

## RÉPARTITION DES NOMBRES HAUTEMENT COMPOSÉS DE RAMANUJAN

JEAN-LOUIS NICOLAS

**1. Introduction.** On dit qu'un nombre entier  $A$  est hautement composé si tout nombre  $M$  plus petit que  $A$  a moins de diviseurs que  $A$ . Si l'on définit  $d(n)$  = nombre de diviseurs de  $n$ , on sait que, si la décomposition en facteurs premiers de  $n$  est  $n = \prod_i p_i^{a_i}$ , on a:

$$d(n) = \prod_i (a_i + 1).$$

La définition devient:  $A$  est hautement composé si et seulement si:

$$(1) \quad M < A \Rightarrow d(M) < d(A).$$

Ramanujan [8] a défini et étudié les nombres hautement composés, démontrant les propriétés suivantes:

Si  $A = 2^{a_2} 3^{a_3} \dots p_k^{a_{p_k}}$  est un nombre hautement composé, on a:

$$(2) \quad a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{p_k}$$

et à l'exception de  $A = 4$  et  $A = 36$ , on a:  $a_{p_k} = 1$  [8, §8].

Soit  $p = p_k$  le plus grand nombre premier divisant  $A$ , soit  $\lambda$  un nombre premier plus petit que  $p$ , Ramanujan donne des formules permettant de déterminer  $a_\lambda$  à une unité près lorsque  $\lambda$  est grand, et donnant un équivalent de  $a_\lambda$  lorsque  $\lambda$  est petit [8, §§18-24].

Le quotient de deux nombres hautement composés consécutifs tend vers 1, et  $Q(X)$ , le nombre de nombres hautement composés inférieurs à  $X$ , vérifie: [8, § 28]

$$(3) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{Q(X)}{\log X} = +\infty.$$

Enfin, Ramanujan définit les nombres hautement composés supérieurs [8, § 32] dont nous rappelons la définition et les propriétés un peu plus loin et qui sont à la base des résultats obtenus dans cet article.

En utilisant principalement le résultat de Ingham [4] affirmant que pour  $5/8 \leq \tau \leq 1$ , on a:

$$(4) \quad \pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x^\tau}{\log x}$$

---

Reçu le 7 avril 1970. L'auteur de cet article a reçu l'octroi n° A 7201 du Conseil National de recherches du Canada.

où  $\pi(x)$  désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à  $x$ , Erdős et Alaoglu ont donné [1, *Theorem 13*] une formule permettant de déterminer  $a_\lambda$  à une unité près quel que soit  $\lambda$ , et Erdős a amélioré la formule (3) en montrant [2]:

$$(5) \quad Q(X) \geq (\log X)^{1+c}$$

avec  $c = \frac{1}{4}(1 - \tau) \leq 3/32$ .

L'objet de cet article est d'étudier la répartition des nombres hautement composés entre deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Nous montrerons que ce problème est lié à celui des approximations diophantiennes du nombre  $\theta = \log(3/2)/\log 2$  et plus précisément à l'étude des formes linéaires à coefficients entiers  $\sum u_k \theta_k$ , avec  $\theta_k = \log(1 + 1/k)/\log 2$ . Le récent théorème de Feldmann [3] améliorant les travaux de Baker sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, nous dit qu'il existe des constantes  $c$  et  $\kappa$  telles que l'on ait:  $|q\theta - p| > c/q^\kappa$  pour tous  $p, q$  entiers. Cela nous permettra de montrer que:  $Q(X) \leq (\log X)^{c'}$  (théorème 4).

Nous améliorerons les résultats de Erdős et Alaoglu sur le calcul des exposants  $a_\lambda$  (théorème 2) et nous augmenterons légèrement la constante  $c$  de la formule (5). Finalement nous conjecturons que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log Q(X)}{\log \log X} = 1 + \frac{\log(3/2) + \log(5/4)}{4 \log 2} = 1.277 \dots$$

**2. Nombres hautement composés supérieurs.** On dit que  $N$  est un nombre hautement composé supérieur s'il existe un nombre réel  $\epsilon > 0$ , tel que, pour tout  $M$  entier, on ait:

$$\frac{d(M)}{M^\epsilon} \leq \frac{d(N)}{N^\epsilon}.$$

*Propriétés* [8, §§ 32-34].  $\epsilon$  étant donné,  $0 < \epsilon < 1$ , il existe un nombre hautement composé supérieur associé à  $\epsilon$  dont la décomposition en facteurs premiers,  $N = \prod \lambda^{a_\lambda}$  est donnée par:

$$(6) \quad a_\lambda = \left[ \frac{1}{\lambda^\epsilon - 1} \right] = \text{partie entière de } \frac{1}{\lambda^\epsilon - 1}.$$

On attache à  $N = N_\epsilon$  les nombres:

$$(7) \quad x = 2^{1/\epsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2}.$$

On a alors:

$$(8) \quad a_\lambda = k \Leftrightarrow x_{k+1} < \lambda \leq x_k.$$

Soit  $p \leq x < P$  les nombres premiers encadrant  $x$ . Le plus grand nombre premier qui divise  $N$  est  $p$  et le nombre hautement composé supérieur suivant  $N$  est inférieur ou égal à  $NP$ .

PROPOSITION 1. Soit  $N = N_\epsilon$  un nombre hautement composé supérieur. Soit  $r/s$  une fraction irréductible telle que  $s$  divise  $N$ . On note  $v_\lambda(n)$  l'exposant de  $\lambda$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $n$ . On a alors,  $\lambda$  et  $\mu$  étant premiers, et  $a_\lambda$  et  $a_\mu$  étant déterminés par (6):

$$\log d\left(\frac{r}{s}N\right) - \log d(N) = \epsilon \log \frac{r}{s} - \sum_{\lambda|r} v_\lambda(r) \left( \epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}\right) \right) \\ - \sum_{\mu|s} v_\mu(s) \left( \log\left(1 + \frac{1}{a_\mu}\right) - \epsilon \log \mu \right) - \sum_{\lambda|r} \log U_\lambda - \sum_{\mu|s} \log V_\mu,$$

les nombres  $U_\lambda$  et  $V_\mu$  vérifiant  $U_\lambda \geq 1$  et  $V_\mu \geq 1$  avec égalité lorsque  $v_\lambda(r) = 1$  et  $v_\mu(s) = 1$ .

*Démonstration.* En raison de l'additivité des fonctions  $\log d(n)$  et  $\log n$ , il suffit de vérifier cette formule pour  $r = \lambda^k$ ,  $s = 1$  puis pour  $r = 1$ ,  $s = \mu^k$ .

Si  $r = \lambda^k$ ,  $s = 1$ , posons  $a_\lambda = a$ , la formule nous permet de calculer  $U_\lambda$ :

$$\log d\left(\frac{r}{s}N\right) - \log d(N) = \log \frac{a+k+1}{a+1} \\ = \epsilon k \log \lambda - k \left( \epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a+1}\right) \right) - \log U_\lambda$$

d'où il vient:

$$(9) \quad U_\lambda = \frac{a+1}{a+1+k} \left( \frac{a+2}{a+1} \right)^k = \prod_{i=1}^k \left\{ \left( \frac{a+i}{a+i+1} \right) \left( \frac{a+2}{a+1} \right) \right\}.$$

Pour  $k = 1$ , on a  $U_\lambda = 1$  et pour  $i \geq 2$ ,

$$\frac{a+i+1}{a+i} < \frac{a+2}{a+1}$$

d'où il vient  $U_\lambda > 1$  si  $k \geq 2$ .

Si  $r = 1$ ,  $s = \mu^k$ , on calcule de même  $V_\mu$ :

$$(10) \quad V_\mu = \frac{a+1}{a+1-k} \left( \frac{a}{a+1} \right)^k = \prod_{i=1}^k \left\{ \left( \frac{a+2-i}{a+1-i} \right) \left( \frac{a}{a+1} \right) \right\}.$$

On trouve de même: pour  $k = 1$ ,  $V_\mu = 1$  et pour  $k > 1$ ,  $V_\mu > 1$ .

*Définition.* Soit  $N = N_\epsilon$  un nombre hautement composé supérieur. Soit  $M$  un entier que l'on écrit:  $M = (r/s)N$  avec  $r$  et  $s$  premiers entre eux. On appelle bénéfice de  $M$  relatif à  $N$ , la quantité:

$$(11) \quad \text{bén } M = \sum_{\lambda|r} v_\lambda(r) \left( \epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}\right) \right) + \sum_{\lambda|r} \log U_\lambda \\ + \sum_{\mu|s} v_\mu(s) \left( \log\left(1 + \frac{1}{a_\mu}\right) - \epsilon \log \mu \right) + \sum_{\mu|s} \log V_\mu.$$

La proposition 1 s'écrit alors:

$$(12) \quad \epsilon \log \frac{M}{N} = \log \frac{d(M)}{d(N)} + \text{bén } M$$

avec  $\text{bén } M \geq 0$ .

PROPOSITION 2. Soit  $A$  un nombre hautement composé. Soit  $M$  et  $M'$  deux nombres tels que:  $d(M) \leq d(A) \leq d(M')$ . On a:

$$\text{bén } A \leq \text{bén } M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}.$$

*Démonstration.* Le nombre  $A$  étant hautement composé, la relation (1) nous donne:  $d(M') \geq d(A) \Rightarrow M' \geq A$ . La formule (12) nous donne:

$$\text{bén } A = \epsilon \log \frac{A}{N} - \log \frac{d(A)}{d(N)} \leq \epsilon \log \frac{M'}{N} - \log \frac{d(M)}{d(N)} = \text{bén } M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}.$$

PROPOSITION 3. Soit  $A$  un nombre hautement composé. Soit  $N = N_\epsilon$  le nombre hautement composé supérieur précédant  $A$ . On a:  $\text{bén } A \leq \epsilon + \log 2$ .

*Démonstration.* Soit  $P$  le plus petit nombre premier ne divisant pas  $N$ . On sait que  $N \leq A \leq NP$ . La formule (11) nous donne:  $\text{bén } NP = \epsilon \log P - \log 2$ . Posant  $x = 2^{1/\epsilon}$ , soit  $\epsilon = \log 2 / \log x$ , il vient:

$$\text{bén } NP = \epsilon \log \frac{P}{x} \leq \epsilon \frac{P - x}{x}.$$

D'après le postulat de Bertrand, on a:  $P - x \leq x$  donc:  $\text{bén } NP \leq \epsilon$ .

Ensuite, ou bien on a:  $d(N) \leq d(A) \leq d(NP)$  et la proposition 2 nous dit:  $\text{bén } A \leq \text{bén } NP + \log 2 \leq \epsilon + \log 2$ , ou bien on a:  $d(NP) < d(A)$  et comme  $A \leq NP$ , la formule (12) nous dit:  $\text{bén } A \leq \text{bén } NP \leq \epsilon$ .

*Calcul de bénéfices.* Soit  $N = N_\epsilon$  un nombre hautement composé supérieur. Soit  $k$  un entier fixé. On définit  $x$  et  $x_k$  par la formule (7).

Soit  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de  $x_k$ . On choisit  $n$  tendant vers l'infini avec  $x$  et  $n \leq x^\tau / \log x$  avec  $\tau = 5/8$ . D'après la formule (4) de Ingham on a  $Q_n - x_k = O(x^\tau)$ , et pour  $x$  assez grand  $Q_n < x_{k-1}$ , ce qui entraîne par (8) que l'exposant des  $Q_i$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $N$  est  $(k - 1)$ .

Posons  $W_n = NQ_1 Q_2 \dots Q_n$ . On a par la formule (11):

$$\text{bén } W_n = \sum_{i=1}^n \epsilon \log Q_i - \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \epsilon \sum_{i=1}^n \log \frac{Q_i}{x_k}.$$

Comme on a toujours  $(u - 1)/u \leq \log u \leq u - 1$ , on obtient:

$$(13) \quad \text{bén } W_n \leq \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{Q_i - x_k}{x_k} \leq \frac{\epsilon}{x_k} n(Q_n - x_k) \leq \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}$$

et:

$$\text{bén } W_n \geq \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{Q_i - x_k}{Q_i} \geq \frac{\epsilon}{Q_n} \sum_{i=1}^n 2(i - 1) = \frac{\epsilon}{Q_n} (n^2 - n)$$

d'où il vient:

$$(14) \quad \text{bén } W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}.$$

Soit, de la même façon  $q_1, q_2, \dots, q_n$  les nombres premiers précédant  $x_k$ , rangés par ordre décroissant à partir de  $x_k$ . Dans les mêmes conditions, en posant

$$W_n' = \frac{N}{q_1 q_2 \dots q_n},$$

on obtient:

$$(15) \quad \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x} \lesssim \text{bén } W_n' \lesssim \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}.$$

**PROPOSITION 4.** *Soit  $A$  un nombre hautement composé, et  $N = N_\epsilon$  le nombre hautement composé supérieur précédant  $A$ . On définit  $x$  et  $x_k$  par la formule (7). Soit  $p_k$  le plus grand nombre premier divisant  $A$  avec l'exposant  $k$ . On a:*

$$\pi(p_k) - \pi(x_k) = O((x_k \log x)^{1/2}),$$

où  $\pi(x)$  désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à  $x$ .

*Démonstration.* Supposons par exemple que  $p_k \geq x_k$ . Posons  $n = \pi(p_k) - \pi(x_k)$ . Les relations (11) et (14) donnent

$$\text{bén } A \geq \text{bén } W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}.$$

D'autre part la proposition 3 nous indique:  $\text{bén } A = O(1)$ , d'où le résultat.

**COROLLAIRE.** *Avec les mêmes notations, si  $x_k \rightarrow \infty$ , on a, avec  $\tau = 5/8$ :*

$$p_k - x_k = O(x_k^\tau).$$

*Démonstration.* D'après la formule (4) de Ingham, si l'on avait  $p_k - x_k \geq x_k^\tau$ , cela entraînerait

$$\pi(p_k) - \pi(x_k) \geq \frac{x_k^\tau}{\log x},$$

ce qui contredirait la proposition 4.

### 3. Théorème de majoration des bénéfiques et applications.

**THÉORÈME 1.** *Soit  $A$  un nombre hautement composé, soit  $N = N_\epsilon$  le nombre hautement composé supérieur précédant  $A$ . Posons  $x = 2^{1/\epsilon}$ . Il existe deux constantes  $\gamma > 0$  et  $C > 0$  telles que:  $\text{bén } A \leq Cx^{-\gamma}$ .*

*Démonstration.* Nous allons construire une famille de nombres  $M_h$ , compris entre  $N$  et  $NP$  (où  $P$  désigne le nombre premier suivant  $x$ ) tels que  $\text{bén } M_h$  ne soit pas trop grand et tels que les nombres  $d(M_h)$  soient assez proches les uns des autres. La proposition 2 appliquée aux nombres  $M_h$  nous donnera le résultat.

Soit  $y$  un nombre réel, on note  $[y]$  la partie entière de  $y$  ( $[y] \leq y < [y] + 1$ ), on note  $\{y\} = y - [y]$  la partie fractionnaire de  $y$  et on note

$$\|y\| = \min(\{y\}, 1 - \{y\})$$

la distance de  $y$  à l'entier le plus proche. Soit  $\theta = \log(3/2)/\log 2$ , la formule (7) donne:  $x_2 = x^\theta$ . Soit  $Q_1, Q_2, \dots, Q_h$  les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de  $x_2$  et  $q_1, q_2, \dots, q_h$  les nombres premiers précédant  $x_2$  et rangés par ordre décroissant. Définissons de même  $P_1 = P, P_2, \dots, P_h$  et  $p_1, p_2, \dots, p_h$  à partir de  $x$ .

Pour  $h > 0$ , on définit

$$M_h = N \frac{Q_1 Q_2 \dots Q_h}{p_1 p_2 \dots p_k} \quad \text{avec } k = [h\theta].$$

Pour  $h < 0$ , on pose  $h' = -h$  et

$$M_h = N \frac{P_1 P_2 \dots P_{k'}}{q_1 q_2 \dots q_{h'}} \quad \text{avec } k' = [h'\theta] + 1.$$

On a, pour  $h > 0$ :

$$\delta_h = \log \frac{d(M_h)}{d(N)} = \log \frac{(3/2)^h}{2^k} = h \log(3/2) - k \log 2 = \{h\theta\} \log 2$$

et pour  $h < 0$ :

$$\delta_h = \log \frac{d(M_h)}{d(N)} = \log \frac{2^{k'} 2^{h'}}{3^{h'}} = k' \log 2 - h' \log(3/2) = \{h\theta\} \log 2.$$

Pour  $h = 0$ , on pose  $M_0 = N$  et  $\delta_0 = 0$ .

On considère les nombres  $M_h, -H \leq h \leq H, H$  étant un entier que l'on précisera par la suite, et le nombre  $M = NP$ . On pose:

$$\delta_M = \log \frac{d(M)}{d(N)} = \log 2,$$

et on les range par ordre croissant de  $\delta_n$ . Soit  $u_n/v_n$  le  $n^{\text{ième}}$  convergent principal de  $\theta$ , et choisissons  $n$  de façon que:

$$(16) \quad v_{n+1} < H \leq v_{n+2}.$$

D'après les propriétés des fractions continues (voir, par exemple [6, Chapter 1]) l'un des convergents  $u_n/v_n$  et  $u_{n+1}/v_{n+1}$ , soit  $u/v$  va vérifier  $v\theta > u$ , et par suite  $v\theta = u + ||v\theta||$ , l'autre soit  $u'/v'$  va vérifier  $v'\theta < u'$  et  $v'\theta = u' - ||v'\theta||$ .

Pour  $h \geq 0$ , on a:  $(h - v')\theta = [h\theta] + \{h\theta\} - u' + ||v'\theta||$ . Si  $\{h\theta\} < 1 - ||v'\theta||$ , on a:  $\{(h - v')\theta\} = \{h\theta\} + ||v'\theta||$  et:

$$\delta_h < \delta_{h-v'} < \delta_h + ||v'\theta|| \log 2$$

le nombre  $M_{h-v'}$  suivra  $M_h$  dans le rangement par ordre croissant des  $\delta_n$  et l'écart entre  $\delta_h$  et  $\delta_{h-v'}$  est inférieur à  $||v'\theta|| \log 2$ . Si  $1 - ||v'\theta|| \leq \{h\theta\}$ , on aura:  $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v'\theta|| \log 2$ , et le nombre  $M = NP$  suivra  $M_h$ , avec un écart  $\delta_M - \delta_h$  inférieur à  $||v'\theta|| \log 2$ .

Pour  $h < 0$ , on a de même:  $(h + v)\theta = [h\theta] + \{h\theta\} + u' + ||v\theta||$ . Si  $\{h\theta\} < 1 - ||v\theta||$ , on aura  $\delta_h < \delta_{h+v} < \delta_h + ||v\theta|| \log 2$ . Si  $1 - ||v\theta|| \leq \{h\theta\}$ , on aura  $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v\theta|| \log 2$ .

Dans tous les cas, l'écart entre deux nombres consécutifs de la famille  $\delta_h$ ,  $-H \leq h \leq H$ , et  $\delta_M$  rangés par ordre croissant est au plus  $\|v\theta\| \log 2$ , ou  $\|v'\theta\| \log 2$ , c'est-à-dire au plus  $\|v_n\theta\| \log 2$ .

D'après le théorème de Feldmann [3], il existe deux constantes  $\kappa$  et  $c_1$  telles que, pour tous  $u$  et  $v$  entiers, on ait:

$$|v\theta - u| > \frac{c_1}{v^\kappa}.$$

On a en particulier:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| > \frac{c_1}{v_{n+1}^\kappa}.$$

Mais, d'après les propriétés des fractions continues (voir [6, Chapter 1]), on a:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| < \frac{1}{v_{n+2}}.$$

On en déduit:

$$v_{n+2} < (1/c_1) v_{n+1}^\kappa.$$

La relation (16) donne:

$$H < (1/c_1) v_{n+1}^\kappa, \text{ soit: } v_{n+1} > (c_1 H)^{1/\kappa}.$$

Finalement, on obtient:

$$(17) \quad \|v_n\theta\| \log 2 \leq \|v_n\theta\| = |v_n\theta - u_n| < \frac{1}{v_{n+1}} < c_2 H^{-1/\kappa}.$$

Choisissons  $H$  de façon à avoir:  $H < x_2^\tau < x^\tau$ . Pour  $-H \leq h \leq H$ , on aura, par les relations (13) et (15):

$$(18) \quad \text{bén } M_h \lesssim \frac{|h| \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{([h\theta] + 1) \log 2}{x^{1-\tau} \log x} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x}.$$

Considérons le nombre hautement composé  $A$ . On pose,

$$\delta_A = \log \frac{d(A)}{d(N)}.$$

Le nombre  $\delta_A$  va être compris entre deux nombres consécutifs  $\delta_h$  et  $\delta_{h'}$  de la famille des  $\delta_h$ . On aura:

$$d(M_h) \leq d(A) \leq d(M_{h'})$$

et

$$(19) \quad \log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} = \delta_{h'} - \delta_h \leq \|v_n\theta\| \log 2 < c_2 H^{-1/\kappa}$$

en appliquant l'inégalité (17).

On applique la proposition 2 aux nombres  $A$ ,  $M_h$ , et  $M_{h'}$ :

$$\text{bén } A \leq \text{bén } M_{h'} + \log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + c_2 H^{-1/\kappa}$$

en appliquant les inégalités (18) et (19). Si l'on choisit  $H = [x^{\gamma}]$ , on obtient  $\text{bén } A \leq Cx^{-\gamma}$  avec  $\gamma = \theta(1 - \tau)/(\kappa + 1)$ , ce qui établit le théorème 1.

PROPOSITION 5. *Soit  $A$  un nombre hautement composé assez grand,  $N = N_{\epsilon}$  le nombre hautement composé supérieur précédant  $A$ . Ecrivons  $A = (r/s)N$  avec  $r$  et  $s$  premiers entre eux. Alors  $r$  et  $s$  ne sont divisibles par aucun carré.*

*Démonstration.* D'après la relation (11), si  $\lambda^2$  divisait  $r$ , on aurait:

$$\text{bén } A \geq 2 \left( \epsilon \log \lambda - \log \frac{1}{1 + a_{\lambda}} \right) + \log U_{\lambda} \geq \log U_{\lambda}$$

où  $a_{\lambda}$  est défini par (6).  $U_{\lambda}$  est donné par la formule (9), en posant  $a = a_{\lambda}$ :

$$\log U_{\lambda} \geq \log \left( \frac{a + 1}{a + 3} \frac{(a + 2)^2}{(a + 1)^2} \right) = \log \left( 1 + \frac{1}{(a + 1)(a + 3)} \right) \geq \frac{1}{(a + 2)^2}.$$

Soit  $a_2$  l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de  $N$ , on a:

$$a = a_{\lambda} \leq a_2 \quad \text{et} \quad a_2 \sim \frac{1}{2^{\epsilon} - 1} \sim \frac{1}{\epsilon \log 2}.$$

On aurait donc:

$$\text{bén } A \geq \log U_{\lambda} \gtrsim (\epsilon \log 2)^2 = \frac{(\log 2)^4}{(\log x)^2}$$

ce qui est en contradiction avec le théorème 1 pour  $x$  assez grand.

On démontrerait de même que  $s$  n'a pas de facteurs carrés.

PROPOSITION 6. *Soit  $A$  un nombre hautement composé assez grand. Soit  $N = N_{\epsilon}$  le nombre hautement composé supérieur précédant  $A$ . Soit  $\lambda$  un nombre premier et posons  $a = a_{\lambda} = v_{\lambda}(N)$  défini par (6) et  $b = b_{\lambda} = v_{\lambda}(A)$ . Alors:*

$$\text{Si } \epsilon \log \lambda - \log \left( 1 + \frac{1}{a + 1} \right) \leq Cx^{-\gamma}, \text{ on } a : b = a \text{ ou } b = a + 1;$$

$$\text{Si } \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) - \epsilon \log \lambda \leq Cx^{-\gamma}, \text{ on } a : b = a \text{ ou } b = a - 1;$$

Si non, on a  $b = a$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 4, on doit avoir:  $|b - a| \leq 1$ .

$$\text{Si } b = a + 1, \text{ alors: } \text{bén } A \geq \text{bén } \lambda N = \epsilon \log \lambda - \log \left( 1 + \frac{1}{a + 1} \right).$$

Le cas n'est possible que si

$$\epsilon \log \lambda - \log \left( 1 + \frac{1}{a + 1} \right) \leq Cx^{-\gamma}$$

d'après le théorème 1.

$$\text{Si } b = a - 1, \text{ alors: } \text{bén } A \geq \text{bén } \frac{N}{\lambda} = \log \left( 1 + \frac{1}{a} \right) - \epsilon \log \lambda.$$



Cela n'est possible que si

$$\log\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \epsilon \log \lambda \leq Cx^{-\gamma}.$$

Cela nous permet de déterminer l'exposant  $b = v_\lambda(A)$  avec lequel  $\lambda$  divise  $A$ , suivant les valeurs croissantes de  $\lambda$ .

$\lambda$		$x_{k+1}$		$x_k$	
$\epsilon \log \lambda$		$\log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$		$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	
$\frac{1}{\lambda^\epsilon - 1}$		$k + 1$		$k$	
$a = v_\lambda(N)$	$k + 1$		$k$		$k - 1$
$b = v_\lambda(A)$	$k + 1$	$k + 1$ ou $k$	$k$	$k$ ou $k - 1$	$k - 1$

La demi longueur des zones hachurées dans lesquelles  $b$  peut varier de une unité est:

Pour  $\epsilon \log \lambda$ , la proposition 6 nous donne  $Cx^{-\gamma}$ ,

Pour  $\lambda = e^{\epsilon \log \lambda / \epsilon}$ , on trouve  $(\lambda/\epsilon) Cx^{-\gamma}$  soit  $O(x_k x^{-\gamma} \log x)$ ,

Pour

$$\frac{1}{\lambda^\epsilon - 1} = \frac{1}{e^{\epsilon \log \lambda} - 1},$$

on trouve  $(\lambda^\epsilon / (\lambda^\epsilon - 1)^2) Cx^{-\gamma}$  soit  $O(x^{-\gamma} \log^2 x)$ .

*Remarque.* Soit  $p_k$  le plus grand nombre premier divisant  $A$  avec l'exposant  $k$ . Le tableau précédent nous indique:

$$p_k - x_k = O(x_k x^{-\gamma} \log x)$$

et le corollaire de la proposition 4 nous donne:

$$p_k - x_k = O(x_k^\tau)$$

ce qui est meilleur lorsque  $k$  est petit.

**THÉORÈME 2.** Soit  $A$  un nombre hautement composé et  $p$  son plus grand facteur premier. Soit  $\lambda < p$  un nombre premier, et posons:  $b = v_\lambda(A)$ . Alors on a:

$$\log\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma}),$$

$$\log\left(1 + \frac{1}{b+1}\right) \leq \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma}).$$

*Démonstration.* Associons à  $A$  le nombre hautement composé supérieur,  $N = N_\epsilon$  précédant  $A$ . Pour avoir  $b = v_\lambda(A)$ , le tableau précédent nous dit que:

$$\log\left(1 + \frac{1}{b+1}\right) - Cx^{-\gamma} \leq \epsilon \log \lambda \leq \log\left(1 + \frac{1}{b}\right) + Cx^{-\gamma}.$$

Le corollaire de la proposition 4 nous donne:  $p - x = O(x^\tau)$  soit  $p \sim x$  et

$$\epsilon \log \lambda - \frac{\log 2 \log \lambda}{\log p} = \log 2 \log \lambda \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log p} \right) = O\left(\log \lambda \frac{p-x}{\log^2 x}\right) = o(x^{1-\tau})$$

et comme  $\gamma < 1 - \tau$ ,  $x^{1-\tau} \sim p^{1-\tau} = o(p^{-\gamma})$ .

Cela démontre le théorème 2, qui améliore les théorèmes de Alaoglu et Erdős [1, Theorems 11, 12]. La remarque précédant le théorème 2 nous permettrait de remplacer  $O(p^{-\gamma})$  par une quantité plus petite, lorsque  $b$  est petit.

**THÉORÈME 3.** Soit  $Q(X)$  le nombre de nombres hautement composés inférieurs à  $X$ . Soit  $N = N_\epsilon$  et  $N'$  deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Il existe une constante  $c$  pour laquelle on a:  $Q(N') - Q(N) = O(\log N)^c$ .

*Démonstration.* Nous allons étudier toutes les possibilités de construire un nombre hautement composé,  $A$  entre  $N$  et  $N'$ , ayant un bénéfice inférieur à  $Cx^{-\gamma}$ .

La première ligne du tableau suivant la proposition 6 nous indique qu'un nombre premier  $\lambda$  a le même exposant dans  $N$  et dans  $A$ , sauf s'il est voisin d'un nombre  $x_k$ .

Il existe un entier  $k'$ , tel que pour  $k > k'$  il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de  $x_k$ , soit  $x_k + O(x_k x^{-\gamma} \log x)$ . Cela arrivera lorsque  $x_k x^{-\gamma} \log x = o(1)$  c'est-à-dire, (compte tenu de (7)) pour  $\log(1 + 1/k)/\log 2 - \gamma < 0$ . Cela nous donne

$$k' = \left\lceil \frac{1}{e^{\gamma \log 2} - 1} \right\rceil$$

et l'on voit que  $k'$  ne dépend pas de  $N$  mais seulement de  $\gamma$ .

Pour  $k$  assez grand, il y aura plusieurs nombres  $x_k$  compris entre deux nombres premiers consécutifs. Cela aura lieu lorsque  $x_k - x_{k+1} \leq 2$ . Définissons  $k''$  par:

$$x_{k''-1} - x_{k''} < 2 \leq x_{k''} - x_{k''+1}.$$

Nous allons chercher un équivalent de  $k''$ . On a:

$$\log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

et

$$(20) \quad x_k - x_{k+1} = x_k \left\{ 1 - \exp\left(\frac{\log(1 - (k+1)^{-2}) \log x}{\log 2}\right) \right\} \sim x_k \frac{\log x}{k^2 \log 2}.$$

Pour  $k = C \log x / \log \log x$ , on a:

$$x_k - x_{k+1} \sim x_k \frac{(\log \log x)^2}{C^2 \log x \log 2}$$

et

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \log x \frac{\log(1 + 1/k)}{\log 2} + 2 \log_3(x) - \log \log x + O(1),$$

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \frac{\log \log x}{C \log 2} - \log \log x + 2 \log_3(x) + O(1).$$

On voit que, pour  $C > 1/\log 2$ ,  $\lim(x_k - x_{k+1}) = 0$ , et pour  $C < 1/\log 2$ ,  $\lim(x_k - x_{k+1}) = +\infty$ . On en conclut:

$$k'' \sim \frac{\log x}{\log \log x \log 2}$$

et par la relation (20),

$$2 \sim x_{k''} \frac{\log x}{k''^2 \log 2},$$

$$x_{k''} \sim \frac{2}{\log 2} \frac{\log x}{(\log \log x)^2}.$$

Regardons maintenant quel peut être l'exposant  $b_\lambda = v_\lambda(A)$  de  $\lambda$  dans la décomposition en facteurs premiers de  $A$  par rapport à  $a_\lambda = v_\lambda(N)$ .

Pour  $\lambda \leq x_{k''}$ , il y a trois choix au plus pour  $b_\lambda$ :  $a_\lambda + 1$ ,  $a_\lambda$  et  $a_\lambda - 1$  à cause de la proposition 5.

Pour  $x_{k''} < \lambda < x_{k'}$ , pour chaque valeur de  $k$ , il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de  $x_k$ . Pour un tel nombre premier, il y aura deux choix pour  $b_\lambda$ .

Pour  $2 \leq k \leq k'$ , pour chaque nombre  $k$ , il y aura au plus  $2(x_k \log x)^{1/2}$  possibilités de choisir  $p_k$  le plus grand nombre premier divisant  $A$  avec l'exposant  $k$ , à cause de la proposition 4.

Enfin, pour  $k = 1$ , il y aura en général une et au plus deux possibilités de choisir  $p_1$ , le plus grand facteur premier de  $A$ , pour que le nombre  $A$  ainsi construit soit entre  $N$  et  $N'$ .

Dans ces deux derniers cas, la relation (2) montre que le choix des  $p_k$  détermine exactement les exposants  $b_\lambda$  pour tous les nombres  $\lambda$ . On aura donc:

$$(21) \quad Q(N') - Q(N) \leq 2 \left( \prod_{k=2}^{k'} 2(x_k \log x)^{1/2} \right) (2^{k''-k'}) (3^{\pi(x_{k''})}).$$

Or, on a:  $x_{k''} = o(\log x)$  et  $k'' = o(\log x)$  donc:

$$\log(Q(N') - Q(N)) \leq \sum_{k=2}^{k'} \frac{1}{2} \log x_k + o(\log x).$$

Mais, d'après (7),

$$\sum_{k=2}^{k'} \frac{1}{2} \log x_k = \frac{\log x}{2 \log 2} \sum_{k=2}^{k'} \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{\log \frac{1}{2}(k' + 1)}{2 \log 2} \log x,$$

On trouve donc:

$$Q(N') - Q(N) = O(x^c) \quad \text{avec } c > \frac{\log \frac{1}{2}(k' + 1)}{2 \log 2}.$$

Comme on a:  $x \sim \log N$  [8, § 39], cela démontre le théorème 3.

**THÉORÈME 4.** Soit  $Q(X)$  le nombre de nombres hautement composés inférieurs à  $X$ . On a:  $Q(X) = O(\log X)^{1+c}$ ,  $c$  ayant la même valeur que dans le théorème 3.

*Démonstration.* On a, avec le théorème 3:

$$Q(X) \leq \sum_{N \leq X} (Q(N') - Q(N)) = o\left( \sum_{N \leq X} (\log N)^c \right)$$

les sommations s'effectuant sur les nombres hautement composés supérieurs  $N$  précédant  $X$ , et  $N'$  désignant le nombre hautement composé supérieur suivant  $N$ . On a ensuite:

$$\sum_{N \leq X} (\log N)^c \leq (\log X)^c \sum_{N \leq X} 1 \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{\log \log X}.$$

Cette dernière équivalence est donnée par Ramanujan [8, § 44]. Une évaluation plus précise donnerait:

$$\sum_{N \leq X} (\log N)^c \sim \sum_{\substack{\lambda \leq \log X; \\ \lambda \text{ premier}}} \lambda^c \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{(c+1) \log \log X}.$$

Cette dernière équivalence étant donnée par [5, § 55].

#### 4. Minoration de $Q(X)$ .

**THÉORÈME 5.** Soit  $Q(X)$  le nombre de nombres hautement composés inférieurs à  $X$ . Il existe une constante  $c' > 0$  telle que  $Q(X) \geq (\log X)^{1+c'}$ .

*Démonstration.* Ce théorème a déjà été démontré par Erdős [2]. Nous allons obtenir ici une valeur de  $c'$  un peu plus grande. La méthode de démonstration est essentiellement la même.

Soit  $\theta = \log(3/2)/\log 2$  et  $\theta' = \log(5/4)/\log 2$ . On considère les nombres  $\{u\theta + v\theta'\}$ , où  $\{y\}$  désigne la partie fractionnaire de  $y$ , avec  $u, v$  entiers,  $|u| \leq U$  et  $|v| \leq V$ ,  $U$  et  $V$  étant deux nombres que l'on déterminera par la suite. Les  $(2U + 1)(2V + 1)$  nombres de cette forme sont tous distincts et tous compris entre 0 et 1. Si l'on divise le segment  $[0, 1]$  en  $4UV + 2(U + V)$  intervalles de même longueur, l'un de ces intervalles contiendra deux points:

$\{u_1\theta + v_1\theta'\} < \{u_2\theta + v_2\theta'\}$  d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, et on aura:

$$\{(u_2 - u_1)\theta + (v_2 - v_1)\theta'\} \leq \frac{1}{4UV + 2(U + V)}.$$

Posons  $u = u_2 - u_1$ ,  $v = v_2 - v_1$ , et  $w = -[u\theta + v\theta']$ , on a:  $|u| \leq 2U$ ,  $|v| \leq 2V$  et

$$(22) \quad 0 < u\theta + v\theta' + w = \{u\theta + v\theta'\} \leq \frac{1}{4UV + 2(U + V)} \leq \frac{1}{4UV}.$$

Soit  $A$  un nombre hautement composé,  $N = N_\epsilon$  le nombre hautement composé supérieur précédant  $A$ . On définit  $x$  et  $x_k$  par (7) et, en particulier,  $x_2 = x^\theta$  et  $x_4 = x^{\theta'}$ . Soit  $r, q, p$  les plus grands nombres premiers divisant  $A$  avec les exposants 4, 2, 1. D'après la proposition 4, on a:

$$\pi(r) - \pi(x_4) = O((x_4 \log x)^{1/2}), \quad \pi(q) - \pi(x_2) = O((x_2 \log x)^{1/2}),$$

et

$$\pi(p) - \pi(x) = O((x \log x)^{1/2}).$$

Les nombres  $U$  et  $V$  étant choisis, et  $u$  et  $v$  vérifiant (22) on construit un nombre  $A'$  tel que:

$$\log d(A') = \log d(A) + (u\theta + v\theta' + w) \log 2$$

dont la forme varie avec le signe de  $u, v, w$ . Dans le cas  $u > 0, v > 0, w < 0$ , on a:

$$A' = A \frac{Q_1 Q_2 \dots Q_u R_1 R_2 \dots R_v}{p_1 p_2 \dots p_w}$$

où  $Q_1, Q_2, \dots$  sont les nombres premiers suivant  $q$ ,  $R_1, R_2, \dots$  les nombres premiers suivant  $r$ , et  $p_1 = p, p_2, \dots$  les nombres premiers précédant  $p$ .

Si  $U$  est inférieur à  $x_2^\tau / \log x_2$  on aura:

$$\pi(Q_u) - \pi(x_2) \leq |u| + |\pi(q) - \pi(x_2)| = O\left(\frac{x_2^\tau}{\log x_2}\right)$$

et on aura aussi:  $|Q_u - x_2| = O(x_2^\tau)$ . Si, de même  $V \leq x_4^\tau / \log x_4$ , on aura  $|R_v - x_4| = O(x_4^\tau)$ . Comme  $w = O(U + V)$ , on aura également  $|p_w - x| = O(x^\tau)$ . On peut donc appliquer les formules (13) et (15):

$$\begin{aligned} \text{bén } A' - \text{bén } A &\leq \frac{u \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{v \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x} + \frac{w \log 2}{x^{1-\tau} \log x}, \\ (23) \quad \text{bén } A' - \text{bén } A &\leq \left( \frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x} \right) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

on a d'autre part:

$$\log \frac{d(A')}{d(A)} = (u\theta + v\theta' + w) \log 2 \leq \frac{1}{4UV}.$$

La relation (12) appliquée à  $A$  puis à  $A'$  donne:

$$\epsilon \log \frac{A'}{A} = \log \frac{d(A')}{d(A)} + \text{bén } A' - \text{bén } A \lesssim \frac{1}{4UV} + \frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}.$$

On choisit  $U = x^\alpha$ ,  $V = x^\beta$  avec  $\alpha = \frac{1}{3}(2\theta - \theta')(1 - \tau)$ ,  $\beta = \frac{1}{3}(2\theta' - \theta)(1 - \tau)$  et on obtient:

$$\epsilon \log \frac{A'}{A} = O(x^{-(\alpha+\beta)}) = O(x^{\frac{1}{3}(\theta+\theta')(1-\tau)}),$$

d'où l'on tire, en posant  $c' < \frac{1}{3}(\theta + \theta')(1 - \tau)$ :

$$A' \leq A \left( 1 + \frac{1}{x^{c'}} \right)$$

et comme  $x \sim \log A$ , on obtient:

$$A' \leq A \left( 1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}} \right).$$

Cette inégalité a été obtenue par Erdős [2] avec

$$c' = \frac{1 - \tau}{4} = \frac{3}{32}.$$

Ici nous avons  $c' < \frac{1}{3}(\theta + \theta')(1 - \tau) = 0.113 \dots$ . La fin de la démonstration est la même. Comme  $d(A') > d(A)$ , on a  $A' > A$  et il existe un nombre hautement composé  $A''$  tel que  $A < A'' \leq A'$  qui vérifie

$$A'' \leq A \left( 1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}} \right).$$

Cela entraîne:  $Q(X) \geq (\log X)^{1+c'}$ .

**5. Conclusion.** Si l'on supposait les nombres premiers très bien répartis, c'est-à-dire distants de  $\log x$  au voisinage de  $x$ , les formules (13), (14), et (15) deviendraient:

$$\text{bén } W_n \sim \frac{n^2 \log 2}{2x_k}.$$

La formule (23) deviendrait:

$$\text{bén } A' - \text{bén } A \sim \frac{u^2 \log 2}{2x_2} + \frac{v^2 \log 2}{2x_4},$$

et l'on trouverait  $c' = \frac{1}{4}(\theta + \theta') = 0.277 \dots$  dans le théorème 5.

D'autre part, si l'on avait pour les formes linéaires en  $\theta$  et  $\theta'$  une relation:

$$\frac{1}{K(\eta)(uv)^{1+\eta}} < |u\theta + v\theta' + w|$$

pour tout  $\eta > 0$ , cela nous permettrait d'obtenir  $\gamma = \frac{1}{4}(\theta + \theta') - \eta$  dans le

théorème 1 et on obtiendrait dans la démonstration du théorème 3,  $k' = 5$ . Comme les nombres

$$\frac{\log(4/3)}{\log 2} = 1 - \theta \quad \text{et} \quad \frac{\log(6/5)}{\log 2} = \theta - \theta'$$

sont rationnellement dépendants de 1,  $\theta$ ,  $\theta'$ , les nombres premiers voisins de  $x_3$  et  $x_5$  n'apportent pas de valeurs nouvelles à la fonction  $d$  et le produit dans la formule (21) ne porterait que sur  $k = 2$  et  $k = 4$ . On en déduirait alors:

$$(\log X)^{c-\eta} \leq Q(X) \leq (\log X)^{c+\eta} \quad \text{avec} \quad c = 1 + \frac{1}{4}(\theta + \theta') = 1.277 \dots$$

Si, par contre les nombres  $\{u\theta + v\theta'\}$  étaient mal répartis, il est vraisemblable que la quantité  $\log Q(X)/\log \log X$  n'aurait pas de limite.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. L. Alaoglu and P. Erdős, *On highly composite and similar numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. 56 (1944), 448–469.
2. P. Erdős, *On highly composite numbers*, J. London Math. Soc. 19 (1944), 130–133.
3. N. Feldmann, *Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers*, Mat. Sb. 77 (119) (1968), 423–436 (en russe); Math. USSR-Sb. 6 (1968), 393–406 (Traduction de l'Amer. Math. Soc.).
4. A. E. Ingham, *On the difference of two consecutive primes*, Quart. J. Math. Oxford. Ser. 8 (1937), 255.
5. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung des Primzahlen* (Teubner, Leipzig–Berlin, 1909).
6. S. Lang, *Introduction to Diophantine approximations* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966).
7. J.-L. Nicolas, *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers*, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 129–191.
8. S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 14 (1915), 347–400; Collected papers, pp. 78–128.

*Université de Sherbrooke,  
Sherbrooke, Québec;  
116 Avenue St. Exupéry,  
92 Antony, France*