ELSEVIER

Discrete Mathematics 200 (1999) 27–48

DISCRETE MATHEMATICS

Sur les ensembles représentés par les partitions d'un entier n [1]

Marc Deléglise, Paul Erdős, Jean-Louis Nicolas*

Institut Girard Desargues (UPRES-A 5028 du CNRS) UFR de Mathématiques, Université Lyon 1, 43 Bld du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

Received 27 May 1997; revised 11 December 1997; accepted 12 December 1997

Marc Deléglise et Jean-Louis Nicolas dédient cet article à la mémoire de Paul Erdős

Abstract

Let $n=n_1+n_2+\cdots+n_j$ a partition Π of n. One will say that this partition *represents* the integer a if there exists a subsum $n_{i_1}+n_{i_2}+\cdots+n_{i_l}$ equal to a. The set $\mathscr{E}(\Pi)$ is defined as the set of all integers a represented by Π. Let $\mathscr{A}$ be a subset of the set of positive integers. We denote by $p(\mathscr{A},n)$ the number of partitions of n with parts in $\mathscr{A}$, and by $\hat{p}(\mathscr{A},n)$ the number of distinct sets represented by these partitions. Various estimates for $\hat{p}(\mathscr{A},n)$ are given. Two cases are more specially studied, when $\mathscr{A}$ is the set $\{1,2,4,8,16,\ldots\}$ of powers of 2, and when $\mathscr{A}$ is the set of all positive integers. Two partitions of n are said to be *equivalent* if they represent the same integers. We give some estimations for the minimal number of parts of a partition equivalent to a given partition.

1. Introduction

Soit

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_j$$

une partition Π de n, ou, plus généralement, $(n_1,n_2,\ldots,n_j)$ une suite finie d'entiers. On dit que cette suite *représente l'entier naturel a* s'il existe $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_j\in\{0,1\}$ tels que $a=\sum_{i=1}^{j}\varepsilon_i n_i$. L'ensemble $\mathscr{E}(\Pi)$ représenté par la partition Π est l'ensemble des nombres a représentés par la suite $(n_1,n_2,\ldots,n_j)$. Il est évidemment contenu dans $[0,n]$, et symétrique (si il contient a, il contient $n-a$). On dira aussi que deux suites finies $(x_1,x_2,\ldots,x_i)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_j)$ sont *équivalentes* si elles représentent les mêmes entiers.

* Corresponding author. E-mail: jlnicola@in2p3.fr.

[1] Recherche partiellement financée par le CNRS et le contrat européen COPERNICUS CT92-4022.

PII: S0012-365X(98)00330-6

On dira qu'une partition est *k-réduite* si chaque sommant apparait au plus k fois.

Nous désignerons par $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\dots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, et par $\mathscr{A}$ un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$, et nous utiliserons les notations suivantes:

— $p(\mathscr{A},n)$ est le nombre des partitions dont les sommants sont dans $\mathscr{A}$,

— $q(\mathscr{A},n,k)$ est le nombre des partitions k–réduites dont chaque sommant appartient à $\mathscr{A}$.

Les séries génératrices sont donc:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(\mathscr{A},n)x^n = \prod_{m\in\mathscr{A}} \frac{1}{1-x^m},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(\mathscr{A},n,k)x^n = \prod_{m\in\mathscr{A}} (1+x^m+\cdots+x^{km}) = \prod_{m\in\mathscr{A}} \frac{1-x^{(k+1)m}}{1-x^m}.$$

Lorsque $k=1$, nous noterons

$$q(\mathscr{A},n)=q(\mathscr{A},n,1),$$

et lorsque $\mathscr{A}=\mathbb{N}^*$, nous poserons

$$p(n)=p(\mathbb{N}^*,n),$$
$$q(n)=q(\mathbb{N}^*,n), \quad q(n,k)=q(\mathbb{N}^*,n,k).$$

On dit qu'une partition Π est *pratique* si elle représente tout entier a compris entre 0 et n, autrement dit si $\mathscr{E}(\Pi)=\{0,1,2,\dots,n\}$. Nous noterons $\tilde{p}(\mathscr{A},n)$ le nombre des partitions de n à sommants dans $\mathscr{A}$ qui sont pratiques. Lorsque $\mathscr{A}=\mathbb{N}^*$, nous noterons $\tilde{p}(n)=\tilde{p}(\mathbb{N}^*,n)$. Il a été démontré par Erdős et Szalay (cf. [7,3]) que lorsque $\mathscr{A}=\mathbb{N}^*$ presque toutes les partitions de n sont pratiques, autrement dit on a

$$\tilde{p}(n)\sim p(n), \quad n\to\infty. \tag{1}$$

Nous désignerons par $\hat{p}(\mathscr{A},n)$ (resp. $\hat{q}(\mathscr{A},n,k)$) le nombre d'ensembles distincts représentés par les $p(\mathscr{A},n)$ (resp. $q(\mathscr{A},n,k)$) partitions (resp. partitions k-réduites) de n. Avec la notion d'équivalence de partitions définie ci dessus, $\hat{p}(\mathscr{A},n)$ (resp. $\hat{q}(\mathscr{A},n,k)$) est aussi le nombre des classes d'équivalence des partitions de n à sommants dans $\mathscr{A}$ (resp. à sommants dans $\mathscr{A}$ et k-réduites). Il sera commode de poser

$$\hat{p}(\mathscr{A},0)=\hat{q}(\mathscr{A},0,k)=1.$$

Comme précédemment nous poserons $\hat{p}(n)=\hat{p}(\mathbb{N}^*,n)$ et $\hat{q}(n)=\hat{q}(\mathbb{N}^*,n,1)$. Il résulte de (1) que $\hat{p}(n)=o(p(n))$, et il est prouvé dans [12] que

$$p(n)^{0.361}\leqslant \hat{p}(n)\leqslant p(n)^{0.948} \tag{2}$$

pour n assez grand.

Soit $\mathscr{B} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$ l'ensemble des puissances de 2. Nous noterons pour simplifier

$$b(n) = p(\mathscr{B}, n), \quad \hat{b}(n) = \hat{p}(\mathscr{B}, n), \quad \tilde{b}(n) = \tilde{p}(\mathscr{B}, n).$$

Dans [4] il est démontré que

$$\tilde{b}(n) \sim b(n), \quad n \to \infty \tag{3}$$

et

$$\tilde{b}(n) = b(n), \quad \text{pour } n = 2^j - 1, \quad j \geqslant 1, \tag{4}$$

et de plus on donne un exemple d'ensemble $\mathscr{A}$ dû à D. Hickerson qui vérifie

$$\liminf \tilde{p}(\mathscr{A}, n)/p(\mathscr{A}, n) = 0.$$

Nous avons commencé à travailler au présent article lors du séjour à Lyon de Paul Erdős en avril 1996, séjour qui devait être le dernier. Paul était très intéréssé à comparer $\hat{p}(\mathscr{A}, n)$ à $p(\mathscr{A}, n)$ pour différents ensembles $\mathscr{A}$, et particulièrement par le cas $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

On dit que l'ensemble $\mathscr{A}$ est *k-stable* (cf. [9]) si $a \in \mathscr{A} \Rightarrow ka \in \mathscr{A}$.

Nous commençons par remarquer que

Lemme 1.1. *Si $\mathscr{A}$ est un ensemble k-*stable, *avec $k \geqslant 2$, toute partition de n à sommants dans $\mathscr{A}$ est équivalente à une partition $(2k - 2)$-réduite.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que la suite $(x, x, x, \ldots, x)$ de longueur $2k - 1$ est équivalente à la suite $(x, x, \ldots, x, kx)$ obtenue en remplaçant les k derniers sommants par le sommant unique kx, ces deux suites représentant toutes deux le même ensemble $\{x, 2x, 3x, \ldots, (2k - 1)x\}$. Tant que la partition considérée contient des sommants qui sont répétés au moins $2k - 1$ fois, on la remplace par une partition équivalente plus courte en substituant au $(2k - 1)$-uplet $(x, x, x, \ldots, x)$ le k-uplet $(x, x, \ldots, x, kx)$. $\square$

De ce lemme résulte immédiatement le théorème:

Théorème 1. *Soit $\mathscr{A}$ un ensemble k-stable avec $k \geqslant 2$, on a*

$$\hat{p}(\mathscr{A}, n) = \hat{q}(\mathscr{A}, n, 2k - 2) \leqslant q(\mathscr{A}, n, 2k - 2). \tag{5}$$

Comme $\mathbb{N}^*$ est *2-stable, il s'ensuit que*

$$\hat{p}(n) \leqslant q(n, 2) \tag{6}$$

et les estimations classiques de $p(n)$ et de $q(n, 2)$ rappelées ci dessous au paragraphe 3, *en (19) et (20), améliorent (2) en*

$$\hat{p}(n) \leqslant p(n)^{0.8165} \tag{7}$$

pour n assez grand.

Dans le cas des partitions binaires ($\mathscr{A} = \mathscr{B}$, qui est 2-stable), nous démontrons que (5) devient une égalité avec $k = 2$:

Théorème 2. *Soit* $\mathscr{B} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$. *On a* $\hat{b}(n) = q(\mathscr{B}, n, 2)$.

L'équation (4) entraine que pour $n = 2^j - 1$, on a $\hat{b}(n) = 1$. La table des valeurs de $\hat{b}(n)$ donnée en annexe montre que cette fonction est assez oscillante. Nous démontrerons le

Théorème 3. *Pour* $n \geqslant 11$ *on a*

$$\hat{b}(n) \leqslant n^{\alpha}, \quad \textit{avec } \alpha = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Big/ \log 2 = 0.69424\ldots \tag{8}$$

et la constante α *est optimale.*

De l'estimation connue de $b(n)$ (cf. [1])

$$\log b(n) \sim \frac{1}{2\log 2}(\log n)^2$$

et du Théorème 3 il résulte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \hat{b}(n)}{\log b(n)} = 0.$$

Existe-t-il un ensemble $\mathscr{A}$ tel que l'on ait

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \hat{p}(\mathscr{A}, n)}{\log p(\mathscr{A}, n)} = 1?$$

Peut on trouver d'autres exemples que (4) de valeurs de n et d'ensembles $\mathscr{A}$ tels que

$$\tilde{p}(\mathscr{A}, n) = p(\mathscr{A}, n)$$

ou, ce qui est équivalent $\hat{p}(\mathscr{A}, n) = 1$?

Les démonstrations des Théorèmes 2 et 3 seront données au paragraphe 2. Au paragraphe 3, nous donnerons une majoration simple de $q(n, k)$, et au paragraphe 4, nous démontrerons le

Théorème 4. *Pour n suffisamment grand, on a*:

$$q(n)^{0.51} \leqslant \hat{q}(n) \leqslant q(n)^{0.96} \tag{9}$$

et

$$\hat{p}(n) = \hat{q}(n, 2) \leqslant p(n)^{0.773}. \tag{10}$$

La démonstration de (9) reprend pour les partitions sans répétition la majoration de $\hat{p}(n)$ donnée dans [12]. La majoration de $\hat{q}(n, 2)$ dans (10) suit la même idée. La table des valeurs de $\hat{p}(n)$ donnée dans [12] laisse penser que $\log \hat{p}(n)/\log p(n)$ est inférieur à 0.7 pour n assez grand.

Soit $E=\mathscr{E}(\Pi)$ l'ensemble représenté par une partition Π; il existe en général plusieurs partitions Π' équivalentes à Π c'est à dire représentant le même ensemble E. Il serait intéressant de définir dans cette classe d'équivalence une partition canonique; nous ne savons pas le faire. On note $l(E)$ le nombre de sommants d'une partition ayant un minimum de sommants parmi toutes les partitions équivalentes à Π.

Dans le paragraphe 5 on s'intéresse au maximum de $l(\mathscr{E}(\Pi))$ lorsque Π décrit l'ensemble des partitions de n, ceci dans le cas $\mathscr{A}=\mathbb{N}^*$. Puisque $\mathbb{N}^*$ est 2-stable, par le Lemme 1.1 toute partition de n est équivalente à une partition 2-réduite, $n=n_1+n_2+\cdots+n_j$; si on suppose que la suite des n_i est croissante, elle est minorée terme à terme par la suite $1,1,2,2,3,3,\ldots$ c'est à dire que pour tout i on a $n_i \geqslant \lfloor (i+1)/2 \rfloor$; il en résulte

$$n \geqslant \sum_{i=1}^{j} \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor \geqslant \frac{j^2}{4},$$

ce qui entraine $j \leqslant 2\sqrt{n}$; ceci montre que, pour toute partition Π de n on a $l(\mathscr{E}(\Pi)) \leqslant 2\sqrt{n}$.

Le Théorème 5 donne une majoration un peu meilleure, et aussi une minoration du maximum des $l(\mathscr{E}(\Pi))$ lorsque Π décrit l'ensemble des partitions de n:

Théorème 5. On suppose que $\mathscr{A}=\mathbb{N}^*$.
1. *Pour tout ensemble E représenté par une partition de n on a*

$$l(E) \leqslant \sqrt{3n}. \tag{11}$$

2. *Pour tout n, il existe un ensemble E_n tel que, pour $n \to \infty$, on ait*

$$l(E_n) \geqslant \sqrt{\frac{2n}{3}}(1+\mathrm{o}(1)). \tag{12}$$

Nous remercions A. Sárközy pour les discussions que nous avons eues sur ces questions et l'arbitre pour ses remarques très pertinentes, en particulier pour le calcul de $\Phi_0(c,\lambda)$ au paragraphe 4.

2. Le cas des partitions binaires

Dans ce paragraphe on étudie le cas des partitions binaires c'est à dire le cas $\mathscr{A}=\mathscr{B}=\{1,2,4,8,\ldots\}$. L'ensemble $\mathscr{B}$ est 2-stable et, par le Lemme 1.1 toute partition est équivalente à une partition 2-réduite. On va voir que dans ce cas on a beaucoup mieux; chaque classe d'équivalence contient exactement une partiton 2-réduite, et ceci est exactement l'énoncé du Théorème 2. Dans la suite, nous appelerons *réduite* une partition 2-réduite.

Démonstration du Théorème 2. Soient deux partitions binaires réduites, distinctes:

$$n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant p} x_i 2^i, \quad n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant q} y_i 2^i.$$

avec tous les x_i, y_i entiers au plus égaux à 2. Il faut montrer que leurs ensembles de sous-sommes sont distincts. Soit r le premier entier tel que $x_r \neq y_r$. Alors,

$$x_r 2^r \equiv n - \sum_{i<r} x_i 2^i = n - \sum_{i<r} y_i 2^i \equiv y_r 2^r \bmod 2^{r+1};$$

x_r et y_r sont donc de même parité. Comme ils sont entre 0 et 2, on a par exemple $x_r = 2,\ y_r = 0$. Posons alors

$$x_i' = \min(1, x_i) \quad 0 \leqslant i \leqslant r \qquad \text{et } a = \sum_{i \leqslant r} x_i' 2^i.$$

L'entier a est représenté par la première partition. Supposons qu'il le soit aussi par la seconde. Alors

$$a = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} y_i' 2^i, \quad y_i' \leqslant y_i.$$

Si $y_0' > 0$, on a aussi $y_0 = x_0 > 0$, et donc $x_0' = 1$. a est donc impair et ceci implique $y_0' = 1 = x_0'$. Si $y_0' = 0$ on a aussi $x_0' = 0$ car a est pair. Puis, par récurrence, en réduisant modulo $2, 4, \ldots, 2^r$, on a $y_i' = x_i'$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. En réduisant enfin modulo 2^{r+1} on voit que y_r' est impair ce qui est absurde car $y_r' \leqslant y_r = 0$. □

Remarque. Soit $\mathscr{A}_0 = a_0 \mathscr{B} = \{a_0, 2a_0, 4a_0, \ldots\}$. Le Théorème 2 est encore valable pour $\mathscr{A}_0$. On peut montrer que les seuls ensembles $\mathscr{A}$, 2-stables, pour lesquels $\hat{p}(\mathscr{A}, n) = q(\mathscr{A}, n, 2)$ sont les ensembles $\mathscr{A}_0$.

Dans la suite de ce paragraphe nous allons préciser le comportement de la fonction $\hat{b}(n)$.

Lemme 2.1.

$$\hat{b}(2k+1) = \hat{b}(k)$$

Démonstration. Les partitions binaires réduites de $2k+1$ contiennent exactement un sommant égal à 1. En enlevant ce sommant, et divisant tous les autres sommants par 2, on établit une bijection de l'ensembles des partitions binaires réduites de $2k+1$ sur l'ensemble des partitions binaires réduites de k. □

Lemme 2.2.

$$\hat{b}(4k+2) = \hat{b}(2k+1) + \hat{b}(2k)$$

Démonstration. Soit $n = 4k+2$. Partageons les partitions binaires réduites de n en deux sous-ensembles $\mathscr{P}_1$, formé des partitions qui contiennent le sommant 1, et $\mathscr{P}_2$ formé des partitions qui ne contiennent pas le sommant 1. La division par 2 établit une bijection de $\mathscr{P}_2$ sur l'ensemble des partitions réduites de $2k + 1$. Les partitions constituant l'ensemble $\mathscr{P}_1$, contiennent exactement deux sommants égaux à 1, car $4k+2$ est pair. En enlevant ces deux 1, et en divisant par 2 on établit une bijection de $\mathscr{P}_1$ sur l'ensemble des partitions réduites de $2k$. □

Lemme 2.3. *Soit $n = 2^{\alpha+1}m$ avec m impair, et une partition binaire réduite de n qui contient le sommant 1. Alors les sommants plus petits que $2^{\alpha+1}$ de cette partition sont exactement $2^\alpha, 2^{\alpha-1}, \dots 2^2, 2, 1, 1$.*

Démonstration. Supposons $\alpha > 0$. Puisque n est pair, en regardant modulo 2, on voit que la partition se termine par exactement 2 occurences de 1. Si $\alpha \geqslant 2$, en regardant modulo 4, on voit que la partition se termine par $2, 1, 1$, le 2 étant l'unique occurence de 2. Et ainsi de suite. □

Ce lemme permet de généraliser le Lemme 2.2 en:

Lemme 2.4. *Les images par la fonction $\hat{b}$ d'une progression géométrique de raison 2 forment une progression arithmétique. Plus précisément, pour tous α, $k \geqslant 0$ on a:*

$$\hat{b}(2^{\alpha+1}(2k + 1)) - \hat{b}(2^\alpha(2k + 1) = \hat{b}(2k), \tag{13}$$

$$\hat{b}(2^\alpha(2k + 1)) = \alpha\hat{b}(2k) + \hat{b}(k). \tag{14}$$

Si $n = 2^\alpha(2k + 1)$ on pose $j(n) = 2k$, autrement dit $j(n)$ est la partie impaire de n moins une unité, alors:

$$\hat{b}(2n) = \hat{b}(n) + \hat{b}(j(n)). \tag{15}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité (13). Comme dans la démonstration précédente, partageons les partitions binaires réduites de $n = 2m = 2^{\alpha+1}(2k + 1)$ en deux ensembles, $\mathscr{P}_1$, l'ensemble de celles qui contiennent un 1, et $\mathscr{P}_2$, l'ensemble de celles qui ne contiennent pas de 1. La division par 2 établit une bijection de $\mathscr{P}_2$ sur l'ensemble des partitions de m. Il reste à compter les éléments de $\mathscr{P}_1$. Par le lemme précédent, toutes les partitions de $\mathscr{P}_1$, se terminent par la séquence $2^\alpha, 2^{\alpha-1}, \dots 2^2, 2, 1, 1$. En supprimant cette séquence, dont la somme est $2^{\alpha+1}$, et en divisant les autres sommants par $2^{\alpha+1}$ on établit une bijection de $\mathscr{P}_1$ sur l'ensemble des partitions binaires réduites de $2k$ (cf. Fig. 1). □

Les Lemmes 2.4 et 2 permettent de calculer rapidement les valeurs de la fonction $\hat{b}(n)$. La table 1 donne les 700 premières valeurs de $\hat{b}(n)$. La proposition suivante n'est qu'une reformulation de (14).

Proposition 2.1. *Soient $k_n > k_{n-1} > \cdots > k_1$. $\hat{b}(2^{k_n} + 2^{k_{n-1}} + \cdots + 2^{k_1})$ est un polynôme P_n en $k_1, k_2, \dots, k_n$. Les P_n vérifient la récurrence:*

$$\begin{aligned} P_n(k_n, k_{n-1}, \dots, k_1) = {} & k_1 P_{n-1}(k_n - k_1, \dots, k_2 - k_1) \\ & + P_{n-1}(k_n - k_1 - 1, \dots, k_2 - k_1 - 1). \end{aligned}$$

$$6=\left\{\begin{array}{llll} 4 & 2 & & \\ 4 & 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$14=\left\{\begin{array}{llllll} 8 & 4 & 2 & & & \\ 8 & 4 & \boxed{1\;\;1} & & & \\ 8 & 2 & 2 & \boxed{1\;\;1} & & \\ 4 & 4 & 2 & 2 & \boxed{1\;\;1} & \end{array}\right. \qquad 28=\left\{\begin{array}{lllllll} 16 & 8 & 4 & & & & \\ 16 & 8 & 2 & 2 & & & \\ 16 & 4 & 4 & 2 & 2 & & \\ 8 & 8 & 4 & 4 & 2 & 2 & \\ 16 & 8 & \boxed{2\;\;1\;\;1} & & & & \\ 16 & 4 & 4 & \boxed{2\;\;1\;\;1} & & & \\ 8 & 8 & 4 & 4 & \boxed{2\;\;1\;\;1} & & \end{array}\right.$$

Fig. 1. Les partitions binaires réduites de 6, $14=2(6+1)$ et $28=4(6+1)$.

Par récurrence sur n on en déduit la suivante:

Proposition 2.2. *Soit N un entier qui n'est pas une puissance de 2, $N=2^{k_n}+2^{k_{n-1}}+\cdots+2^{k_1}$ avec $k_n>k_{n-1}>\cdots>k_1$. Le nombre des ensembles associés aux diverses partitions de n est encadré par*

$$\hat{b}(N)\leqslant(k_1+1)(k_2-k_1+1)(k_3-k_2+1)\ldots(k_n-k_{n-1}+1),$$
$$\hat{b}(N)\geqslant(k_1+1)(k_2-k_1)(k_3-k_2)\ldots(k_n-k_{n-1}).$$

Remarque. En utilisant la minoration de $\hat{b}(n)$ donnée dans la Proposition 2.2, on retrouve le résultat de [4]: si $n\neq 2^j-1$, alors $\hat{b}(n)>1$.

Lemme 2.5. *Pour x réel$\geqslant 0$, on définit $B(x)=\max_{n\leqslant x}\hat{b}(n)$. On a, pour $n\geqslant 2$,*

$$\hat{b}(n)\leqslant B\left(\frac{n}{2}\right)+B\left(\frac{n-2}{4}\right). \tag{16}$$

Démonstration. Notons d'abord que B est une fonction croissante, et que $B(0)=1$. La démonstration distingue trois cas:

1. n est impair, $n=2y+1$. Par le Lemme 2.1 on a
$$\hat{b}(n)=\hat{b}(y)\leqslant B\left(\frac{n-1}{2}\right)\leqslant B\left(\frac{n}{2}\right)+B\left(\frac{n-2}{4}\right).$$
2. n est multiple de 4. On écrit $n=2y$, avec y pair. Par le Lemme 2.4,
$$\hat{b}(n)=\hat{b}(2y)=\hat{b}(y)+\hat{b}(j(y))\leqslant B\left(\frac{n}{2}\right)+B\left(\frac{n-2}{4}\right)$$
car $j(y)\leqslant y/2-1=n/4-1\leqslant(n-2)/4$.
3. $n=4y+2$. On applique les Lemmes 2.1 et 2.2:
$$\begin{aligned}\hat{b}(n)&=\hat{b}(4y+2)=\hat{b}(2y+1)+\hat{b}(2y)=\hat{b}(2y)+\hat{b}(y)\\&\leqslant B\left(\frac{n}{2}\right)+B\left(\frac{n-2}{4}\right).\qquad\square\end{aligned}$$

Table 1
Les 700 premières valeurs de $\hat{b}(n)$, nombre des ensembles distincts représentés par les partitions binaires de n. L'intersection de la ligne i et de la colonne j contient la valeur de $\hat{b}(i+j)$. Les valeurs $\hat{b}(u_n)=F_{n+2}$ décrites dans le Lemme 2.6 sont précédées de $**$ et les autres valeurs championnes sont précédées de $*$

	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
0	**1	12	19	25	26	17	43	28	33	29	28	47	61	64
1	1	5	12	7	19	6	25	5	26	13	17	14	43	25
2	**2	13	17	24	31	13	32	27	45	36	23	51	68	61
3	1	8	5	17	12	7	7	22	19	23	6	37	25	36
4	**3	11	18	27	29	8	31	39	50	33	19	*60	57	47
5	2	3	13	10	17	1	24	17	31	10	13	23	32	11
6	3	10	21	23	22	9	41	46	43	37	20	55	39	52
7	1	7	8	13	5	8	17	29	12	27	7	32	7	41
8	*4	11	19	16	23	15	44	41	41	44	15	41	38	71
9	3	4	11	3	18	7	27	12	29	17	8	9	31	30
10	**5	9	14	17	31	20	37	43	46	41	9	40	55	*79
11	2	5	3	14	13	13	10	31	17	24	1	31	24	49
12	5	6	13	25	34	19	33	50	39	31	10	53	65	68
13	3	1	10	11	21	6	23	19	22	7	9	22	41	19
14	4	7	17	*30	29	23	36	45	27	32	17	57	58	65
15	1	6	7	19	8	17	13	26	5	25	8	35	17	46
16	5	11	18	27	27	28	29	33	28	43	23	48	61	73
17	4	5	11	8	19	11	16	7	23	18	15	13	44	27
18	*7	*14	15	29	30	27	19	30	41	47	22	43	71	62
19	3	9	4	21	11	16	3	23	18	29	7	30	27	35
20	**8	13	13	**34	25	21	20	39	49	40	27	47	64	43
21	5	4	9	13	14	5	17	16	31	11	20	17	37	8
22	7	*15	14	31	17	24	31	41	44	37	33	38	47	45
23	2	11	5	18	3	19	14	25	13	26	13	21	10	37
24	7	*18	11	23	16	33	39	34	47	41	32	25	43	66
25	5	7	6	5	13	14	25	9	34	15	19	4	33	29
26	8	17	7	22	23	*37	36	29	55	34	25	27	56	79
27	3	10	1	17	10	23	11	20	21	19	6	23	23	50
28	7	13	8	29	27	32	41	31	50	23	29	42	59	71
29	4	3	7	12	17	9	30	11	29	4	23	19	36	21
30	5	14	13	31	24	31	*49	24	37	21	40	53	49	76
31	1	11	6	19	7	22	19	13	8	17	17	34	13	55
32	6	*19	17	26	25	35	46	15	35	30	45	49	42	**89
33	5	8	11	7	18	13	27	2	27	13	28	15	29	34
34	*9	**21	16	23	29	30	35	15	46	35	39	56	45	81
35	4	13	5	16	11	17	8	13	19	22	11	41	16	47
36	*11	18	19	25	26	21	37	24	49	31	38	*67	35	60
37	7	5	14	9	15	4	29	11	30	9	27	26	19	13
38	10	17	*23	20	19	23	*50	31	41	32	43	63	22	57
39	3	12	9	11	4	19	21	20	11	23	16	37	3	44
40	11	19	22	13	17	34	**55	29	36	37	37	48	23	75
41	8	7	13	2	13	15	34	9	25	14	21	11	20	31
42	**13	16	17	13	22	*41	47	34	39	33	26	51	37	80
43	5	9	4	11	9	26	13	25	14	19	5	40	17	49
44	12	11	19	20	23	37	44	41	31	24	29	*69	48	67
45	7	2	15	9	14	11	31	16	17	5	24	29	31	18
46	9	11	*26	25	19	40	49	39	20	21	43	*76	45	59
47	2	9	11	16	5	29	18	23	3	16	19	47	14	41
48	9	16	*29	23	16	*47	41	30	19	27	52	65	53	64
49	7	7	18	7	11	18	23	7	16	11	33	18	39	23

Démonstration du Théorème 3. En calculant $B(n)$ pour $n = 11, 12, 18, 20, 34, 36$ et 42 à l'aide de la table 1, on vérifie d'abord que, pour $11 \leqslant n \leqslant 67$, on a $B(n) \leqslant n^\alpha$. On prouve ensuite par récurrence la proposition $B(n) \leqslant n^\alpha$ pour $n \geqslant 11$. La proposition est vraie pour $n = 67$. Supposons la vraie jusqu'à $n-1$ avec $n \geqslant 68$. Par le Lemme 2.5, on a

$$\hat{b}(n) \leqslant B\left(\frac{n}{2}\right) + B\left(\frac{n}{4}\right) \leqslant n^\alpha \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) = n^\alpha$$

en notant que $n/2 \geqslant n/4 \geqslant 11$.

Pour montrer que la constante α est optimale nous allons introduire une suite (u_n) où la fonction $\hat{b}$ prend de grandes valeurs.

Lemme 2.6. *Soit la suite (u_n) définie par*

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 10, \quad u_4 = 20, \quad u_5 = 42, \quad u_6 = 84, \ldots$$

$$u_{2t} = 2u_{2t-1}, \quad u_{2t+1} = 2u_{2t} + 2.$$

Soit la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1, \ldots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Alors on a pour tout $n \geqslant 0$

$$\hat{b}(u_n) = F_{n+2} \quad \text{et pour } n \text{ impair on a } \hat{b}(u_n) \geqslant 0.95 u_n^\alpha. \tag{17}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. A l'aide de la table 1 on constate que $\hat{b}(u_n) = F_{n+2}$ est vérifié pour les premières valeurs de n. Ensuite, par les Lemmes 2.2 et 2.1, il vient:

$$\begin{aligned} \hat{b}(u_{2t+1}) &= \hat{b}(4u_{2t-1} + 2) = \hat{b}(2u_{2t-1} + 1) + \hat{b}(2u_{2t-1}) \\ &= \hat{b}(u_{2t-1}) + \hat{b}(2u_{2t-1}) = \hat{b}(u_{2t-1}) + \hat{b}(u_{2t}) \\ &= F_{2t+1} + F_{2t+2} = F_{2t+3}. \end{aligned}$$

Puis, en appliquant le Lemme 2.4 et en remarquant que

$$j(u_{2t+1}) = j(2u_{2t} + 2) = j(u_{2t} + 1) = u_{2t}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \hat{b}(u_{2t+2}) &= \hat{b}(u_{2t+1}) + \hat{b}(j(u_{2t+1})) = \hat{b}(u_{2t+1}) + \hat{b}(u_{2t}) \\ &= F_{2t+3} + F_{2t+2} = F_{2t+4}. \end{aligned}$$

Soit $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ et $\varphi' = (1-\sqrt{5})/2$. On sait que $F_n = (\varphi^n - \varphi'^n)/\sqrt{5}$. Par ailleurs, on peut voir que $u_{2t} = 4(2^{2t} - 1)/3$ et $u_{2t+1} = (4.2^{2t+1} - 2)/3$. Pour n impair, on a $\hat{b}(u_n) = F_{n+2} \geqslant \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, et comme $u_n \leqslant 4.2^n/3$, on a

$$\hat{b}(u_n) \geqslant \frac{\varphi^{2 - \log 4/3/\log 2}}{\sqrt{5}} u_n^\alpha \geqslant 0.95 u_n^\alpha. \qquad \square$$

Soit f une fonction arithmétique réelle, c'est à dire une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$. Un entier n est un *champion* pour la fonction f si $f(i) < f(n)$ pour tous les $i < n$. La proposition suivante donne une famille de champions pour la fonction $\hat{b}$; il existe d'autres champions comme on peut le voir dans la table donnée en annexe.

Proposition 2.3. *Les termes de la suite* (u_n) *définie dans le Lemme* 2.6 *sont des champions pour la fonction* $\hat{b}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. A l'aide de la table en annexe on constate que le lemme est vérifié pour les premières valeurs de n. On observe ensuite que la suite (u_n) vérifie

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n = 4u_{n-1} + 4 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2u_n + 2 = 4u_{n-1} + 2 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

L'hypothèse de récurrence est: Pour $t \leqslant n$, u_t est un champion pour $\hat{b}$, ce qui entraîne que pour $x < u_t$, $B(x) < B(u_t)$. Il faut montrer que u_{n+1} est un champion. Soit $N < u_{n+1}$. On applique le Lemme 2.5, en observant que $B(x) = B(\lfloor x \rfloor)$:

$$\hat{b}(N) \leqslant B(N/2) + B(\lfloor (N-2)/4 \rfloor).$$

Si n est impair:

$N < u_{n+1} = 2u_n$ entraine $N/2 < u_n$ et $B(N/2) < B(u_n) = F_{n+2}$;

de même $\dfrac{N-2}{4} < \dfrac{u_{n+1}-2}{4} = u_{n-1} + \dfrac{1}{2}$, donne $\left\lfloor \dfrac{N-2}{4} \right\rfloor \leqslant u_{n-1}$

et $B\left(\left\lfloor \dfrac{N-2}{4} \right\rfloor\right) \leqslant B(u_{n-1}) = F_{n+1}$.

Si n est pair,

$N < u_{n+1} = 2u_n + 2$ entraine $\dfrac{N}{2} < u_n + 1$, $\lfloor N/2 \rfloor \leqslant u_n$ et

$B(N/2) = B(\lfloor N/2 \rfloor) \leqslant B(u_n) = F_{n+2}$. Ensuite $\dfrac{N-2}{4} < \dfrac{u_{n+1}-2}{4} = u_{n-1}$

donne

$\left\lfloor \dfrac{N-2}{4} \right\rfloor < u_{n-1}$ puis $B\left(\left\lfloor \dfrac{N-2}{4} \right\rfloor\right) < B(u_{n-1}) = F_{n+1}$.

Dans les deux cas on conclut

$$\hat{b}(N) < F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3} = \hat{b}(u_{n+1}). \qquad \square$$

3. Estimations de $q(n,k)$

Proposition 3.1. *Le nombre* $q(n,k)$ *de partitions* k*-réduites de* n *est majoré par*

$$q(n,k) \leqslant \exp\left(\frac{k\pi^2}{6(k+1)}\right) \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{kn}{6(k+1)}}\right). \tag{18}$$

La démonstration, élémentaire, utilise la série génératrice. Nous montrons d'abord le lemme

Lemme 3.1. *Soient n et k deux entiers naturels $\geqslant 1$. Pour x réel vérifiant $0 \leqslant x \leqslant 1$, le polynôme*

$$Q(x) = k \sum_{i=0}^{n(k+1)-1} x^i - n(k+1) \sum_{i=1}^{k} x^{ni}$$

prend des valeurs positives ou nulles.

Démonstration (pour $n \geqslant 2$). Comme $Q(1) = 0$, on a $Q(x) = (1-x)Q_1(x)$ avec $Q_1(1) = -Q'(1) = nk(k+1)/2$, et l'on peut écrire:

$$Q(x) = (1-x)\left(\frac{nk}{2}(k+1)x^{n(k+1)-2} + (1-x)P(x)\right)$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant n(k+1)-3$. Pour prouver le lemme nous allons montrer que les coefficients de P sont tous positifs. Or on a

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{Q(x)}{(1-x)^2} + \mathrm{O}(x^{n(k+1)-2}) \\ &= \frac{k}{(1-x)^3} - \frac{n(k+1)(x^n + x^{2n} + \cdots + x^{kn})}{(1-x)^2} + \mathrm{O}\left(x^{n(k+1)-2}\right). \end{aligned}$$

Soit m un entier $\leqslant n(k+1)-3$. On écrit $m = an + r$, $0 \leqslant r < n$. Le coefficient c_m de x^m dans $P(x)$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2}k(m+2)(m+1) - n(k+1)\sum_{i=1}^{a}(m - in + 1) \\ &= \frac{1}{2}k(m^2 + 3m + 2) - n\left(\frac{k+1}{2}\right)(2m + 2 - an - n)a. \end{aligned}$$

En majorant $(k+1)a$ par $k(a+1)$, il vient:

$$\begin{aligned} c_m &\geqslant \frac{1}{2}k[(an+r)^2 + 3(an+r) + 2 - (a+1)n(an + 2r + 2 - n)] \\ &= \frac{1}{2}k(an + r^2 + 3r + 2 - 2nr - 2n + n^2) \\ &= \frac{1}{2}k\left(an + \left(n - r - \frac{3}{2}\right)^2 + n - \frac{1}{4}\right) > 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3.2. *Soit*

$$F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n,k)x^n = \prod_{m=1}^{\infty}(1 + x^m + \cdots + x^{mk}) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - x^{(k+1)m}}{1 - x^m}.$$

On a pour x réel, $0 \leqslant x < 1$, $\log F_k(x) \leqslant \dfrac{k}{k+1}\dfrac{\pi^2}{6}\dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration. On a:

$$\begin{aligned}\log F_k(x) &= \sum_{m\geqslant 1}(\log(1-x^{(k+1)m})-\log(1-x^m))\\ &= \sum_{m\geqslant 1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^{mj}-x^{j(k+1)m}}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sum_{m=1}^{\infty}(x^{mj}-x^{j(k+1)m}).\end{aligned}$$

La permutation des deux signes $\sum$ est licite puisque la famille est à termes positifs. Il vient ensuite:

$$\begin{aligned}\log F_k(x) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\frac{x^j}{1-x^j}-\frac{x^{j(k+1)}}{1-x^{j(k+1)}}\right)\\ &= \frac{1}{1-x}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j}\,\frac{1+x^j+\cdots+x^{j(k-1)}}{1+x+x^2+\cdots+x^{j(k+1)-1}}.\end{aligned}$$

Le lemme précédent donne

$$\log F_k(x)\leqslant \frac{1}{1-x}\,\frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\leqslant\frac{\pi^2}{6}\,\frac{k}{k+1}\,\frac{1}{1-x}. \qquad \square$$

Démonstration de la Proposition 3.1. On a pour tout n, et $0\leqslant x<1$:

$$q(n,k)x^n\leqslant F_k(x)\leqslant \exp\left(\frac{a}{1-x}\right)$$

avec $a=k\pi^2/6(k+1)$. Il s'ensuit que:

$$\log q(n,k)\leqslant\frac{a}{1-x}-n\log x\leqslant\frac{a}{1-x}+n\left(\frac{1}{x}-1\right).$$

En choisissant $x=1/(1+\sqrt{a/n})$, on obtient

$$\log q(n,k)\leqslant a+2\sqrt{an}$$

ce qui prouve la proposition. $\square$

On sait obtenir de meilleures estimations pour $q(n,k)$. Le théorème taubérien de Ingham (cf. [11]) dit que, si

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

vérifie quand $x\to 1^-$:

$$f(x)\sim\lambda(\log(1/x))^{\alpha}\exp(A/\log(1/x))$$

alors

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \sim \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \frac{A^{\alpha/2-1/4}}{n^{\alpha/2+1/4}} \exp(2\sqrt{An}).$$

Par ailleurs on sait que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}$$

vérifie (cf. [8])

$$F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\log \frac{1}{x}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6\log(1/x)}\right), \quad x \to 1^-.$$

En appliquant le théorème taubérien ci-dessus aux séries:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p(n) - p(n-1))x^n = (1-x)F(x)$$

et

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (q(n,k) - q(n-1,k))x^n = (1-x)F_k(x) = (1-x)\frac{F(x)}{F(x^{k+1})},$$

on obtient

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \tag{19}$$

et, pour k fixé,

$$q(n,k) \sim \frac{k^{1/4}}{2(k+1)^{3/4}6^{1/4}} \frac{1}{n^{3/4}} \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{kn}{6(k+1)}}\right). \tag{20}$$

En particulier, pour $k = 1$, on obtient

$$q(n) \sim \frac{1}{4(3n^3)^{1/4}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{n}{3}}\right). \quad \square \tag{21}$$

Il est possible aussi, comme il est dit à la fin de [8], d'obtenir un développement en série pour $q(n,k)$ comme pour $p(n)$ (cf. [8,13]) ou $q(n)$, (cf. [10]).

4. Démonstration du Théorème 4

Commençons par un lemme technique:

Lemme 4.1. (i) *La fonction* $y_1(x) = \frac{1}{2}\log(1+2x) - \log(1+x^2) + x^2\log x/(2+x^2)$ *est décroissante sur l'intervalle* [0.3, 1]. *On a* $y_1(0.3) < 0.1$ *et* $y_1(x) < 0$ *pour* $x \in [0.623, 1]$.

(ii) *La fonction*

$$y_2(x)=\frac{1}{2}\log(1+2x+2x^2)-\log(1+x^2+x^4)+\frac{x^3(2x+1)\log x}{3+x^2+x^4}$$

vérifie $y_2(x)<0.18$ *pour* $0\leqslant x\leqslant 1$ *et* $y_2(x)<0$ *pour* $0.681\leqslant x\leqslant 1$.

Démonstration. L'étude de ces deux fonctions se fait avec le système de calcul formel Maple. Le calcul de la dérivée de y_1 montre que, pour $0<x<1$, y_1' est du signe de

$$z_1(x)=\log x-\frac{x^6+x^5+5x^4+5x^3+4x^2+6x-4}{8x^4+4x^3+8x^2+4x}$$

et la dérivée $z_1'(x)$ est du signe du polynôme

$$P_1(x)=-4x^9-5x^8+6x^7+10x^6+28x^5+47x^4-6x^3+12x^2-12x-4.$$

La méthode des suites de Sturm montre que P_1 n'a qu'une racine entre 0 et 1, et l'on en déduit les variations de y_1:

x	0		0.246		0.622		1
y_1	0	↗	0.10	↘	0	↘	−0.144

L'étude de y_2 se fait de même avec une fonction auxiliaire z_2 et un polynôme P_2 plus compliqué. On obtient

x	0		0.3335		0.680		1
y_2	0	↗	0.17987	↘	0	↘	−0.294

Dans tout ce paragraphe, l'ensemble $\mathscr{A}$ des sommants possibles est $\mathbb{N}^*$. Désignons par $Q(n,a,k)$ le nombre des partitions de n où chaque sommant intervient au plus k fois, et qui ne représentent pas a. Lorsque $k=1$, on note $Q(n,a)=Q(n,a,1)$. La fonction $Q(n,a)$ a été étudiée dans [5,6]. Les deux lemmes suivants seront la base de la preuve du Théorème 4.

Lemme 4.2. (i) *Pour* a *vérifiant* $0.83\sqrt{n}\leqslant a\leqslant 2.49\sqrt{n}$, *on a*

$$\log Q(n,a)<1.74\sqrt{n}.$$

(ii) *Pour* a *vérifiant* $0.64\sqrt{n}\leqslant a\leqslant 1.92\sqrt{n}$, *on a*

$$\log Q(n,a,2)<1.982\sqrt{n}.$$

Démonstration de (i). Une partition de n ne représentant pas a ne peut contenir à la fois le sommant i et le sommant $a-i$. Si l'on définit $d(n)$ par la série génératrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(n)x^n = \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant a/2} (1+x^i+x^{a-i})\right)\left(\prod_{i\geqslant a+1}(1+x^i)\right), \tag{22}$$

on a donc $Q(n,a)\leqslant d(n)$. On va majorer $d(n)$ par la méthode de Rankin, en choisissant $x=\mathrm{e}^{-s}$, et $s=c/\sqrt{n}$, c étant un nombre réel positif que l'on précisera. Il vient

$$d(n)\mathrm{e}^{-ns}\leqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant a/2}(1+\mathrm{e}^{-is}+\mathrm{e}^{-(a-i)s})\prod_{i\geqslant a+1}(1+\mathrm{e}^{-is})$$

et

$$\begin{aligned}\log Q(n,a) &\leqslant \log d(n)\leqslant ns+\sum_{1\leqslant i\leqslant a/2}\log(1+\mathrm{e}^{-is}+\mathrm{e}^{-(a-i)s})\\ &\quad +\sum_{i\geqslant a+1}\log(1+\mathrm{e}^{-is}).\end{aligned} \tag{23}$$

Maintenant la fonction $u\longrightarrow \log(1+\mathrm{e}^{-su})$ est décroissante pour s positif fixé, et donc

$$\sum_{i\geqslant a+1}\log(1+\mathrm{e}^{-is})\leqslant \int_a^{\infty}\log(1+\mathrm{e}^{-su})\,\mathrm{d}u.$$

De même la fonction $u\longrightarrow\log(1+\mathrm{e}^{-su}+\mathrm{e}^{-s(a-u)})$ est décroissante pour $u\leqslant a/2$, et il s'en suit que:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant a/2}\log(1+\mathrm{e}^{-is}+\mathrm{e}^{-(a-i)s})\leqslant \int_0^{a/2}\log(1+\mathrm{e}^{-su}+\mathrm{e}^{-s(a-u)})\,\mathrm{d}u.$$

En faisant dans ces intégrales le changement de variable $u=\sqrt{n}t$, et en posant $s=c/\sqrt{n}$ et $a=\lambda\sqrt{n}$, l'inégalité (23) donne:

$$\log Q(n,a)\leqslant \Phi(c,\lambda)\sqrt{n} \tag{24}$$

avec

$$\Phi(c,\lambda)=c+\int_0^{\lambda/2}\log(1+\mathrm{e}^{-ct}+\mathrm{e}^{-c\lambda+ct})\,\mathrm{d}t+\int_{\lambda}^{\infty}\log(1+\mathrm{e}^{-ct})\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

En utilisant la relation $\int_0^\infty \log(1+\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t=\pi^2/12$ (cf. [12]), on obtient

$$\Phi(c,\lambda)=c+\int_0^{\lambda/2}\log(1+\mathrm{e}^{-ct}+\mathrm{e}^{-c\lambda+ct})\,\mathrm{d}t+\frac{\pi^2}{12c}-\int_0^{\lambda}\log(1+\mathrm{e}^{-ct})\,\mathrm{d}t. \tag{26}$$

Pour λ fixé, la majoration (23) est valable pour tout $c>0$. Or la fonction $\Phi(c,\lambda)$ donnée par (26) est continue pour tout $c>0$, et tend vers $+\infty$ lorsque $c\longrightarrow 0^+$ et $c\longrightarrow+\infty$; elle a donc un minimum obtenu pour une (ou plusieurs) valeurs de c. On pose

$$g(\lambda)=\min_{c>0}\Phi(c,\lambda)$$

et (24) donne $\log Q(n,a) \leqslant g(\lambda)\sqrt{n}$. La tracé approximatif de $g(\lambda)$ montre que g est décroissante puis croissante, avec un minimum pour λ voisin de 1.5. Si cette observation était rigoureuse le point (i) du lemme en résulterait après calcul de $g(0.83)$ et $g(2.49)$. Pour valider ce raisonnement, nous allons majorer $\partial\Phi/\partial\lambda$ et découper l'intervalle [0.83, 2.49] en sous-intervalles sur lesquels on appliquera le théorème des accroissements finis. Il vient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(c,\lambda) = \frac{1}{2}\log(1+2\mathrm{e}^{-c\lambda/2}) - \log(1+\mathrm{e}^{-c\lambda}) - c\int_0^{\lambda/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{c\lambda-ct}+\mathrm{e}^{c\lambda-2ct}}. \tag{27}$$

La fonction sous l'intégrale ci-dessus est minimale pour $t=0$. On en déduit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(c,\lambda) \leqslant y_1\left(\exp\left(-\frac{c\lambda}{2}\right)\right) \tag{28}$$

où y_1 est définie dans le Lemme 4.1. Par application de ce lemme on déduit de (28):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(c,\lambda)\begin{cases} <0 & \text{pour } \lambda c<0.94, \\ <\dfrac{1}{10} & \text{pour } \lambda c<2.4. \end{cases} \tag{29}$$

On découpe alors l'intervalle [0.83, 2.49] en sous intervalles à l'aide des valeurs $\lambda_i = 0.83$, 1.05, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9,2, 2.1, 2.19, 2.27, 2.33, 2.42, 2.45, 2.47, 2.49.

Lorsque $\lambda_i < 2$, on choisit $c_i = 0.888$; Pour $\lambda_i \geqslant 2$ on choisit $c_i = 0.84$, et on vérifie que

$$\Phi(c_i,\lambda_i) + (\lambda_{i+1}-\lambda_i) \max_{\lambda_i \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{i+1}} \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(c_i,\lambda) \leqslant 1.74$$

à l'aide de (29). On a en particulier

$$\Phi(0.888, 0.83) = 1.7392\ldots \quad \text{et} \quad \Phi(0.84, 2,49) = 1.737\ldots\ .$$

Cela prouve la première partie du Lemme (4.2).

La démonstration de (ii) est similaire: on définit $d_2(n)$ par:

$$\sum_0^\infty d_2(n)x^n = \prod_{1\leqslant i\leqslant a/2} (1+x^i+x^{2i}+x^{a-i}+x^{2(a-i)}) \prod_{i\geqslant a+1} (1+x^i+x^{2i}),$$

et l'on a $Q(n,a,2) \leqslant d_2(n)$. La relation (24) devient alors

$$\log Q(n,a,2) \leqslant \Phi_2(c,\lambda)\sqrt{n}$$

avec

$$\begin{aligned}\Phi_2(c,\lambda) = c &+ \int_0^{\lambda/2} \log(1+\mathrm{e}^{-ct}+\mathrm{e}^{-2ct}+\mathrm{e}^{-c(\lambda-t)}+\mathrm{e}^{-2c(\lambda-t)})\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{\pi^2}{9c} - \int_0^{\lambda} \log(1+\mathrm{e}^{-ct}+\mathrm{e}^{-2ct})\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

en remarquant que

$$\int_0^{\infty} \log(1+\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}) = \int_0^{\infty} [\log(1-\mathrm{e}^{-3t}) - \log(1-\mathrm{e}^{-t})]\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{9}.$$

Il vient ensuite:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c,\lambda) = \frac{1}{2}\log(1+2\mathrm{e}^{-c\lambda/2}+2\mathrm{e}^{-c\lambda}) - \log(1+\mathrm{e}^{-c\lambda}+\mathrm{e}^{-2c\lambda})$$
$$-c\int_0^{\lambda/2} \frac{2+\mathrm{e}^{(\lambda-t)c}}{1+\mathrm{e}^{(\lambda-t)c}+\mathrm{e}^{2(\lambda-2t)c}+\mathrm{e}^{(2\lambda-3t)c}+\mathrm{e}^{2(\lambda-t)c}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour minorer l'intégrale on fait $t=\lambda/2$ au numérateur et $t=0$ au dénominateur, ce qui donne

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c,\lambda) \leqslant y_2 \exp\left(-\frac{c\lambda}{2}\right). \tag{30}$$

L'application du Lemme 4.1 donne alors

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \lambda}(c,\lambda) \begin{cases} <0 & \text{pour } \lambda c < 0.76, \\ <0.18 & \text{pour tout } c \text{ et } \lambda. \end{cases} \tag{31}$$

On choisit λ_i dans $\{0.64, 0.74, 0.78, 0.83, 0.9, 0.98, 1.07, 1.17, 1.27, 1.36, 1.44, 1.50, 1.58, 1.65, 1.71, 1.76, 1.80, 1.83, 1.85, 1.87, 1.88, 1.89, 1.9, 1.91, 1.92\}$.

Lorsque $\lambda_i < 1.5$, on choisit $c_i = 1.02$, et pour $\lambda_i \geqslant 1.5$, on prend $c_i = 0.95$. On a: $\Phi_2(0.95, 1.92) = 1.9802\ldots$. Pour $0.64 \leqslant \lambda \leqslant 0.74$ et $c = 1.02$, on a par (30), $(\partial\Phi_2/\partial\lambda)(c,\lambda) < 0$ et pour $0.74 \leqslant \lambda_i \leqslant 1.92$ on vérifie que

$$\phi_2(c_i,\lambda_i) + 0.2(\lambda_{i+1}-\lambda_i) < 1.982. \qquad \square$$

Remarque. Soit $R(n,a)$ le nombre de partitions (sans restriction) qui ne représentent pas a. En utilisant la série génératrice:

$$\prod_{i\leqslant a/2} (1+x^i+x^{2i}+\cdots+x^{a-i}+x^{2(a-i)}+\cdots) \prod_{i\geqslant a+1} \frac{1}{1-x^i},$$

on obtient par la méthode ci dessus la majoration suivante:

$$\log R(n,a) \leqslant \Phi_0(c,\lambda)\sqrt{n}, \quad c>0$$

où l'on a posé $a=\lambda\sqrt{n}$ et

$$\Phi_0(c,\lambda) = c + \frac{\pi^2}{6c} + \int_0^{\lambda/2} \log\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-ct}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{c\lambda-ct}-1}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\lambda} \log(1-\mathrm{e}^{-ct})\,\mathrm{d}t$$
$$= c + \frac{\pi^2}{6c} + \frac{\lambda}{2}\log(1-\mathrm{e}^{-c\lambda}),$$

ce qui améliore la majoration de $R(n,a)$ donnée dans [12,5].

Lemme 4.3. *Lorsque* $n \to \infty$ *on a*:
1. *Pour* $0.83\sqrt{n} \leqslant a \leqslant n - 0.83\sqrt{n}$: $Q(n,a) \leqslant \exp((1+o(1))1.74\sqrt{n})$,
2. *Pour* $0.64\sqrt{n} \leqslant a \leqslant n - 0.64\sqrt{n}$: $Q(n,a,2) \leqslant \exp((1+o(1))1.982\sqrt{n})$

Démonstration. A peu de choses près c'est le Lemme 2.1 de [2]. On pose, pour 1, $\varepsilon = 0.83$, et l'on démontre par récurrence que pour $i\varepsilon\sqrt{n} \leqslant a \leqslant (i+1)\varepsilon\sqrt{n}$, et $i \leqslant \sqrt{n}/2$, on a

$$Q(n,a) \leqslant (2p(2\varepsilon\sqrt{n}))^{i-1} \exp(1.74\sqrt{n}). \tag{32}$$

Dans (32) on a extrapolé la fonction p, en posant $p(x) = p(\lfloor x \rfloor)$. Notons que pour $n \leqslant 100$, on a $Q(n,a) \leqslant q(n) \leqslant \exp(1.74\sqrt{n})$, et la relation (32) est vérifiée pour tout a. On applique (32) avec $i = \lfloor \log n \rfloor$ et (19) puis les Théorèmes 1 et 2 de [6] pour majorer $Q(n,a)$ lorsque $\varepsilon\sqrt{n} \leqslant a \leqslant n/2$.

La preuve est similaire pour 2. L'équation (32) est remplacée par

$$Q(n,a,2) \leqslant (2p(2\varepsilon\sqrt{n}))^{i-1} \exp(1.982\sqrt{n}).$$

On observe que $Q(n,a,2) \leqslant R(n,a)$, le nombre de partitions sans restrictions de n qui ne représentent pas a, et l'on utilise les majorations de $R(n,a)$ données par les Théorèmes 1 et 2 de [6].

Démonstration du Théorème 4. On remarque d'abord que pour prouver la minoration (2) dans [12], on minore en fait $\hat{q}(n)$ par $p(n)^{0.361}$, et compte tenu de (19) et (21), cela prouve la minoration dans (9). Pour la majoration on procède comme dans [12]: Par le Lemme 4.3 le nombre de partitions qui ne représentent pas un a, avec $0.83\sqrt{n} \leqslant a \leqslant n - 0.83\sqrt{n}$ est $\leqslant n\exp((1+o(1))1.74\sqrt{n})$. Si l'on enlève ces partitions, pour une partition restante Π, $\mathscr{E}(\Pi)$ contiendra tous les nombres entre $0.83\sqrt{n}$ et $n - 0.83\sqrt{n}$. De tels ensembles, il y en a au plus $2^{0.83\sqrt{n}}$, compte tenu de la symétrie. On a donc

$$\hat{q}(n) \leqslant 2^{0.83\sqrt{n}} + n\exp((1+o(1))1.74\sqrt{n})$$

et avec (21), cela démontre (9). La majoration dans (10) se démontre de la même façon. Quant à la relation $\hat{p}(n) = \hat{q}(n,2)$, elle découle du Théorème 1, (5).

5. Grandes valeurs de $l(E)$

On rappelle que deux partitions de n sont dites équivalentes si elles représentent le même ensemble. Dans ce paragraphe, nous supposons $\mathscr{A} = \mathbb{N}^*$. On sait par le Lemme 1.1 que toute partition est équivalente à une partition 2-réduite c'est à dire telle que chaque sommant apparait au plus deux fois. On va préciser un peu ce résultat. On dit qu'une partition est *complètement 2-réduite* si, pour tout couple d'entiers naturels non nuls (u,r), il existe au plus $r+1$ sommants à valeurs dans $\{u, 2u, 4u, \ldots, 2^{r-1}u\}$. Remarquons que toute partition complètement 2-réduite est 2-réduite; en effet, prenant $r=1$, pour tout u, il existe au plus 2 sommants à valeur dans le singleton $\{u\}$.

Lemme 5.1. *Toute partition est équivalente à une partition complètement 2-réduite, qui a moins de sommants que la partition initiale.*

Demonstration. Soit Π une partition de n non complètement 2-réduite. Soit $\{u, 2u, 4u, \ldots, 2^{r-1}u\}$ une progression géométrique de raison 2 et de longueur r la plus petite possible qui empêche la partition Π d'être complètement 2-réduite. Si $r = 1$, il y a au moins trois sommants qui prennent la valeur u et on obtient une partition équivalente plus courte, en remplaçant les sommants u, u, u par les sommants $u, 2u$. Si $r > 1$ alors la partition Π contient au moins une fois chaque sommant $u, 2u, \ldots, 2^{r-1}u$, car si l'un des $2^j u$ n'était pas un sommant de Π, l'une des deux suites $(u, 2u, \ldots, 2^{j-1}u)$, $(2^{j+1}u, \ldots, 2^{r-1}u)$ empêcherait Π d'être complètement 2-réduite, contredisant la minimalité de r. De plus les sommants u et $2^{r-1}u$ apparaissent deux fois; si, par exemple le sommant $2^{r-1}u$ n'apparaissait qu'une fois, la suite $u, 2u, \ldots, 2^{r-2}u$ empêcherait Π d'être complètement 2-réduite. Ainsi Π contient la suite:

$$u, u, 2u, 4u, \ldots, 2^{r-1}u, 2^{r-1}u,$$

Cette suite représente tous les multiples de u depuis u jusquà $3.2^{r-1}u$ et la suite

$$u, 2u, \ldots, 2^{r-1}u, (2^{r-1} + 1)u$$

représente le même ensemble. Ces deux suites sont donc équivalentes. En remplaçant la suite $u, u, 2u, 4u, \ldots, 2^{r-1}u, 2^{r-1}u$ de longueur $r+2$ par la suite $u, 2u, \ldots, 2^{r-1}u$, $(2^{r-1} + 1)u$, de longueur $r + 1$, on obtient une partition équivalente à la première.

Tant que la partition obtenue n'est pas complètement 2-réduite on la remplace par une partition équivalente, soit en remplaçant un triplet de la forme u, u, u par le doublet $u, 2u$, soit en remplaçant un $(r + 2)$-uplet de la forme $u, u, 2u, 4u, \ldots, 2^{r-1}u, 2^{r-1}u$ par le $(r + 1)$-uplet $u, 2u, \ldots, 2^{r-1}u, (2^{r-1} + 1)u$. Chaque réduction diminue d'une unité le nombre des sommants, le processus se termine donc. $\square$

Lemme 5.2. *Soit une suite croissante d'entiers naturels non-nuls $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r = m$, telle que, pour tout $u \geqslant 1$ et $r' \geqslant 1$, il y ait au plus $r' + 1$ des x_i quiprennent leur valeur dans $\{u, 2u, \ldots, 2^{r'-1}u\}$. Alors on a $r \leqslant (3m + 1)/2$. En particulier, si*

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r, \quad n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r$$

est une partition complètement 2-réduite de n, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $n_i \geqslant (2i - 1)/3$.

Démonstration. On considère la partition suivante de $\{1, 2, \ldots, m\}$, indexée par les entiers impairs $\leqslant m$:

$$A_1 = \{1, 2, 4, 8, \ldots\},$$
$$A_3 = \{3, 6, 12, \ldots\},$$
$$A_5 = \{5, 10, \ldots\},$$
$$A_7 = \{7, 14, \ldots\},$$
$$\ldots$$

Par hypothèse, pour chaque nombre impair $u \leqslant m$, le nombre des i tels que $x_i \in A_u$ est majoré par $1 + \text{card}(A_u)$. Il en résulte que r est majoré par m augmenté du nombre des entiers impairs $\leqslant m$.

Appliquant maintenant ce résultat à la suite $n_1, n_2, \ldots, n_i$ on obtient $i \leqslant (3n_i + 1)/2$ c'est à dire $n_i \geqslant (2i - 1)/3$. □

Démonstration de la majoration (11) du Théorème 5. Soit $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ une partition la plus courte possible ayant E comme ensemble de sous-sommes. Par le Lemme 5.1, on peut supposer que cette partition est complètement 2-réduite. En appliquant le lemme précédent on obtient $n_i \geqslant (2i - 1)/3$, ce qui donne

$$n = \sum_{i=1}^{r} n_i \geqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{r} (2i - 1) = \frac{1}{3} r^2. \qquad \square$$

Lemme 5.3. *Soit une partition de n dont les plus petits sommants sont* $a, a+1, a+2, \ldots, 2a-1$ *(ce qui suppose* $n \geqslant (3a^2 - a)/2$*)). Alors toute autre partition équivalente contient aussi les sommants* $a, a+1, a+2, \ldots, 2a-1$.

Demonstration. Elle est immédiate, car une telle partition ne contenant aucun entier plus petit que a ne peut représenter les entiers $a, a+1, \ldots a + (a-1)$ que si chacun d'eux est un sommant. □

Démonstration de la minoration (12) du Théorème 5. On choisit pour a le plus grand entier tel que $3(a+1)a/2$ ne dépasse pas n et l'on considère la partition Π formée des sommants

$$a, a+1, \ldots, 2a-1, n - (3a^2 - a)/2.$$

Par le Lemme 5.3, on a $l(\mathscr{E}(\Pi)) \geqslant a \geqslant (1 + o(1))\sqrt{2n/3}$. □

A jouté à la lecture des épreuves. Récemment, J.-C. Aval (aval@math.u-bordeaux.fr) a amélioré le lemme 2.1 de [2], ce qui lui permet de remflacu les constantes 0.96 et 0.773 du Théorème 4 par 0.955 et 0.768.

Références

[1] N.G. de Bruijn, On Mahler's partition problem, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 51 (1948) 659–669; Indag. Math. 10 (1948) 210–220.

[2] J. Dixmier, Partitions avec sous-sommes interdites. Bull. Soc. Math. Belgique 42 (1990) 477–500.

[3] J. Dixmier, J.L. Nicolas, Partitions without small parts, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 51, Number Theory, Budapest, Hungary, 1987, pp. 9–33.

[4] P. Erdős, J.L. Nicolas, On practical partitions, Collectanea Math. 46 (1995) 57–76.

[5] P. Erdős, J.L. Nicolas, A. Sárközy, On the number of partitions of n without a given subsum I, Discrete Math. 75 (1989) 155–166.

[6] P. Erdős, J.L. Nicolas, A. Sárközy, On the number of partitions of n without a given subsum II, in: B. Brendt, H. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand (Eds.), Analytic Number Theory, Birkhaüser, Basal, 1990, pp. 205–234.

[7] P. Erdős, M. Szalay, On some problems of J. Dénes and P. Turán, in: P. Erdős (Ed.), Studies in Pure Mathematics to the memory of Paul Turán, Budapest, 1983, pp. 187–212.
[8] G.H. Hardy, S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc. 2 (17) (1918) 75–115; and Collected Papers of S. Ramanujan, pp. 276–309.
[9] A. Hildebrand, On a conjecture of Balog, Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985) 517–523.
[10] L.K. Hua, On the number of partitions of a number into unequal parts, Trans. Amer. Math. Soc. 51 (1942) 194–201.
[11] A.E. Ingham, A Tauberian theorem for partitions, Ann. Math. 42 (1941) 1075–1090.
[12] J.L. Nicolas, A. Sárközy, On two partitions problems, Acta Math. Hung. 77 (1997) 95–121.
[13] H. Rademacher, Topics in analytic number theory, Die Grundleheren der Math. Wiss., Band 169, Springer, Berlin, 1973.