm{N}$, $m \geqq 1$, *et* θ *un nombre irrationnel. On pose*

$$\min_{1 \leqq n \leqq m} \{n\theta\} = \{q\theta\} \qquad et \qquad \max_{1 \leqq n \leqq m} \{n\theta\} = \{q'\theta\}.$$

Soit k *défini par* $q_k \leqq m < q_{k+1}$. *Lorsque* k *est pair on a*

$$q = q_k \qquad et \qquad q' = rq_k + q_{k-1} \qquad avec \quad r = \left[\frac{m - q_{k-1}}{q_k}\right].$$

Lorsque k *est impair, on a*

$$q = rq_k + q_{k-1} \qquad et \qquad q' = q_k \qquad avec \quad r = \left[\frac{m - q_{k-1}}{q_k}\right].$$

DÉFINITION. — On posera : $q = q(m) =$ p. g. d. p. (m) (*plus grand dénominateur de convergent d'indice pair*) et $q' = q'(m) =$ p. g. d. i. (m) (*plus grand dénominateur d'indice impair*).

Les p. g. d. p. successifs de $\theta = (\log 2)/\log 3$ sont :

1, **2**, 5, **8**, 27, 46, **65**, 149, 233, 317, 401, **485**, 1 539, etc.

Les p. g. d. i. successifs de θ sont :

1, **3**, 11, **19**, **84**, 569, **1 054**, etc.

(On a **souligné** les dénominateurs de convergents principaux.)

La démonstration de la proposition 1 se trouve dans : Släter ([9]), Lang ([4], Meijer et Tijdeman ([10]); ainsi que la démonstration des formules suivantes, qui nous serviront par la suite :

Soit

$$q = \text{p. g. d. } p(m) \qquad \text{et} \qquad q' = \text{p. g. d. } i(m).$$

Les numérateurs associés sont :

$$p = q\theta - \|\theta q\| \qquad \text{et} \qquad p' = q'\theta + \|\theta q'\|.$$

On a alors :

$$qp' - pq' = 1; \tag{2}$$

$$\frac{\|\theta q\|}{q} + \frac{\|\theta q'\|}{q'} = \frac{1}{qq'}, \tag{3}$$

$$\|\theta q\| = \{\theta q\} < \frac{1}{q'} \qquad \text{et} \qquad \|\theta q'\| = 1 - \{\theta q'\} < \frac{1}{q}, \tag{4}$$

$$q + q' \geqq m+1. \tag{5}$$

Pour $1 \leqq n \leqq m$, on a

$$[\theta(n-q)] = [\theta n] - p \qquad \text{et} \qquad [\theta(q'-n)] = p' + [-n\theta]. \tag{6}$$

PROPOSITION 2. — *On range les nombres* $\{n\theta\}$ *pour* $n' \leqq n \leqq n''$ *en une suite :*

$$\{n_1\theta\}, \ldots, \{n_i\theta\}, \ldots, \{n_{n''-n'+1}\theta\}.$$

On pose q = *p. g. d. p.* $(n''-n')$ *et* q' = *p. g. d. i.* $(n''-n')$. *Les différences* $n_{i+1}-n_i$ *ne prennent que* 3 *valeurs :*

(1) $n_{i+1}-n_i = q$,

(2) $n_{i+1}-n_i = -q'$,

(3) $n_{i+1}-n_i = q-q'$.

La démonstration de la proposition 2 se trouve dans Släter ([9]) qui donne un historique complet du sujet.

On peut voir facilement qu'il y a un ordre de priorité entre les 3 valeurs : la troisième n'est jamais prioritaire; l'un des deux dénominateurs q et q' est principal, et celui qui est principal est prioritaire. Étant donné n_i, parmi les 3 valeurs possibles pour n_{i+1}, il faut choisir celle qui est comprise entre n' et n'' avec le meilleure ordre de priorité.

Exemple.

$$\theta = \frac{\log 2}{\log 3}; \qquad n' = -14, \qquad n'' = 25; \qquad n''-n' = 39,$$

d'où $q = 27$; $q' = 19$ (principal). Les nombres $\{n\theta\}$ sont rangés suivant la suite : $n_i = 0, 8, -11, 16, -3, 24, 5, -14, 13$, etc.

DÉFINITION *de* φ. — Soit x réel $\geqq 1$, on définit :

$$q = \text{p.g.d.p.}([x]) \qquad \text{et} \qquad q' = \text{p.g.d.i.}([x]),$$

et $\varphi(x) = \theta\, q\, q'(2x - q - q')$.

Compte tenu de la proposition 1, on retrouve la définition donnée dans l'introduction.

2. Démonstration du théorème 1

DÉFINITION. — On dit que m barre n, si l'on a

$$m < n \qquad \text{et} \qquad d(m) \geqq d(n).$$

LEMME 1. — *Les* 4 *propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *n n'est pas* 2-*h. c.*;

(ii) *il existe un nombre m qui barre n;*

(iii) *il existe un nombre* 2-*h. c. qui barre n;*

(iv) *le plus grand nombre* 2-*h. c. qui précède n, barre n.*

Démonstration. — La définition des nombres 2-h. c. montre : (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Montrons maintenant (ii) $\Rightarrow$ (iii). On a : m barre n. Si nous supposons que m n'est pas 2-h. c. alors il existe $m_1 < m$ et $d(m_1) \geqq d(m) \geqq d(n)$, donc si l'on suppose qu'il n'existe pas de nombres 2-h. c. qui barre n on pourrait construire dans **N** une suite strictement décroissante infinie, ce qui est impossible.

On démontre (iii) $\Rightarrow$ (iv), en remarquant que si m est un nombre 2-h. c. qui barre n, tout nombre 2-h. c. m', vérifiant $m < m' < n$ barre *a fortiori* n.

Enfin, on a de façon évidente iv $\Rightarrow$ ii.

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-h. c. donné. On a vu que les éléments $n \in \mathcal{N}_2$ vérifiant $N \leqq n < 3N$ s'écrivaient de façon unique sous la forme

$$M_i = 2^{a+i} 3^{b-h(i)} = 2^i 3^{-h(i)} N \qquad \text{avec} \quad h(i) = [i\theta] \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

LEMME 2 (*lemme de barrage*). — *On a*

M_j *barre* $M_i \Rightarrow (j-i)(b+1)-(a+1)(h(j)-h(i)) \geqq j\,h(j) - i\,h(i)$ $M_j < M_i$ et M_j *ne barre pas* $M_i \Rightarrow (j-i)(b+1) - (a+1\,(h(j) - h(i)) < j\,h(j) - i\,h(i)$.

Démonstration. — M_j barre M_i entraîne que $d(M_j) \geqq d(M_i)$, donc

$$(a+j+1)(b-h(j)+1) \geqq (a+i+1)(b-h(i)+1),$$

ce qui donne

$$(j-i)(b+1)-(a+1)(h(j)-h(i)) \geqq jh(j) - ih(i),$$

M_j ne barre pas M_i et $M_j < M_i$ entraîne : $d(M_j) < d(M_i)$ soit :

$$(j-i)(b+1)-(a+1)(h(j)-h(i)) < jh(j) - ih(i).$$

LEMME 3.

$$Si \quad i > 0, \qquad M_j \text{ barre } M_i \quad \Rightarrow \quad j < i,$$
$$Si \quad i < 0, \qquad M_j \text{ barre } M_i \quad \Rightarrow \quad j > i.$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, si M_j barre M_i, on a

(7) $$(j-i)(b+1)-(a+1)(h(j)-h(i)) \geqq jh(j)-ih(i).$$

D'autre part, si M_j barre M_i, on a aussi : $M_j < M_i$ soit :

$$2^j 3^{-h(j)} N < 2^i 3^{-h(i)} N,$$

c'est-à-dire

$$2^{j-i} 3^{h(i)-h(j)} N < N.$$

Comme N est 2-h. c. cela entraîne

$$d(2^{j-i} 3^{h(i)-h(j)} N) < d(N),$$

ce qui donne :

(8) $$(j-i)(b+1)-(a+1)(h(j)-h(i)) < (j-i)(h(j)-h(i)).$$

Les inégalités (7) et (8) donnent :

$$jh(j)-ih(i) < (j-i)(h(j)-h(i)),$$
$$ih(j)+jh(i) < 2\,ih(i),$$

et donc :

Si i fixé et $i > 0$, on peut regarder le membre de gauche comme une fonction croissante en j et l'inégalité entraîne que $j < i$.

Si i fixé et $i < 0$, on peut regarder le membre de droite comme une fonction décroissante en j et l'inégalité entraîne que $j > i$.

LEMME 4.

$$Si \quad i > 0, \qquad M_i \text{ barré} \quad \Rightarrow \quad M_{i+1} \text{ barré},$$
$$Si \quad i < 0, \qquad M_i \text{ barré} \quad \Rightarrow \quad M_{i-1} \text{ barré}.$$

Démonstration. — Premier cas, $i > 0$. Si M_i est barré, ce qui veut dire qu'il n'est pas 2-h. c., il est barré par un nombre n, vérifiant $2^a 3^b \leqq n < M_i$ (lemme 1, iv). On peut donc écrire $n = M_j$. Nous avons

$$d(M_{i+1}) = d(M_i)-(h(i+1)-h(i))(a+i+1)+b+1-h(i+1).$$

On pose

$$\tilde{M}_j = 2^{a+j+1}\, 3^{b-h(j)+h(i)-h(i+1)},$$

et l'on a

$$d(\tilde{M}_j) = d(M_j)-(h(i+1)-h(i))(a+j+1)+b-h(j)+1+h(i)-h(i+1).$$

Or, d'après le lemme 3, on a : $j < i$ et $h(j) \leqq h(i)$. Comme $d(\mathrm{M}_j) \geqq d(\mathrm{M}_i)$ on déduit $d(\tilde{\mathrm{M}}_j) \geqq d(\mathrm{M}_i)$.

D'autre part :

$$\mathrm{M}_{i+1} = \tilde{\mathrm{M}}_j 2^{i-j} 3^{h(j)-h(i)} = \tilde{\mathrm{M}}_j \frac{\mathrm{M}_i}{\mathrm{M}_j} > \tilde{\mathrm{M}}_j,$$

et $\tilde{\mathrm{M}}_j$ barre M_{i+1}.

Deuxième cas, $i < 0$. La démonstration est identique en prenant

$$\tilde{\mathrm{M}}_j = 2^{a+j-1} 3^{b-h(j)+h(i)-h(i+1)}.$$

Démonstration du théorème 1. — On définit i_0 comme le plus petit entier (vérifiant $h(i_0) \leqq b$) tel que M_{i_0} soit 2-h. c. et M_{i_0+1} ne le soit pas. On a $i_0 \geqq 0$. On définit de même i'_0 comme le plus petit entier (vérifiant $i'_0 \leqq a$) tel que $\mathrm{M}_{-i'_0}$ soit 2-h. c. et $\mathrm{M}_{-i'_0-1}$ ne le soit pas. On a $i'_0 \geqq 0$. L'ensemble des nombres 2-h. c. compris entre N et 3 N est d'après le lemme 4, l'ensemble des M_i avec $-i'_0 \leqq i \leqq i_0$.

Maintenant, de la relation : $\mathrm{N} \leqq \mathrm{M}_i < 3\,\mathrm{N}$ et de $\mathrm{M}_i = 2^i 3^{-h(i)}\,\mathrm{N}$, on déduit la relation :

$$\log \frac{\mathrm{M}_i}{\mathrm{N}} = (\log 3)\{i\theta\},$$

qui montre que les M_i sont rangés comme $\{i\theta\}$.

3. Démonstration du théorème 2

Proposition 3. — *Soit* $\mathrm{N} = 2^a 3^b$ *un nombre 2-h. c. Soit* i_0 *et* i'_0 *fournis par le théorème* 1. *On pose* (*cf.* prop. 1) :

$$q = p.g.d.p.(i_0 + i'_0 + 1) \text{ et } q' = p.g.d.i.(i_0 + i'_0 + 1)$$

et p et p' les numérateurs associés. On a alors :

$$\text{(A)} \qquad i_0 p + q[i_0\theta] < (b+1)q - (a+1)p + pq,$$

$$\text{(A')} \qquad i'_0 p' - q'[-i'_0\theta] < (a+1)p' - (b+1)q' + p'q',$$

$$\text{(B)} \qquad (b+1)q - (a+1)p + pq < (i_0+1)p + q[(i_0+1)\theta],$$

$$\text{(B')} \qquad (a+1)p' - (b+1)q' + p'q' < (i'_0+1)p' - q'[-(i'_0+1)\theta],$$

et les inégalités (A) *et* (A') *sont encore valables pour* $q = p.\ g.\ d.\ p.\ (i_0 + i'_0)$ *et* $q' = p.\ g.\ d.\ i.\ (i_0 + i'_0)$.

Démonstration. — On écrit que M_{i_0} qui est 2-h. c. n'est barré par aucun nombre et en particulier par M_{i_0-q}. Le lemme de barrage (lemme 2) donne :

$$-q(b+1)-(a+1)([(i_0-q)\theta]-[i_0\theta]) < (i_0-q)[(i_0-q)\theta]-i_0[i_0\theta].$$

Pour $i_0 \geqq 1$, la formule (6) donne, puisque $i_0 \leqq i_0+i'_0+1$

$$[(i_0-q)\theta]=[i_0\theta]-p,$$

et l'on obtient (A).

Pour $i_0 = 0$, (A) se prouve en écrivant que N, qui est 2-h. c. n'est pas barré par $2^{-q}\,3^p$ N.

Il reste à étudier la possibilité que $M_{i_0-q} = 2^{a+i_0-q}\,3^{b-[(i_0-q)\theta]}$ ne soit pas un nombre entier. Comme $M_{-i'_0}$ est un nombre entier, cela entraîne $q = i_0+i'_0+1$ et $a = i_0$. Dans ce cas, (A) se réduit à

$$(q-a-1)p+q[i_0\,\theta] < (b+1)q-(a+1)p+pq,$$

c'est-à-dire $[i_0\,\theta] < (b+1)$, ce qui est vrai puisque M_{i_0} est un nombre entier.

L'inégalité (A′) se démontre de la même manière en écrivant que $M_{-i'_0}$, qui est 2-h. c. n'est pas barré par $M_{q'-i'_0}$.

L'inégalité (B) s'obtient en écrivant que M_{i_0+1} n'est pas 2-h. c. donc il est barré par le nombre 2-h. c. qui le précède (lemme 1). Si l'on range les nombres M_i pour $-i'_0 \leqq i \leqq i_0+1$, ces nombres sont rangés comme $\{i\theta\}$, et le prédécesseur de M_{i_0+1} est (par la proposition 2) M_{i_0+1-q}. Le lemme de barrage donne alors :

$$\begin{aligned}-q(b+1)-(a+1)([(i_0+1-q)\theta]&\\ -[(i_0+1)\theta]) &\geqq (i_0+1-q)[(i_0+1-q)\theta]-(i_0+1)[(i_0+1)\theta].\end{aligned}$$

Mais, par la formule (6), puisque $1 \leqq i_0+1 \leqq q$, on a

$$[(i_0+1-q)\theta]=[(i_0+1)\theta]-p,$$

et l'on obtient (B).

On constate que la formule (B) est encore vérifiée même si M_{i_0+1} n'est pas un nombre entier, c'est-à-dire si $[(i_0+1)\,\theta] > b$.

Enfin, on démontre (B′) en écrivant que $M_{-i'_0-1}$ est barré par $M_{q'-i'_0-1}$.

MINORATION DE $\mathscr{C}$ (N). — Soit $N = 2^a\,3^b$ un nombre 2-h. c.; on pose $\mathscr{C}(N) = i_0+i'_0+1$ le nombre de nombres 2-h. c. appartenant à l'intervalle [N, 3 N[. On définit

$$q = \text{p.g.d.p.}(i_0+i'_0+1) \qquad \text{et} \qquad q' = \text{p.g.d.i.}(i_0+i'_0+1).$$

La proposition (3) s'applique; en multipliant (B) par q' et (B′) par q, et en ajoutant, il vient :

$$\begin{aligned}(9)\qquad &(a+1)(p'q-pq')\\ &+qq'(p+p') < (i_0+1)pq'+(i'_0+1)p'q+qq'([(i_0+1)\theta]-[-(i'_0+1)\theta]).\end{aligned}$$

Compte tenu de : $p'q - pq' = 1$ [formule (2)],
de

$$p = q\theta - \|q\theta\|, \quad \text{de } p' = q'\theta + \|q'\theta\| \quad \text{et de } [x] = x - \{x\},$$

(9) devient :

$$(a+1) < \theta qq'(2i_0+2i'_0+4-q-q') - (i_0+1) + q\|\theta q'\|(i_0+i'_0+2) + qq'\mathrm{R},$$

avec :

$$\mathrm{R} = \{-(i'_0+1)\theta\} - \{(i_0+1)\theta\} + \|\theta q\| - \|\theta q'\|.$$

On majore R de la façon suivante : par définition du p. g. d. p., on a

$$\|\theta q\| \leqq \{(i'_0+1)\theta\},$$

d'où l'on tire :

$$\{-(i'_0+1)\theta\} = 1 - \{(i'_0+1)\theta\} \leqq 1 - \|\theta q\|,$$

et

$$\mathrm{R} \leqq 1 - \|\theta q'\|.$$

On sait aussi que

$$i_0 + i'_0 + 2 \leqq q + q', \text{ [formule (5)]}.$$

On a donc :

$$(a+1) < \theta qq'(2i_0+2i'_0+4-q-q') + q\|\theta q'\|(q+q') + qq'(1-\|\theta q'\|),$$

et comme $q\|\theta q'\| < 1$, on obtient :

(10) $$a+1 < \theta qq'(2i_0+2i'_0+4-q-q') + q + qq'.$$

D'autre part, $\varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N})) = \theta qq'(2i_0+2i'_0+2-q-q')$ et par la convexité de φ, $\varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N})+u) \geqq \varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N})) + 2\theta qq'u$.

L'inégalité (10) implique donc :

(11) $$(a+1) < \varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N})+1) + 2qq' < \varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N})+2{,}6).$$

Comme la fonction φ est croissante, on obtient :

$$\mathscr{C}(\mathrm{N}) > x_a - 2{,}6.$$

Pour $a \geqq 345 > \varphi(12{,}6)$, on a donc $\mathscr{C}(\mathrm{N}) > 10$; soit $\mathscr{C}(\mathrm{N}) \geqq 11$ d'où $q' \geqq 11$ et

$$qq' + q = qq'\left(1 + \frac{1}{q'}\right) \leqq qq'\frac{12}{11} \leqq 0{,}87(2\theta qq').$$

D'où l'on a, pour $a \geqq 345$,

$$\mathscr{C}(\mathrm{N}) > x_a - 1{,}87 > x_a - 2.$$

MAJORATION DE $\mathscr{C}$ (N). — La majoration est un peu plus délicate à cause de la convexité de φ. Il faut étudier soigneusement ce qui se passe au voisinage des abscisses de changement de pente de φ..

Nous supposons $a \geqq 345$ de sorte que $\mathscr{C}$ (N) $\geqq 11$. On remarque d'abord que tout entier assez grand, et en particulier $\mathscr{C}$ (N) peut s'écrire en fonction des dénominateurs de convergents principaux de θ, sous la forme :

$$\mathscr{C}(\mathrm{N}) = (r+1)\,q_m + q_{m-1} + k \qquad \text{avec} \quad r \geqq 0, \quad m \geqq 0, \quad 0 \leqq k \leqq q_m - 1. \tag{12}$$

Nous allons distinguer 3 cas : le cas général, $2 \leqq k$, puis $k = 1$ et enfin $k = 0$. Nous supposerons pour simplifier que m est pair, de sorte que l'on a

$$q = \text{p. g. d. p.}(\mathscr{C}(\mathrm{N})) = q_m,$$

et

$$q' = \text{p. g. d. i.}(\mathscr{C}(\mathrm{N})) = (r+1)\,q_m + q_{m-1}.$$

(1) $k \geqq 2$. Le calcul est du même type que pour la minoration. On multiplie (A) par q', (A') par q et on ajoute, il vient :

$$i_0\, p q' + i'_0\, p' q + q q' ([\, i_0\, \theta\,] - [\, -i'_0\, \theta\,]) < (a+1)(p' q - p q') + q q' (p + p'),$$

et ensuite :

$$\theta q q' (2\, i_0 + 2\, i'_0 - q - q') + i'_0 - q' \,\|\, \theta\, q \,\|\, (i_0 + i'_0) + q q' \,\mathrm{R} < a + 1, \tag{13}$$

avec

$$\mathrm{R} = \{\, -i'_0\, \theta\,\} - \{\, i_0\, \theta\,\} + \|\, \theta\, q \,\| - \|\, \theta\, q' \,\|. \tag{14}$$

Si $i_0 \neq 0$ (et pour $i_0 = 0$, de façon évidente) on a par la définition du p. g. d. i. :

$$\{\, i_0\, \theta\,\} \leqq 1 - \|\, \theta\, q' \,\|,$$

ce qui assure :

$$-1 + \|\, \theta\, q \,\| < \mathrm{R}.$$

On en déduit :

$$\theta\, q q' (2\, i_0 + 2\, i'_0 - q - q') - q' \,\|\, \theta\, q \,\|\, (q + q') + q q' (-1 + \|\, \theta\, q \,\|) < a + 1.$$

et comme $q' \,\|\, \theta\, q \,\| < 1$ [formule (4)], on a

$$\theta\, q q' (2\, i_0 + 2\, i'_0 - q - q') - q' - q q' < a + 1.$$

Maintenant,

$$\varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N}) - 1) = \theta\, q q' (2\, i_0 + 2\, i'_0 - q - q'),$$

et comme $k \geqq 2$,

$$\varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N}) - 2) = \varphi(\mathscr{C}(\mathrm{N}) - 1) - 2\,\theta\, q q',$$

et φ est linéaire entre $\mathscr{C}(N)-2$ et $\mathscr{C}(N)$. Lorsque $a \geqq 345$, $\mathscr{C}(N) \geqq 11$ d'où $q \geqq 8$ et

$$q'+qq' = qq'\left(1+\frac{1}{q}\right) \leqq \frac{9}{8}qq' \leqq 0,9(2\theta qq'),$$

d'où :

$$\mathscr{C}(N) < x_a+1,9.$$

(2) $k = 1$. Le calcul est identique, jusqu'au calcul de R (14) que l'on peut ici minorer plus finement :

Comme on a

$$\mathscr{C}(N) = q'+1 = i_0+i'_0+1, \qquad d'ou \quad q' = i_0+i'_0,$$

il vient :

(15) $$\{i_0\theta\}+\{i'_0\theta\} = 1-\|\theta q'\|,$$

et

$$R = 1-\{i'_0\theta\}-\{i_0\theta\}+\|\theta q\|-\|\theta q'\| > \|\theta q\|,$$

(13) devient alors :

$$\varphi(\mathscr{C}(N)-1)-q'^2\|\theta q\|+qq'\|\theta q\| < a+1,$$

et comme $q'\|\theta q\| < 1$ [formule (4)],

(16) $$\varphi(\mathscr{C}(N)-1)-(q'-q) < a+1.$$

Pour $0 < u < 1$, $\varphi(\mathscr{C}(N)-1-u) = \varphi(\mathscr{C}(N)-1)-2\theta q(q'-q)u$ ce qui entraîne pour $q \geqq 8$:

$$\mathscr{C}(N) < x_a+1+\frac{1}{16\theta} < x_a+1,1.$$

Dans le cas où la formule (12) donnerait une valeur impaire de m, (15) deviendrait :

$$\{i_0\theta\}+\{i'_0\theta\} = 1+\|\theta q\|,$$

et (16) deviendrait :

$$\varphi(\mathscr{C}(N)-1)-(q'+q) < a+1,$$

ce qui assure encore : $\mathscr{C}(N) < x_a+1,9$.

(3) $k = 0$. On a maintenant

$$\mathscr{C}(N) = q', \qquad \text{soit} \quad i_0+i'_0 = q'-1.$$

La proposition 3 dit que (A') est encore valable si l'on remplace q' par p. g. d. i. $(i_0+i'_0)$ qui vaut ici $(q'-q)$ et p' sera remplacé par $p'-p$. En faisant ce remplacement jusqu'à (13), on obtient :

(17) $$\theta q(q'-q)(2i_0+2i'_0-q-(q'-q))+i'_0 \\ -(q'-q)\|\theta q\|(i_0+i'_0)+q(q'-q)R < a+1,$$

avec :

$$R = \{-i'_0\theta\} - \{i_0\theta\} + \|\theta q\| - \|\theta(q'-q)\|.$$

Comme $(q'-q)$ = p. g. d. i. $(i_0+i'_0)$ on minore R comme en (14) :

$$-1+\|\theta q\| < R.$$

Maintenant, comme $q \geqq 2$, pour $0 < u < 1$,

$$\varphi(\mathscr{C}(N)-1-u) = \theta q(q'-q)(2i_0+2i'_0-q')-2u\theta q(q'-q),$$

et (17) donne

$$\varphi(\mathscr{C}(N)-1)-(q'-q)\|\theta q\|q'+q(q'-q)(-1+\|\theta q\|) < a+1,$$

$$\varphi(\mathscr{C}(N)-1)-(q'-q)-q(q'-q) < a+1.$$

Le membre de gauche s'écrit $\varphi(\mathscr{C}(N)-1-u)$ avec

$$u = \frac{1}{2\theta}\,\frac{(q'-q)(q+1)}{q(q'-q)} = \frac{1}{2\theta}\,\frac{q+1}{q} \leqq \frac{9}{16\theta} < 0{,}9 \qquad \text{pour} \quad q \geqq 8.$$

Et l'on obtient encore :

$$\mathscr{C}(N) \leqq x_a+1{,}9.$$

Dans le cas où la formule (12) donnerait une valeur impaire de m, ce qui se produirait pour $\mathscr{C}(N) \geqq 27$, on aurait un calcul similaire.

4. Calcul de i_0 et i'_0

PROPOSITION 4. — *Soit* $N = 2^a 3^b$ *un nombre 2-h. c. tel que* $a \geqq 345$. *Soit* i_0 *et* i'_0 *fournis par le théorème* 1. *On pose* (*cf.* prop. 1) *:*

$$q = \text{p.g.d.p.}(i_0+i'_0+1),$$

et

$$q' = \text{p.g.d.i.}(i_0+i'_0+1),$$

$$\delta = b+1-(a+1)\theta,$$

et p *et* p' *les numérateurs associés. On a alors :*

$$2i_0 = (a+1)\frac{\|\theta q\|}{\theta q}+q+\frac{\delta}{\theta}+\gamma \qquad \textit{avec} \quad |\gamma| < 2, \tag{18}$$

$$2(i'_0+1) = (a+1)\frac{\|\theta q'\|}{\theta q'}+q'-\frac{\delta}{\theta}+\gamma' \qquad \textit{avec} \quad |\gamma'| < 2. \tag{19}$$

Démonstration. — En divisant, dans la proposition 3, (A) et (B) par q, on obtient :

$$i_0 \frac{p}{q} + [i_0 \theta] < (b+1-(a+1)\frac{p}{q} + p < (i_0+1)\frac{p}{q} + [(i_0+1)\theta].$$

En écrivant : $p = q\theta - \|\theta q\|$, le terme central devient :

$$(b+1)-(a+1)\theta+(a+1)\frac{\|\theta q\|}{q} + q\theta - \|\theta q\|.$$

Le majorant devient :

$$(i_0+1)\frac{p}{q} + [(i_0+1)\theta]$$

$$= 2(i_0+1)\theta - \frac{(i_0+1)\|\theta q\|}{q} - \{(i_0+1)\theta\} \leqq 2(i_0+1)\theta - \|\theta q\|,$$

en tenant compte de : $\|\theta q\| \leqq \{(i_0+1)\theta\}$.

Le minorant devient :

$$i_0 \frac{p}{q} + [i_0\theta] \geqq i_0\theta - \frac{i_0\|\theta q\|}{q} + i_0\theta - 1 \geqq 2 i_0 \theta - 2\theta,$$

en tenant compte de

$$\frac{i_0\|\theta q\|}{q} \leqq \frac{q+q'}{qq'} \leqq 2\theta - 1,$$

pour $(a+1) \geqq 345$.

Tout cela démontre la relation (18). La relation (19) se démontre de même.

PROPOSITION 5. — *Soit* $N = 2^a 3^b$ *un nombre 2-h. c. avec* $a \geqq 345$. *Soit* x_a *défini par* $(a+1) = \varphi(x_a)$. *Soit*

$$Q = p.g.d.p.([x_a]) \qquad \textit{et} \qquad Q' = p.g.d.i.([x_a]).$$

On a alors :

$$2 i_0 = (a+1)\frac{\|\theta Q\|}{\theta Q} + Q + \frac{\delta}{\theta} + \gamma \qquad \textit{avec} \quad |\gamma| < 2,$$

$$2(i_0'+1) = (a+1)\frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} + Q' - \frac{\delta}{\theta} + \gamma' \qquad \textit{avec} \quad |\gamma'| < 2.$$

Démonstration. — Compte tenu du théorème 1, on aura très fréquemment $Q = q$ et $Q = q'$ et la proposition 4 donne alors le résultat. Il reste à envisager le cas où x_a s'écrit :

$$x_a = (r+1) q_m + q_{m-1} + \eta \qquad \text{avec} \quad r \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad |\eta| < 2.$$

On supposera m pair; pour m impair, on aurait une démonstration analogue. On aura alors $Q = q = q_m$.

Supposons que l'on ait

$$i_0 + i'_0 + 1 = \mathscr{C}(N) < x_a. \tag{20}$$

D'après la définition de Q et Q', on a

$$a+1 = \varphi(x_a) = \theta QQ'(2x_a - Q - Q'),$$

et compte tenu de :

$$\frac{\|\theta Q\|}{Q} + \frac{\|\theta Q'\|}{Q'} = \frac{1}{QQ'}, \quad \text{(formule 3)},$$

on en déduit :

$$(a+1)\frac{\|\theta Q\|}{\theta Q} + Q + (a+1)\frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} + Q' = 2x_a,$$

et cela nous donne la majoration :

$$2(i'_0+1) < 2x_a - 2i_0 < 2x_a - (a+1)\frac{\|\theta Q\|}{\theta Q} - Q - \frac{\delta}{\theta} + 2$$

$$< (a+1)\frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} + Q' - \frac{\delta}{\theta} + 2.$$

Pour la minoration, si $q' \neq Q'$, on a : $q' = Q' - q$, et d'autre part :

$$\frac{\|\theta q\|}{q} + \frac{\|\theta q'\|}{q'} = \frac{1}{qq'}, \quad [\text{formule}(3)].$$

Cela nous donne, compte tenu de $\varphi(x_a) = \theta\, q\, Q'(2x_a - Q' - q)$:

$$(a+1)\frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} + Q' = (a+1)\frac{\|\theta q'\|}{\theta q'} + q' + \frac{\varphi(Q') - \varphi(x_a)}{Q'q'}.$$

La fonction φ est croissante, et $Q' < x_a$ donc :

$$2(i'_0+1) > (a+1)\frac{\|\theta q'\|}{\theta q'} + q' - \frac{\delta}{\theta} - 2 > (a+1)\frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} - \frac{\delta}{\theta} - 2.$$

Ce qui achève la démonstration dans l'hypothèse (20).

Pour $i_0 + i'_0 + 1 > x_a$, on procèderait de même.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES. — Soit $a = 11\,000$, $b = 6\,940$. $N = 2^a 3^b$ est 2-h. c. s. par (1). On calcule x_a : 39,98, d'où, sans ambiguïté,

$$Q = q = 27, \qquad p = 17,$$

$$Q' = q' = 19, \qquad p' = 12.$$

La proposition 4 donne alors :

$$2\,i_0 = 49{,}89+\gamma, \qquad \text{soit} \quad i_0 = 24 \text{ ou } 25,$$

$$2(i'_0+1) = 30{,}08+\gamma', \qquad \text{soit} \quad i'_0 = 14 \text{ ou } 15.$$

On précise alors la valeur de i_0 et i_0 par la proposition 3.

On a

$$(b+1)\,q-(a+1)\,p+pq = 849,$$

et

$$25\,p+q\,[25\,\theta] = 830 < 849, \qquad \text{donc} \quad i_0 = 25 \text{ par (A) et (B).}$$

De même

$$(a+1)\,p'-(b+1)\,q'+p'\,q' = 361,$$

et

$$15\,p'-q'\,[-15\,\theta] = 370 > 361 \qquad \text{donc} \quad i'_0 = 14.$$

On a alors, suivant la proposition 2, la table des nombres 2-h. c. à partir de N :

$$(a,\,b) = (11\,000,\,6\,940); \quad (11\,008,\,6\,935); \quad (10\,989,\,6\,947);$$

$$(11\,016,\,6\,930); \quad (10\,997,\,6\,942); \quad \text{etc.}$$

Remarque. — Pour les petites valeurs de a ($a < 345$) on peut dresser la table des nombres 2-h. c. par la programmation « sandwich » par exemple (*cf.* [6]).

5. Estimation de Q (X)

PROPOSITION 6. — *Soit* Q (X) *le nombre de nombres* 2-*h. c.* $\leqq$ X. *On a*

(i)
$$Q(X) \geqq c\,(\log X)^{4/3},$$

(ii)
$$\liminf \frac{\log Q(X)}{\log\log X} = \frac{4}{3},$$

(iii)
$$\limsup \frac{\log Q(X)}{\log\log X} = 1+\frac{l}{2\,l+1}$$

où

$$l = \limsup_k \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k}.$$

Démonstration. — Nous allons d'abord encadrer la fonction φ :

LEMME 5. — *On a*

$$\varphi(x) = \theta\,qq'\,(2\,x-q-q') \leqq \theta\,x^3, \tag{21}$$

et pour

$$2q_k+q_{k-1} \leqq x < 2q_{k+1}+q_k,$$

on a

$$\varphi(x) \geqq \frac{\theta}{2} q_k x^2. \tag{22}$$

Démonstration du lemme. — La majoration (21) est évidente, compte tenu de

$$q = \text{p. g. d. p. } ([x]), \text{ de } q' = \text{p. g. d. i. } ([x]) \text{ et de } (5).$$

Pour la minoration, considérons deux cas :

Premier cas, $2q_k+q_{k-1} \leqq x < q_{k+1}+q_k$. On écrit alors :

$$x = (r+\xi)q_k+q_{k-1} \qquad \text{avec} \quad r \text{ entier et } 0 \leqq \xi < 1.$$

On a alors :

$$\varphi(x) = \theta q_k(x-\xi q_k)(2x-q_k-(x-\xi q_k)) \geqq \theta q_k(x-q_k)x,$$

et comme

$$\frac{x-q_k}{x} \geqq 1-\frac{q_k}{x} \geqq \frac{1}{2},$$

on obtient (22).

Deuxième cas, $q_{k+1}+q_k \leqq x < 2q_{k+1}+q_k$. On écrit alors :

$$x = (1+\xi)q_{k+1}+q_k \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq \xi < 1,$$

et

$$\varphi(x) = \theta q_{k+1}(q_{k+1}+q_k)(2x-q_{k+1}-q_{k+1}-q_k),$$

et comme $x \leqq (2+\xi)q_{k+1}$ et $x \leqq (1+\xi)(q_{k+1}+q_k)$, on a

$$\varphi(x) \geqq \theta x^2 q_k \frac{1+2\xi}{(2+\xi)(1+\xi)} \geqq \frac{\theta}{2} x^2 q_k.$$

Pour étudier Q (X) nous allons utiliser les nombres 2-h. c. s. c'est-à-dire les nombres $2^a 3^b$ vérifiant la formule (1). Les premiers nombres 2-h. c. s. sont : 2, 2.3, $2^2.3$, $2^3.3$, $2^3.3^2$, $2^4.3^2$, $2^5.3^2$, $2^6.3^2$, $2^6.3^3$, etc.

Pour chaque valeur de b, on choisit un nombre N_b, 2-h. c. s. de la forme $2^{a_b}3^b$. Il est clair que la suite N_b vérifie $N_{b+1} \geqq 3N_b$. La formule (1) entraîne que pour N assez grand, $a = b/\theta+O(1)$. Et le théorème 1 dit qu'entre N_b et $3N_b$ il y a $\mathscr{C}(N_b)$ nombres 2-h. c. avec $|\mathscr{C}(N_b)-\varphi^{-1}(a+1)| \leqq 2$. Pour $b \geqq b_0$, on aura donc :

$$\mathscr{C}(N_b) \geqq \frac{(a+1)^{1/3}}{\theta} - 2 \geqq \lambda b^{1/3},$$

en majorant $\varphi(x)$ par (21). On aura ensuite pour $b_1 > b_0$:

$$Q(N_{b_1}) - Q(N_{b_0}) \geqq \sum_{b_0 \leqq b \leqq b_1 - 1} \lambda b^{1/3} \geqq \int_{b_0 - 1}^{b_1 - 2} \lambda t^{1/3} \, dt.$$

Quand $X \to \infty$, soit N_{b_1} immédiatement inférieur à X, on a

$$b_1 \sim \frac{\log X}{2 \log 3}$$

et on en déduit $Q(X) \geqq c (\log X)^{4/3}$ ce qui démontre (i).

Désignons maintenant par $N_i = 2^{a_i} 3^{b_i}$ la suite de tous les nombres 2-h. c. s. Le nombre des $N_i \leqq X$ est O (log X). Remarquons maintenant que si θ est de type constant (c'est-à-dire si les coefficients a_i de son développement en fraction continue sont majorés), on a $q_{k+1} = O(q_k)$ et (22) et (23) entraînent $\varphi(x) \geqq c x^3$ pour une valeur de $c > 0$. On a encore $\varphi(x) \geqq c x^3$ si l'on choisit x tel que $2 q_k + q_{k-1} \leqq x < 3 q_k + q_{k-1}$. Pour un tel x on considère un nombre 2-h. c. s. $X = 2^a 3^b$, avec $a+1 = \varphi(x)$, on a alors :

$$Q(X) \leqq \sum_{N_i \leqq X} \mathscr{C}(N_i) \leqq \sum_{N_i \leqq X} (\varphi^{-1}(a_i + 1) + 2),$$

$$Q(X) \leqq \operatorname{Card}\{N_i \leqq X\} (\varphi^{-1}(a+1) + 2). \tag{23}$$

On obtient alors $Q(X) = O(\log X)^{4/3}$ ce qui avec (i) donne (ii).

Montrons maintenant (iii). Soit

$$l = \limsup \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k}.$$

On a donc pour tout k, $q_{k+1} \leqq c_\varepsilon (q_k)^{l+\varepsilon}$ et cela entraîne, par (22) $\varphi(x) \geqq c x^{2+1/(l+\varepsilon)}$. L'inégalité (23) donne alors :

$$Q(X) = 0 (\log X)^{1 + 1/[2 + [1/(l+\varepsilon)]]}.$$

Réciproquement soit une sous-suite de valeurs de k telle que $\log q_{k+1}/\log q_k$ soit voisin de l. Pour $q_{k+1}/2 < x < q_{k+1}$, on a

$$\frac{\theta}{2} q_k x^2 < \varphi(x) < \theta q_k x^2.$$

On considère alors la famille $N_b = 2^{a_b} 3^b$ de nombres 2-h. c. s. ayant servi à la minoration de Q (X), pour les valeurs de b vérifiant :

$$\left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) q_k q_{k+1}^2 < b < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) q_k q_{k+1}^2.$$

Par la formule (1), on a

$$\varphi\left(\frac{1}{2} q_{k+1}\right) < \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) \theta q_k q_{k+1}^2 < a_b + 1 < \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \theta q_k q_{k+1}^2 < \varphi(q_{k+1}),$$

d'où il vient :

$$\frac{1}{2} q_{k+1} < x_a = \varphi^{-1}(a_b+1) < q_{k+1},$$

et par le théorème 2 :

$$\mathscr{C}(N_b) > \frac{1}{2} q_{k+1} - 2.$$

En posant $X = \exp(q_k q_{k+1}^2)$, on a alors :

$$Q(X) \geqq \left(\frac{1}{2} q_{k+1} - 2\right)\left(\frac{1}{4} - 2\varepsilon\right) q_k q_{k+1}^2,$$

ce qui entraîne

$$\limsup \frac{\log Q(X)}{\log\log X} \geqq 1 + \frac{l}{2l+1}.$$

Remarque. — Les résultats de Baker et Feldman (*cf.* [5], p. 117) montrent qu'on peut majorer l de façon effective mais par un majorant assez grand.

TABLES NUMÉRIQUES

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	Q	Q'
2	1,26	11	166,57	8	11
3	3,79	19	1054,91	8	19
4	11,36	27	2 589,34	27	19
5	18,93	46	14 888,68	46	19
6	37,86	65	35 843,12	65	19
7	56,78	84	65 452,65	65	84
8	75,71	149	513 286,59	149	84
9	106,00	233	1 839 935,01	233	84
10	136,28	317	3 914 492,61	317	84
—	—	401	6 736 959,39	401	84
—	—	485	10 307 335,34	485	84
—	—	569	14 645 620,47	485	569

Pour $x \geqq 11$, la table n'indique que les valeurs de x où la fonction φ change de pente. Les colonnes Q et Q' indiquent respectivement p. g. d. p. (x) et p. g. d. i. (x).

Exemple.

$$x = 40; \quad Q = 27; \quad Q' = 19,$$

$$\varphi(x) = \theta.27.19(2.40-27-19)$$

$$= 2\,589{,}34 + \frac{13}{19}(14\,888{,}68 - 2\,589{,}34) = 11\,004{,}68.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BESSI, *Étude des nombres 2-hautement composés, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux*, 1974-1975, exposé n° 20.

[2] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4e éd., Oxford, at the Clarendon Press, 1960.

[3] KUYPERS et NIEDERREITER, *Uniform Distribution of Sequences* (*Interscience tracts*, John Wiley and Sons, New York, 1974).

[4] S. LANG, *Introduction to Diophantine Approximations* (Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1966).

[5] J. L. NICOLAS, *Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan* (*Can. J. Maths*, vol. XXIII, n° 1, 1971, p. 116-130).

[6] J.-L. NICOLAS, *Algorithmes d'optimisation en nombres entiers* (*Soc. Math. France, Astérisque*, 38-39, 1976, p. 169-182).

[7] O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, New York, Chelsea.

[8] S. RAMANUJAN, *Highly Composite Numbers* (*Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, 14, 1915, p. 347-400, *Collected Papers*, p. 78-128).

[9] N. SLÄTER, *Gaps and Steps for the Sequence n* θ *mod.* 1 (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1967, 63, p. 1115-1123).

[10] R. TIJDEMAN et H. G. MEIJER, *On Integers generated by a Finite Number of Fixed Primes* (*Compositio Mathematica*, vol. 29, fasc. 3, 1974, p. 273-286).

(Manuscrit reçu le 31 Mai 1976.)

G. BESSI et J.-L. NICOLAS,
Département de Mathématiques,
Université de Limoges,
123, rue Albert-Thomas,
87100 Limoges.