THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur un problème de Erdös et Moser.*
Note (*) de M. **Jean-Louis Nicolas,** présentée par M. Henri Cartan.

Soit E un ensemble fini de n nombres réels distincts. Pour $A \subset E$, on pose $F(A) = \sum_{a \in A} a$. Si l'on appelle $f(t)$ le nombre de parties A de E telle que $F(A) = t$, on démontre que pour $\varepsilon > 0$ donné, et n assez grand, on a

$$f(t) \leqq (1+\varepsilon)\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{n^{3/2}},$$

améliorant ainsi la précédente majoration de Sarközy et Szemeredi. La méthode, de nature combinatoire, utilise une généralisation du théorème de Sperner.

Soit n nombres réels distincts $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Soit E l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et soit $F : \mathscr{P}(E) \to \mathbf{R}$ l'application qui à $A \subset E$ associe $F(A) = \sum_{a_i \in A} a_i$. Pour t réel, désignons par $f(t)$ le cardinal de $F^{-1}(\{t\})$, c'est-à-dire le nombre de parties A de E telles que $F(A) = t$.

A. Sarközy et E. Szemeredi ont démontré que pour ε donné et n assez grand, on avait :

$$\max_{t \in \mathbf{R}} f(t) \leqq (1+\varepsilon)\frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{n^{3/2}} \tag{1}$$

améliorant ainsi un résultat de Erdös et Moser [*cf.* ([5])].

D'autre part si l'on choisit $a_i = i$ pour $1 \leqq i \leqq n$, on peut voir en appliquant le théorème central limite des probabilités [*cf.* par exemple, ([2]), 2, p. 544] que la probabilité qu'une partie $A \subset E$ vérifie

$$-\lambda \leqq \frac{F(A)-(n(n+1)/4)}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \leqq \lambda$$

tend vers $1/\sqrt{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-x^2/2}\,dx$, lorsque n tend vers l'infini.

On en déduit que pour ce choix des a_i, on a

$$\max_{t \in \mathbf{R}} f(t) \geqq (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{n^{3/2}}.$$

L'idée de cette Note est de reprendre la démonstration de Sarközy et Szemeredi et par un autre choix des paramètres de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit $\varepsilon > 0$; pour n assez grand, on a*

$$\max_{t \in \mathbf{R}} f(t) \leqq (1+\varepsilon)\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{n^{3/2}}.$$

Rappelons d'abord le théorème de Sperner [(6) et (1), 2, p. 114] :

Soit E un ensemble fini à n éléments. Une famille $A_1, A_2, \ldots, A_h$ de parties de E est dite « de Sperner » si pour tout $i \neq j$, $A_i \not\subset A_j$. Si la famille $A_1, \ldots, A_h$ est de Sperner, on a

$$h \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

en désignant par $[x]$ la partie entière de x.

Si dans notre problème, on a $A \subset B$, cela entraîne $F(A) \leqq F(B)$. Pour tout t, la famille $F^{-1}(\{t\})$ est de Sperner et par conséquent :

$$f(t) \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

d'après la formule de Stirling.

Cette majoration est grossière et l'on souhaite en obtenir une meilleure en appliquant le théorème de Sperner à une famille plus grande que la famille $F^{-1}(\{t\})$.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit deux entiers r et b tels que $1 \leqq r < b < n$. Pour tout t réel, on a l'inégalité :*

$$r\left[f(t) - 2^{n-b}\left(1 + \binom{b}{1} + \binom{b}{2} + \ldots + \binom{b}{r}\right)\right] \leqq 2^b \binom{n-b}{\left[\frac{n-b}{2}\right]}.$$

Démonstration. — Soit $E_b = \{a_1, a_2, \ldots, a_b\}$. Le nombre de parties de E qui contiennent au plus r éléments de E_b est égal à

$$2^{n-b}\left(1 + \binom{b}{1} + \ldots + \binom{b}{r}\right).$$

Soit maintenant $F^{-1}(\{t\}) = \{A_1, A_2, \ldots, A_{f(t)}\}$. Pour chaque indice i, soit $a_{l_1(i)}, a_{l_2(i)}, \ldots, a_{l_h(i)}$ les éléments de $A_i \cap E_b$. Pour $1 \leqq j \leqq h$, on pose

$$A_{ij} = A_i - \{a_{l_j(i)}\}.$$

Tous les ensembles A_{ij} ainsi définis sont distincts. La quantité $t - F(A_{ij})$ caractérise l'élément que l'on a enlevé de A_i et les ensembles A_i sont distincts. Le nombre de tels ensembles A_{ij} est supérieur ou égal à

$$r\left[f(t) - 2^{n-b}\left(1 + \binom{b}{1} + \ldots + \binom{b}{r}\right)\right].$$

Ces ensembles A_{ij} ne forment pas une famille de Sperner, mais ils ont la propriété suivante : si l'on a : $A_{ij} \subset A_{i'j'}$, alors $A_{ij} \cap E_b \neq A_{i'j'} \cap E_b$.

On remarque d'abord que l'on a : $t-a_b \leqq F(A_{ij}) \leqq t-a_1$.

Si l'on avait $A_{ij} \subset A_{i'j'}$ et $A_{ij} \cap E_b = A_{i'j'} \cap E_b$ il y aurait dans $A_{i'j'}-A_{ij}$ un élément a_m avec $m \geqq b+1$ ce qui entraînerait :

$$F(A_{i'j'}) \geqq F(A_{ij})+a_m \geqq t-a_b+a_m > t.$$

La proposition résulte alors du lemme suivant (5) :

LEMME. — *Soit* $B \subset E$, $\operatorname{card} B = b$, $\operatorname{card} E = n$. *Soit* $M_1, M_2, \ldots, M_s$ *une famille de parties de* E *ayant la propriété suivante : si* $M_i \subset M_j$ *alors* $M_i \cap B \neq M_j \cap B$. *On a alors :*

$$s \leqq 2^b \binom{n-b}{\left[\frac{n-b}{2}\right]}.$$

Ce lemme se démontre en appliquant le principe des tiroirs à la fonction $M \mapsto M \cap B$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(B)$, puis le théorème de Sperner à l'ensemble $E-B$.

Pour démontrer le théorème, à partir de la proposition, il faut choisir au mieux b et r en fonction de n. On a d'abord :

LEMME. — *Soit* λ *réel*, $0 < \lambda < 1/2$. *On a*

$$1+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{[\lambda n]} = 0\left(\frac{1}{\lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda}}\right)^n.$$

Démonstration. — On majore la somme de gauche par une progression géométrique de premier terme $\binom{n}{[\lambda n]}$ et on applique la formule de Stirling.

On choisit d'abord $r = [\lambda b]$ avec $\lambda = (1/2)-\varepsilon$. La quantité

$$\frac{2^b}{b}\binom{n-b}{\left[\frac{n-b}{2}\right]} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2^n}{b\sqrt{n-b}}$$

est maximale pour $b = 2n/3$. Si l'on choisit $b = [2n/3]$, on obtient le théorème.

Le choix de Sarközy et Szemeredi était $b = [n/2]$.

Cette méthode peut s'adapter à des problèmes plus généraux de répartition d'une somme de variables aléatoires indépendantes. Elle donne une majoration qui complète la minoration obtenue par le théorème central limite des probabilités.

Ces deux méthodes s'appliquent en particulier dans la distribution des diviseurs d d'un nombre $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, puisque $\log d$ est la somme des variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqq i \leqq k}$, X_i prenant comme valeurs $\beta_i \log p_i$, $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$, avec égales probabilités [*cf.* (4)].

CONJECTURE. — Peut-on remplacer la constante $3\sqrt{6}/\sqrt{\pi}$ du théorème par $\sqrt{6}/\sqrt{\pi}$? P. Erdös a fait une conjecture plus forte : le maximum de $f(t)$ est obtenu quand les a_i sont en progression arithmétique. On aurait donc :

$$f(t) \leqq p\left(\left[\frac{n(n+1)}{4}\right], n\right),$$

où $p(m, q)$ désigne le nombre de partitions de m en sommants distincts au plus égaux à q.

(*) Séance du 24 novembre 1975.

(1) L. COMTET, *Analyse combinatoire*, collection Sup., P.U.F. 1970.

(2) W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, II, second edition, Willey, 1971.

(3) G. KATONA, *Studia Sc. Math.*, 1, 1966, p. 59-63.

(4) J. L. NICOLAS, *Quelques méthodes élémentaires en Théorie des Nombres* (*Séminaire de Théorie des nombres*, Bordeaux, 1974-1975, exposé 13, 17 p.).

(5) A. SKARKÖZY et E. SZEMEREDI, *Acta Arithm.*, 11, 1965, p. 205-208.

(6) E. SPERNER, *Math. Z.*, 27, 1928, p. 544-548.

Département de Mathématiques,
U.E.R. des Sciences de Limoges,
123, *rue Albert-Thomas,*
87100 *Limoges.*