

P. ERDÖS

J.-L. NICOLAS

A. SÁRKOZY

## **Sommes de sous-ensembles**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 3, n° 1 (1991), p. 55-72.

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1991\\_\\_3\\_1\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_55_0)

© Université Bordeaux 1, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Sommes de sous-ensembles.

par P. ERDÖS, J.-L. NICOLAS, A. SÁRKOZY(1)

**Résumé** — On dit qu'un ensemble  $\mathcal{A}$  est admissible si les sommes des éléments de deux sous ensembles de  $\mathcal{A}$  de cardinaux différents sont différentes. Nous démontrons que si  $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, N\}$  est admissible, alors  $\text{Card } \mathcal{A} \leq (1 + o(1))(143/27)^{1/2} \sqrt{N}$ , améliorant ainsi les résultats de Erdős et Straus, et nous formulons quelques conjectures d'après des calculs numériques. Enfin nous construisons un ensemble infini admissible  $\mathcal{A}$  vérifiant  $A(x) = \text{Card}\{a \in \mathcal{A} ; a \leq x\} \gg x^{5-2\sqrt{6}}$ .

**Abstract** — A set  $\mathcal{A}$  is said to be admissible if the sums of the elements of two subsets of  $\mathcal{A}$  of different cardinalities are different. We shall prove that if  $\mathcal{A} \subset \{1, 2, \dots, N\}$  is an admissible set, then  $\text{Card } \mathcal{A} \leq (1 + o(1))(143/127)^{1/2} \sqrt{N}$  improving preceding results of Erdős and Straus. From numerical calculations, some conjectures are given. Finally, we construct an infinite admissible set  $\mathcal{A}$  such that  $A(x) = \text{Card}\{a \in \mathcal{A}; a \leq x\} \gg x^{5-2\sqrt{6}}$ .

### 1. Introduction

Tout au long de cet article nous utiliserons les notations suivantes : nous écrirons  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  et  $\mathbb{N}_M = \{1, 2, \dots, M\}$ . Nous dirons qu'un ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$  est admissible, si les sommes des éléments de deux sous ensembles de  $\mathcal{A}$  de cardinaux différents sont différentes. Cette définition a été introduite par E.G. Straus ([2]). Si  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}$ , nous désignerons par  $|\mathcal{A}|$  le cardinal de  $\mathcal{A}$  et par  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$  l'ensemble des entiers qui peuvent être représentés comme la somme d'exactly  $k$  éléments distincts de  $\mathcal{A}$ , et nous écrirons  $P(\mathcal{A}, k) = |\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)|$ . Dire que  $\mathcal{A}$  est admissible équivaut à dire que

$$k \neq \ell \quad \Rightarrow \quad P(\mathcal{A}, k) \cap P(\mathcal{A}, \ell) = \emptyset.$$

En d'autres termes,  $\mathcal{A}$  est admissible si la somme des éléments d'une partie de  $\mathcal{A}$  détermine le cardinal de cette partie.

---

Manuscrit reçu le 30 octobre 1990.

(1) Recherche partiellement financée par la Fondation Nationale Hongroise pour la Recherche Scientifique, contrat n° 1811 et par le C.N.R.S. SDI 5614 et PRC Mathématiques-Informatique.

P. Erdős ([1]) a posé et étudié le problème suivant : Quel est le cardinal maximum  $F(N)$  d'une partie admissible  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{N}_N$  ? Ses résultats ont été améliorés par E.G. Straus ([2]), qui a démontré :

$$(i)(1) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} F(N)N^{-1/2} \leq 4/\sqrt{3} \quad (= 2.309401\dots).$$

De plus, Erdős a conjecturé que le cardinal maximum  $F(N)$  est atteint lorsque  $\mathcal{A}$  est formé d'entiers consécutifs incluant  $N$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \{N - F(N) + i ; 1 \leq i \leq F(N)\}.$$

En rapport avec cette conjecture, Straus a démontré :

(ii) L'ensemble  $\mathcal{A} = \{N - k + 1, N - k + 2, \dots, N\}$  est admissible pour  $k = 2m - 1$  si  $m^2 \leq N < m^2 + m$  et pour  $k = 2m$  si  $m^2 + m \leq N < (m + 1)^2$ .

Ceci implique :

$$(2) \quad \liminf_{N \rightarrow +\infty} F(N) N^{-1/2} \geq 2.$$

Nous nous proposons dans cet article d'étendre et de préciser les résultats de Erdős et Straus. D'abord, nous améliorons la borne supérieure de (i). Ensuite, au paragraphe 4, à l'aide des tables numériques construites par J.-P. Massias et M. Deléglise, que nous avons plaisir à remercier ici, nous ferons des conjectures sur ce problème. Finalement, nous étudierons les ensembles infinis admissibles, dans le cinquième paragraphe.

**2. THÉORÈME 1.** On a :

$$(3) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} F(N)N^{-1/2} \leq (143/27)^{1/2} \quad (= 2.301368\dots).$$

Il serait possible d'améliorer ce résultat par une application plus élaborée de nos idées. Cependant, il semble impossible d'obtenir de cette façon la limite conjecturée :  $\limsup F(N)N^{-1/2} = 2$  et en fait, une nouvelle idée semble nécessaire pour donner une borne supérieure plus petite que 2.2.

Pour démontrer le théorème 1, nous avons besoin de deux lemmes.

**LEMME 1.** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble fini, et  $k \in \mathbb{N}$  vérifiant  $k \leq |\mathcal{A}|$ . Alors on a :

$$P(\mathcal{A}, k) \geq k(|\mathcal{A}| - k) + 1.$$

*Démonstration.* C'est le théorème 2 de Straus [2], qui se démontre facilement par récurrence sur  $|\mathcal{A}|$ .

Nous utiliserons le théorème 4 de Straus sous la forme suivante :

LEMME 2. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On a :

$$(4) \quad F(N) < \frac{4}{\sqrt{3}}N^{1/2} + 1$$

*Démonstration.* Nous suivons la preuve de Straus. Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_N$  un ensemble admissible. Il est clair que les éléments de  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$  sont inférieurs à  $kN$ . Donc, pour  $x \geq 1$ , nous avons par le lemme 1 :

$$\begin{aligned} xN &\geq \left| \bigcup_{k=1}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k) \right| = \sum_{k=1}^x P(\mathcal{A}, k) \\ &\geq \sum_{k=1}^x (k(|\mathcal{A}| - k) + 1) = |\mathcal{A}| \frac{x(x+1)}{2} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + x \end{aligned}$$

d'où il vient, en posant  $x = [3|\mathcal{A}|/4]$  (la notation  $[u]$  désigne la partie entière de  $u$ )

$$\begin{aligned} (5) \quad 6(N-1) &\geq 3|\mathcal{A}|(x+1) - (x+1)(2x+1) \\ &> 3|\mathcal{A}| \cdot \frac{3|\mathcal{A}|}{4} - \left(3\frac{|\mathcal{A}|}{4} + 1\right) \left(2\frac{3|\mathcal{A}|}{4} + 1\right) \\ &= \frac{9}{8}|\mathcal{A}|^2 - \frac{9}{4}|\mathcal{A}| - 1 = \frac{9}{8}|\mathcal{A}|(|\mathcal{A}| - 2) - 1. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'on ait :

$$|\mathcal{A}| \geq \frac{4}{\sqrt{3}}N^{1/2} + 1$$

contrairement à (4). Cela impliquerait

$$\begin{aligned} \frac{9}{8}|\mathcal{A}|(|\mathcal{A}| - 2) - 1 &\geq \frac{9}{8} \left( \frac{4}{\sqrt{3}}N^{1/2} + 1 \right) \left( \frac{4}{\sqrt{3}}N^{1/2} - 1 \right) - 1 \\ &= 6N - \frac{9}{8} - 1 > 6(N-1) \end{aligned}$$

ce qui contredit (5), et achève la preuve du lemme 2.

### 3. Démonstration du Théorème 1.

Nous distinguerons 3 cas. Soit  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_y\} \subset \mathbb{N}_N$ , ( $a_1 < a_2 < \dots < a_y$ ) un ensemble admissible. On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{a ; a \in \mathcal{A}, a \leq N/2\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{a ; a \in \mathcal{A}, N/2 < a \leq 17N/18\} \\ \text{et } \mathcal{A}_3 &= \{a ; a \in \mathcal{A}, 17N/18 < a\}. \end{aligned}$$

PREMIER CAS. On suppose que

$$(6) \quad |\mathcal{A}_3| < \frac{21}{32}y = \frac{21}{32}|\mathcal{A}|.$$

Comme dans la démonstration du lemme 2, nous partons de la relation  $|\bigcup_{k=1}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)| = \sum_{k=1}^x P(\mathcal{A}, k)$  avec toujours  $x = \lfloor 3y/4 \rfloor$ . Le plus grand élément de  $\bigcup_{k=1}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$  est évidemment le plus grand élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, x)$ , et par (6), il vaut

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{x-1} a_{y-j} &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}_3} a + (x - |\mathcal{A}_3|) \frac{17N}{18} \\ &\leq |\mathcal{A}_3|N + (x - |\mathcal{A}_3|) \frac{17N}{18} = |\mathcal{A}_3| \frac{N}{18} + x \frac{17N}{18} \\ &< \frac{21}{32}y \frac{N}{18} + \frac{17}{18}xN = \frac{3}{4}y \frac{7}{144}N + \frac{17}{18}xN \\ &< (x+1) \frac{7}{144}N + \frac{17}{18}xN < \frac{143}{144}xN + \frac{N}{20}. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{k=1}^x P(\mathcal{A}, k) = \left| \bigcup_{k=1}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k) \right| < \frac{143}{144}xN + \frac{N}{20}.$$

Par le lemme 1, ceci entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{143}{144}xN + \frac{N}{20} &> \sum_{k=1}^x P(\mathcal{A}, k) \geq \sum_{k=1}^x (k(y-k) + 1) \\ &= y \sum_{k=1}^x k - \sum_{k=1}^x k^2 + x = y \frac{x(x+1)}{2} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + x \end{aligned}$$

et en utilisant  $x = [3y/4]$ ,

$$\frac{143}{144} \frac{3}{4} yN + O(N) > \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 y^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 y^3 + O(y^2).$$

Nous avons donc, lorsque  $y \rightarrow \infty$ ,

$$y^2 < (1 + o(1)) \frac{143}{192} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{-1} N = ((1 + o(1)) \frac{143}{27}) N$$

et pour  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$(7) \quad y < (1 + o(1)) \left(\frac{143}{27} N\right)^{1/2}.$$

## DEUXIÈME CAS.

On suppose que

$$(8) \quad |\mathcal{A}_3| \geq \frac{21}{32} y$$

et

$$(9) \quad |\mathcal{A}_1| < \frac{1}{32} y.$$

Posons  $z = [\frac{3}{32} y] + 1$ . Le plus petit élément de  $\bigcup_{k=z}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$  est le plus petit élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, z)$  et vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^z a_j &= \sum_{j=1}^{|\mathcal{A}_1|} a_j + \sum_{j=|\mathcal{A}_1|+1}^z a_j > \sum_{j=|\mathcal{A}_1|+1}^z N/2 \\ &= (z - |\mathcal{A}_1|) \frac{N}{2} > \left(\frac{3}{32} y - \frac{1}{32} y\right) \frac{N}{2} = \frac{yN}{32}, \end{aligned}$$

en utilisant (9). Par ailleurs, le plus grand élément de  $\bigcup_{k=z}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$  est

$$\sum_{j=0}^{x-1} a_{y-j} \leq \sum_{j=0}^{x-1} N = xN \leq \frac{3}{4} yN,$$

et donc

$$\bigcup_{k=z}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k) \subset \left[\frac{yN}{32}, \frac{3}{4} yN\right].$$

Puisque  $\mathcal{A}$  est admissible, ceci entraîne,

$$(10) \quad \sum_{k=z}^x P(\mathcal{A}, k) = \left| \bigcup_{k=z}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k) \right| < \frac{3}{4}yN - \frac{1}{32}yN + 1 \\ = \frac{23}{32}yN + 1.$$

Maintenant, par le lemme 1, nous obtenons la minoration :

$$(11) \quad \sum_{k=z}^x P(\mathcal{A}, k) \geq \sum_{k=z}^x (k(y-k) + 1) = y \sum_{k=z}^x k - \sum_{k=z}^x k^2 + x - z + 1 \\ = y \frac{x(x+1) - (z-1)z}{2} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + \frac{(z-1)z(2z-1)}{6} + x - z + 1 \\ = \frac{1}{2}y \left( \left(\frac{3}{4}y\right)^2 - \left(\frac{3}{32}y\right)^2 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}y\right)^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{32}y\right)^3 + O(y^2) \\ = \frac{4473}{32768}y^3 + O(y^2).$$

On déduit de (10) et (11) que :

$$\frac{23}{32}N > \frac{4473}{32768}y^2 + O(y)$$

d'où il vient lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,

$$(12) \quad y < (1 + o(1)) \left( \frac{23552}{4473}N \right)^{1/2} \quad (= (1 + o(1))2.294639\dots N^{1/2}).$$

TROISIÈME CAS. Nous supposons maintenant

$$(13) \quad |\mathcal{A}_3| \geq \frac{21}{32}y$$

et

$$(14) \quad |\mathcal{A}_1| \geq \frac{1}{32}y.$$

Posons  $u = \lfloor y/32 \rfloor$ . Nous allons d'abord minorer  $P(\mathcal{A}, k)$  lorsque

$$(15) \quad u \leq k < 9u.$$

Considérons toutes les sommes de la forme

$$(16) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_u + a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_{k-u}}$$

avec

$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{k-u}}$ , et  $a_{i_j} \in \mathcal{A}_3$  pour  $j = 1, 2, \dots, k - u$ . Le nombre de sommes de cette forme est  $P(\mathcal{A}_3, k - u)$  et par (14) et (15) chacune de ces sommes ne dépasse pas

$$u \frac{N}{2} + (k - u)N = (k - \frac{u}{2})N < (k - \frac{k}{18})N = \frac{17}{18}kN.$$

De plus, pour

$$(17) \quad a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_k} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_3, k)$$

nous avons

$$a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_k} > k \frac{17N}{18} = \frac{17}{18}kN$$

et les sommes dans (17) sont ainsi plus grandes que les sommes dans (16). Par ailleurs, les sommes dans (16) et dans (17) appartiennent à  $\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$ . Ainsi,  $P(\mathcal{A}, k)$  est supérieur ou égal au nombre total des sommes dans (16) et dans (17) :

$$P(\mathcal{A}, k) \geq P(\mathcal{A}_3, k - u) + P(\mathcal{A}_3, k) \quad (\text{pour } u \leq k < 9u).$$

D'où il vient par (13) et le lemme 1 :

$$(18) \quad \begin{aligned} P(\mathcal{A}, k) &\geq (k - u)(|\mathcal{A}_3| - (k - u)) + 1 + k(|\mathcal{A}_3| - k) + 1 \\ &= (2k - u)|\mathcal{A}_3| - 2k^2 + 2ku - u^2 + 2 \\ &> (2k - \frac{y}{32})\frac{21}{32}y - 2k^2 + 2k(\frac{y}{32} - 1) - (\frac{y}{32})^2 \\ &= (\frac{11}{8}y - 2)k - \frac{11}{512}y^2 - 2k^2 \quad (\text{pour } u \leq k < 9u). \end{aligned}$$

Le plus grand élément de  $\bigcup_{k=1}^x \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$  est  $\leq xN$  (où, comme précédemment,  $x = [3y/4]$ ), et comme  $\mathcal{A}$  est admissible,

$$\sum_{k=1}^x P(\mathcal{A}, k) \leq xN.$$



Par le lemme 1 et (18) nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}yN &\geq xN \geq \sum_{k=1}^x (k(y-k) + 1) \\
&+ \sum_{k=u}^{9u-1} \left( \left( \left( \frac{11}{8}y - 2 \right)k - \frac{11}{512}y^2 - 2k^2 \right) - k(y-k) - 1 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{[3y/4]} (k(y-k) + 1) + \sum_{k=u}^{9u-1} \left( \left( \frac{3}{8}y - 2 \right)k - \frac{11}{512}y^2 - k^2 - 1 \right) \\
&= y \sum_{k=1}^{[3y/4]} k - \sum_{k=1}^{[3y/4]} k^2 + O(y) + \frac{3}{8}y \sum_{k=u}^{9u-1} k - \frac{11}{512}y^2 \cdot 8u - \sum_{k=u}^{9u-1} k^2 + O(y^2) \\
&= \frac{1}{2}y \left( \frac{3y}{4} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{3y}{4} \right)^3 + \frac{3}{8}y \cdot \frac{1}{2}80u^2 - \frac{11}{64}y^2u - \frac{728}{3}u^3 + O(y^2) \\
&= \left( \frac{9}{32} - \frac{9}{64} + 15 \cdot \frac{1}{32^2} - \frac{11}{64} \cdot \frac{1}{32} - \frac{728}{3} \cdot \frac{1}{32^3} \right) y^3 + O(y^2) \\
&= \frac{1751}{12288}y^3 + O(y^2)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(19) \quad y \leq ((1 + o(1)) \left( \frac{9216}{1751}N \right)^{1/2}) (= 1 + o(1))2.294183\dots N^{1/2}.$$

La démonstration du théorème 1 résulte alors de (7), (12) et (19).

#### 4. Quelques conjectures

Il est commode de définir :

$$g(N) = [2\sqrt{N + 1/4} - 1].$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\text{pour } m^2 \leq N < m(m+1) & \quad g(N) = 2m - 1 \\
\text{pour } m(m+1) \leq N < (m+1)^2 & \quad g(N) = 2m.
\end{aligned}$$

Nous dirons ensuite qu'un ensemble admissible  $\mathcal{A}$  est  $N$ -optimal si  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_N$ , et  $|\mathcal{A}| = F(N)$ . Nous noterons  $p(N)$  le nombre d'ensembles admissibles

$N$  optimaux, et par  $a(N)$  le nombre d'ensembles admissibles non vides  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_N$ .

Nous dirons aussi qu'un ensemble  $\mathcal{A}$  est impair si tous les éléments de  $\mathcal{A}$  sont impairs. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si  $\mathcal{A}$  contient un nombre pair, nous dirons que  $\mathcal{A}$  est non impair. Nous définissons

$$h(N) = \min_{\mathcal{A} \in E_N} (\min \mathcal{A})$$

où  $\mathcal{A}$  parcourt l'ensemble  $E_N$  des ensembles admissibles  $N$ -optimaux et non impairs. Si  $E_N = \emptyset$ , alors  $h(N) = +\infty$ .

J.-P. Massias et M. Deléglise ont donné la liste des ensembles  $N$ -optimaux pour  $N \leq 50$ , et l'on trouvera un extrait de leurs résultats dans la table en annexe. Ces calculs sur ordinateur montrent un comportement très régulier qui nous conduit aux conjectures suivantes :

**CONJECTURE 1.** *On a pour tout  $N \geq 1$*

$$F(N) = g(N) = [2\sqrt{N + 1/4} - 1],$$

*et l'ensemble (ii) de Straus est  $N$ -optimal.*

**Conjecture 2.** *Lorsque  $N$  est de la forme  $m^2$  ou  $m(m + 1)$ , on a  $p(N) = 1$ , autrement dit l'ensemble (ii) de Straus est le seul ensemble admissible  $N$ -optimal. De façon plus générale, soit  $t \geq 0$ . Il existe deux fonctions  $m_0(t)$  et  $q(t)$  telles que, pour  $m \geq m_0(t)$  on ait*

$$p(m^2 + t) = p(m(m + 1) + t) = q(t)$$

*et l'on a  $q(0) = 1$ ,  $q(1) = 2$ ,  $q(2) = 5$ .*

**Conjecture 3.** *Les ensembles admissibles  $N$ -optimaux impairs sont :*

$\mathcal{A}_1 = \{N, N - 2, \dots, N - 2g(N) + 2\}$  lorsque  $N = m^2 - 2$  et  $m$  impair, lorsque  $N = m^2 - 1$  et  $m$  pair et lorsque  $N = m(m + 1) - 1$  et

$\mathcal{A}_2 = \{N, N - 2, \dots, N - 2g(N) + 4, N - 2g(N)\}$  lorsque  $N = m^2 - 1$  avec  $m$  pair et lorsque  $N = m(m + 1) - 1$ .

Il est facile de voir que les ensembles ci-dessus ont  $g(N)$  éléments et sont admissibles, et donc sous réserve de la conjecture 1 sont  $N$ -optimaux.

De façon plus générale on peut caractériser les progressions arithmétiques admissibles

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(k, r, N) = \{N, N - r, \dots, N - (k - 1)r\}$$

avec  $r \geq 1$ ,  $k \geq 1$  et  $(N, r) = 1$  par la condition :

$$(k + r)^2 \leq 4N + 2r(r + 1) - 3.$$

Ce résultat se démontre comme (ii) en observant que, comme  $(N, r) = 1$ , il suffit de comparer la somme des  $j$  plus grands termes de  $\mathcal{A}$  avec la somme des  $(j + r)$  plus petits termes de  $\mathcal{A}$ , et ceci pour  $1 \leq j \leq k - r$ .

Un calcul un peu technique montre que pour  $r \geq 3$ ,  $\mathcal{A}(g(N), r, N)$  n'est pas admissible, et pour  $r = 2$  et  $N$  impair,  $\mathcal{A}(g(N), 2, N)$  est admissible seulement dans les cas décrits à la conjecture 3.

**Conjecture 4.** Pour  $N \geq 16$ , la fonction  $N \mapsto h(N)$  est constante sur les intervalles  $(m^2, m(m + 1) - 1)$  et  $(m(m + 1), (m + 1)^2 - 1)$ . On a de plus  $h(m^2) = m^2 - 2m + 2$  et  $h(m(m + 1)) = m^2 - m + 1$ .

**Comportement de  $a(N)$ .** Il est clair que toute partie d'un ensemble admissible est admissible. Il résulte donc de (ii) que

$$a(N) \geq 2^{g(N)} - 1 \geq 2^{2\sqrt{N}-2} - 1.$$

Par ailleurs, il résulte du lemme 2, en posant  $k = [\frac{4}{\sqrt{3}}N^{1/2} + 1]$ , que

$$a(N) \leq \sum_{j=0}^k \binom{N}{j} \leq N \binom{N}{k} \leq N \left(\frac{Ne}{k}\right)^k \leq \exp(c\sqrt{N} \log N)$$

pour un certain  $c$ .

Il nous semble difficile de préciser davantage le comportement de  $a(N)$ . L'étude de la table numérique laisse penser que

$$\log a(N) \asymp \sqrt{N \log N},$$

mais nous conjecturons cependant que l'on a  $\log a(N) \asymp \sqrt{N}$ .

### 5. Suites infinies.

Nous allons maintenant étudier les ensembles infinis admissibles. Si  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ , et  $x > 0$ , on pose

$$A(x) = \sum_{n \in \mathcal{A}, n \leq x} 1$$

et nous conjecturons que si  $\mathcal{A}$  est admissible, alors

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} A(x)x^{-1/2} = 0.$$

(La limite ci-dessus est finie par (1).) Malheureusement nous n'avons pas été capables de le démontrer.

Par ailleurs, Erdős [1] a démontré qu'il existe  $c > 0$  (la valeur de  $c$  n'est pas précisée) et un ensemble infini admissible  $\mathcal{A}$  tel que

$$A(x) > x^c \text{ pour } x > x_0.$$

Peut-être est-il possible d'obtenir

$$A(x) \gg x^{1/2-\epsilon}.$$

Nous prouvons seulement le résultat plus faible :

**THÉORÈME 2.** *Il existe un ensemble infini admissible  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$  vérifiant pour  $x > x_0$  :*

$$(20) \quad A(x) \gg x^{5-2\sqrt{6}} \quad (= x^{0.10102\dots})$$

*Démonstration.* Soit  $x_0 = 0$ , et pour  $N = 1, 2, \dots$ , posons  $x_N = K^{((2+\sqrt{6})/2)^N}$ , avec  $K = 40$ .

Par récurrence nous allons définir les ensembles de nombres entiers positifs  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  vérifiant

$$(21) \quad \mathcal{A}_N \subset ]x_{N-1}, x_N].$$

Lorsque  $N = 1$ , on pose  $T_1 = 1$  et

$$\mathcal{A}_1 = \{[x_1] - i ; 1 \leq i \leq x_1^{(\sqrt{6}-2)/2}\}.$$

Pour  $N \geq 2$ , supposant construits  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{N-1}$ , on pose

$$T_N = \sum_{n=1}^{N-1} \left( \sum_{a \in \mathcal{A}_n} a \right) + 1$$

et

$$\mathcal{A}_N = \{T_N[x_N/T_N] - iT_N ; 1 \leq i \leq x_N^{(\sqrt{6}-2)/2}\}.$$

Maintenant nous allons démontrer l'inclusion (21) pour tout  $N$ . On remarque d'abord que, pour  $N \geq 1$ , on a :

$$(22) \quad x_{N-1} \leq \frac{1}{K}x_N \quad \text{et} \quad x_N \geq K.$$

De plus, d'après la définition de  $\mathcal{A}_N$ , on a :

$$(23) \quad \mathcal{A}_N \subset ]x_N - (1 + x_N^{(\sqrt{6}-2)/2})T_N, x_N].$$

En tenant compte de (22) et (23), il suffit de démontrer

$$(24) \quad (x_N^{(\sqrt{6}-2)/2} + 1)T_N < \frac{K-1}{K}x_N$$

pour démontrer (21).

Or (24) se vérifie numériquement lorsque  $N = 1$ . Pour  $N > 1$ , les définitions de  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{N-1}$  et  $T_N$  entraînent, par (22)

$$\begin{aligned} (25) \quad T_N &\leq \sum_{n=1}^{N-1} |\mathcal{A}_n| x_n + 1 \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n^{(\sqrt{6}-2)/2} x_n = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n^{\sqrt{6}/2} \\ &\leq x_{N-1}^{\sqrt{6}/2} \left( 1 + \frac{1}{K} + \dots + \frac{1}{K^{N-2}} + \frac{1}{x_{N-1}} \right) \leq x_{N-1}^{\sqrt{6}/2} \left( \frac{K}{K-1} + \frac{1}{K} \right) \\ &\leq \frac{K+1}{K-1} x_{N-1}^{\sqrt{6}/2} = \frac{K+1}{K-1} (x_N^{(2/(2+\sqrt{6}))})^{\sqrt{6}/2} = \frac{K+1}{K-1} x_N^{\sqrt{6}/(\sqrt{6}+2)}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$x_N^{(\sqrt{6}-2)/2} T_N \leq \frac{K+1}{K-1} x_N^{(\sqrt{6}-2)/2 + \sqrt{6}/(\sqrt{6}+2)}$$

$$= \frac{K+1}{K-1} x_N^{1-1/(\sqrt{6}+2)} \leq \frac{K+1}{K-1} K^{-1/(\sqrt{6}+2)} x_N$$

d'où l'on déduit (24) en vérifiant numériquement que

$$2 \frac{K+1}{K-1} K^{-1/(\sqrt{6}+2)} \leq \frac{K-1}{K}.$$

On pose  $\mathcal{A} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{A}_N$ . Nous allons montrer que cet ensemble est admissible et qu'il vérifie (20).

D'abord nous allons montrer que pour tout  $N$ , l'ensemble  $\mathcal{A}_N$  est admissible. Il suffit pour cela de montrer que pour  $1 \leq k \leq |\mathcal{A}_N| - 1$ ,

$$(26) \quad r \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_N, k), \quad s \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_N, k+1),$$

on a

$$(27) \quad r < s.$$

On pose  $y_N = T_N[x_N/T_N]$  et

$$(28) \quad z_N = |\mathcal{A}_N| = [x_N^{(\sqrt{6}-2)/2}].$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} s - r &\geq (y_N - z_N T_N) + (y_N - (z_N - 1) T_N) + \dots + (y_N - (z_N - k) T_N) \\ &\quad - (y_N + (y_N - T_N) + \dots + (y_N - (k-1) T_N)) \\ &= (y_N - (k+1) z_N T_N) + \left( \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k-1)k}{2} \right) T_N \\ &= y_N - (k+1) z_N T_N + k^2 T_N \stackrel{\text{def}}{=} f(k). \end{aligned}$$

Le minimum du trinôme  $f(k)$  est atteint en  $k = z_N/2$  et donc

$$(29) \quad \begin{aligned} s - r &\geq f(z_N/2) = y_N - \left( \frac{z_N}{2} + 1 \right) z_N T_N + \frac{z_N^2}{4} T_N \\ &= y_N - \left( \frac{z_N^2}{4} + z_N \right) T_N \geq x_N - \left( \frac{z_N^2}{4} + z_N + 1 \right) T_N. \end{aligned}$$

Par (25) et (28), (29) devient :

$$\begin{aligned}
 s - r &\geq x_N - \left( \frac{x_N^{\sqrt{6}-2}}{4} + x_N^{(\sqrt{6}-2)/2} + 1 \right) \frac{K+1}{K-1} x_N^{\sqrt{6}/(\sqrt{6}+2)} \\
 &= x_N \left( 1 - \frac{K+1}{K-1} \left( \frac{1}{4} + x_N^{-1/(2+\sqrt{6})} + x_N^{-2/(2+\sqrt{6})} \right) \right) \\
 &\geq x_N \left( 1 - \frac{K+1}{K-1} \left( \frac{1}{4} + K^{-1/(2+\sqrt{6})} + K^{-2/(2+\sqrt{6})} \right) \right) \\
 &\geq 7x_N/100 > 0
 \end{aligned}$$

ce qui prouve (27), et donc que pour tout  $N \geq 1$ ,  $\mathcal{A}_N$  est admissible.

Nous devons montrer maintenant que l'ensemble  $\mathcal{A} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{A}_N = \{a_1 < a_2 < \dots\}$  est aussi admissible. Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $\mathcal{A}$  a deux sous-ensembles de mêmes sommes, avec un nombre différent d'éléments, c'est-à-dire qu'il existe des entiers  $i_1 < i_2 < \dots < i_u, j_1 < j_2 < \dots < j_v$  tels que

$$(30) \quad \sum_{k=1}^u a_{i_k} = \sum_{k=1}^v a_{j_k}, \quad u \neq v.$$

Nous pouvons supposer que  $i_u \leq j_v$ , et que  $a_{i_1}, \dots, a_{i_u}, a_{j_1}, \dots, a_{j_v}$  (avec  $u \neq v$ ) est une solution telle que  $j_v = \max(i_u, j_v)$  est minimal. On définit  $N$  par  $a_{j_v} \in \mathcal{A}_N$  (on a évidemment  $N \geq 2$ ) et soit  $u'$  et  $v'$  les plus grands nombres tels que

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{u'}}\} \subset \bigcup_{n=1}^{N-1} \mathcal{A}_n$$

(et l'on a, ou bien  $u' = u$ , ou bien  $a_{i_{u'+1}} \in \mathcal{A}_N$ ) et

$$\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{v'}}\} \subset \bigcup_{n=1}^{N-1} \mathcal{A}_n;$$

si l'on a  $a_{i_1} \in \mathcal{A}_N$ , on pose  $u' = 0$ . Alors  $T_n | a_{i_k}$  pour  $u' < k \leq u$  et  $T_N | a_{j_k}$  pour  $v' < k \leq v$ , et (30) entraîne

$$(31) \quad \sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} \equiv \sum_{k=1}^{v'} a_{j_k} \pmod{T_N}.$$

De plus, nous avons

$$(32) \quad \left| \sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} - \sum_{k=1}^{v'} a_{j_k} \right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{a \in \mathcal{A}_n} a < T_N.$$

Par (31) et (32), il vient

$$(33) \quad \sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} = \sum_{k=1}^{v'} a_{j_k}$$

et tous les termes ci-dessus appartiennent à  $\bigcup_{n=1}^{N-1} \mathcal{A}_n$ . Mais  $j_v$  a été choisi minimum ; cela implique

$$(34) \quad u' = v'.$$

On a ensuite par (30), (33) et (34)

$$\sum_{k=u'+1}^u a_{i_k} = \sum_{k=v'+1}^v a_{i_k}$$

et les nombres de termes dans les deux sommes ci-dessus sont différents :  $u - u' \neq v - v'$ . De plus tous ces termes appartiennent à  $\mathcal{A}_N$ , mais ceci est impossible puisque nous avons démontré que  $\mathcal{A}_N$  est admissible. Cette contradiction termine la preuve que  $\mathcal{A}$  est admissible.

Il reste à démontrer (20). Pour  $x > x_1$ , on définit  $N$  par  $x_{N-1} < x \leq x_N$ . D'après la définition de  $\mathcal{A}$ , nous avons

$$\begin{aligned} A(x) &\geq A(x_{N-1}) \geq |\mathcal{A}_{N-1}| = [x_{N-1}^{(\sqrt{6}-2)/2}] = \\ &= [(x_N^{2/(2+\sqrt{6})})^{(\sqrt{6}-2)/2}] = [x_N^{5-2\sqrt{6}}] > x_N^{5-2\sqrt{6}} - 1 \end{aligned}$$

et cela achève la démonstration du théorème 2.



Table numérique

$N$	$a(N)$	$F(N)$	$p(N)$	<i>Nombre de solutions impaires N-optimales</i>	$h(N)$
1	1	1	1		1
2	3	2	1		1
3	6	2	2	1	2
4	12	3	2		1
5	21	3	4	1	1
6	36	4	1		3
7	59	4	4	1	2
8	98	4	13		1
9	152	5	1		5
10	241	5	5		2
11	362	5	10	2	3
12	545	6	1		7
13	794	6	2		7
14	1165	6	5		7
15	1650	6	13	2	6
16	2378	7	1		10
17	3315	7	2		10
18	4621	7	6		10
19	6335	7	14	2	10
20	8742	8	1		13
21	11688	8	2		13
22	15792	8	5		13
23	20918	8	11	1	13
24	27713	8	20		13
25	36260	9	1		17

.../...

$N$	$a(N)$	$F(N)$	$p(N)$	Nombre de solutions impaires $N$ -optimales	$h(N)$
26	47479	9	2		17
27	61065	9	5		17
28	79139	9	11		17
29	101145	9	23	2	17
30	128998	10	1		21
31	163421	10	2		21
32	207304	10	5		21
33	259298	10	10		21
34	325692	10	20		21
35	405614	10	38	2	21
36	503625	11	1		26
37	622853	11	2		26
38	769232	11	5		26
39	941482	11	10		26
40	1156143	11	21		26
41	1410171	11	39	2	26
42	1711663	12	1		31
43	2076250	12	2		31
44	2513965	12	5		31
45	3023894	12	10		31
46	3639397	12	20		31
47	4366367	12	37	1	31
48	5212730	12	65		31
49	6225734	13	1		37
50	7413601	13	2		37

## REFERENCES

- [1] P. ERDŐS, *Számelméleti megjegyzések, III*, Mat. Lapok 13 (1962), 28–38.  
 [2] E.G. STRAUS, *On a problem in combinatorial number theory*, J. Math. Sci. I (1966), 77–80.

P. Erdős, A. Sárközy  
 Magyar Tudományos Akadémia

Matematikai Kutató Intézet

Reáltanoda utca 13-15

PF 127

H-1364 BUDAPEST V - HONGRIE.

et

J.-L. NICOLAS

Departement de Mathématiques, bât. 101

Université Claude Bernard, Lyon 1

F-69622 VILLEURBANNE Cedex - FRANCE.