C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 513-515 (4 mars 1968). Série A

THÉORIE DES NOMBRES. — *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et nombres très hautement abondants.* Note (*) de M. **Jean-Louis Nicolas**, présentée par M. Paul Montel.

1. Grandes différences entre deux termes consécutifs de certaines suites contenant les nombres premiers. — Soit p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. L'étude des grandes différences $p_{n+1} - p_n$ a donné lieu à de nombreux articles dont le plus récent est de R. A. Rankin [4] qui montre que, pour une infinité de n, on a

$$p_{n+1} - p_n \geq (e^{\gamma} - \varepsilon) \log p_n \frac{\log_2 p_n \log_4 p_n}{\log_3^2 p_n}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où γ est la constante d'Euler et où $\log_2 p_n = \log\log p_n, \ldots$ A partir de ce résultat, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soit b_n une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant les deux conditions :*

(1) *Il existe $\alpha < 1$ tel que, quand $x \to \infty$,*

$$\operatorname{Card}\{b_n \mid b_n \leq x\} = O(x^{\alpha});$$

(2) *Il existe $b > 0$ tel que, quand $x \to \infty$,*

$$\operatorname{Card}\{b_n \mid x \leq b_n \leq x + x^{b}\} = O(\log x).$$

Appelons a_n la suite obtenue en rangeant dans l'ordre croissant les nombres premiers et les nombres de la suite b_n. Alors, pour une infinité de n, on a

$$a_{n+1} - a_n \geq (\alpha e^{\gamma} - \varepsilon) \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n}.$$

Corollaire. — *Soit a_n la suite ordonnée de tous les nombres p^m, où p est premier et m entier ≥ 1. Pour une infinité de n, on a*

$$a_{n+1} - a_n \geq \frac{1}{2} (e^{\gamma} - \varepsilon) \log a_n \frac{\log_2 a_n \log_4 a_n}{\log_3^2 a_n}.$$

Ce corollaire précise un résultat de W. Sierpinski qui démontre dans [5] :

$$\overline{\lim}\,(a_{n+1} - a_n) = +\infty.$$

2. La fonction $g(n)$.

Définition :

$$g(n) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{ordre de } \sigma),$$

où S_n désigne le groupe des permutations à n éléments.

E. Landau [(2), § 61] a étudié cette fonction, démontrant notamment la relation

$$\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$

Définition. — Soit l la fonction arithmétique définie par

$$l(1) = 0; \qquad l\left(\prod_{i=1}^{h} p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{h} p_i^{\alpha_i},$$

avec p_i premier et α_i entier ≥ 1.

La fonction l est additive et sa restriction aux nombres p^α (p premier, α entier ≥ 1) est l'application identique. On a alors

$$g(n) = \sup_{l(k) \leq n} k$$

et si l'on désigne par $g(\mathbf{N})$ l'image par g de l'ensemble des nombres entiers positifs $\mathbf{N}$, on en déduit :

Propriété caractéristique des éléments de $g(\mathbf{N})$: les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $m \in g(\mathbf{N})$;

(2) $M > m$ *entraîne* $l(M) > l(m)$.

De la même façon que S. Ramanujan définit les « superior highly composite numbers » [(3), § 32], on définit un sous-ensemble G de $g(\mathbf{N})$: N appartient à G s'il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que, pour tout entier M, on ait : $l(M) - l(N) \geq \rho \log M/N$. A tout nombre $\rho > 3/\log 3$, on sait associer un nombre N_ρ de G dont on connaît exactement la décomposition en facteurs premiers. En utilisant cet ensemble G et le théorème 1, nous pouvons démontrer :

Théorème 2. — *Il existe des intervalles aussi grands qu'on veut sur lesquels $g(n)$ est constante et même l'équation $g(n + f(n)) = g(n)$ a une infinité de solutions pour*

$$f(n) = \left[\left(\frac{1}{4} e^\gamma - \varepsilon\right) \log n \frac{\log_2 n \log_4 n}{\log_3^2 n}\right],$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u.

Nous pouvons également démontrer les résultats suivants :

Théorème 3. — *Il existe une infinité de $N \in G$, tels que le suivant de N dans $g(\mathbf{N})$ soit $(P/p)N$, où l'on désigne par p le plus grand nombre premier divisant N et par P le nombre premier suivant p.*

Théorème 4. — *Il y a une infinité de nombres $g(n)$ pour lesquels il existe deux nombres premiers q et Q avec : $q < Q$, Q^2 divise $g(n)$ et q^2 ne divise pas $g(n)$.*

En particulier, pour $n = 47\,926$, on a : $q = 17$ et $Q = 19$.

3. Nombres très hautement abondants. — On pose : $\sigma(n)$ = somme des diviseurs de n. Avec P. Erdös et L. Alaoglu (1) nous disons que N

est très hautement abondants si, pour $M < N$, on a $\sigma(M) < \sigma(N)$, superabondant si, pour $M < N$, on a $\sigma(M)/M < \sigma(N)/N$, colossalement abondant s'il existe ε tel que pour tout M on ait

$$\frac{\sigma(M)}{\sigma(N)} \leqq \left(\frac{M}{N}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Nous pouvons répondre à deux questions posées par P. Erdös et L. Alaoglu dans leur introduction, par les théorèmes suivants :

THÉORÈME 5. — *Le nombre de « nombres très hautement abondants » compris entre deux « nombres superabondants consécutifs » n'est pas borné.*

THÉORÈME 6. — *Soit* $Q(x)$ *le nombre de « nombres très hautement abondants » inférieurs à* x *qui ne sont pas « superabondants ». Il existe* $C > 0$ *tel que* $Q(x) \geqq C(\log x)^{3/2}$.

THÉORÈME 7. — *Il existe une infinité de « nombres colossalement abondants »* N *tels que* $(P/p)N$ *soit « très hautement abondant »,* où *l'on désigne par* p *le plus grand nombre premier divisant* N *et par* P *le nombre premier suivant* p.

(*) Séance du 19 février 1968.

(¹) P. ERDÖS et L. ALAOGLU, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 56, 1944, p. 448-469.

(²) E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bände 1 und 2, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909. (2te Auflage, New York, Chelsea publishing Company, 1953).

(³) S. Ramanujan, *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, 14, 1915, p. 347-400; Collected papers, p. 78-128, Cambridge at the University Press, 1927.

(⁴) R. A. RANKIN, *Proc. Edimburgh Math. Soc.*, 13, 1963, p. 331-332.

(⁵) W. SIERPINSKI, *Wiadom Math.*, (2), 9, 1966, p. 9-10. (en polonais).

(116, *avenue de Saint-Exupéry, Antony, Hauts-de-Seine.*)

177215. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6^e).
Imprimé en France.