

## Double Interpolation des Nombres Euleriens

LÉONCE LESIEUR ET JEAN-LOUIS NICOLAS

Nous donnons une double interpolation des nombres eulériens  $A(k, n)$  ( $k$  et  $n$  entiers positifs) sous la forme d'une fonction  $A(x, y)$  ( $x$  et  $y$  réels,  $x$  quelconque,  $y > -1$ ) dont les valeurs pour  $x$  et  $y$  entiers positifs sont précisément les  $A(k, n)$ . Une deuxième fonction  $B(x, y)$  est également proposée sous forme intégrale. Nous démontrons l'identité de ces deux fonctions, ainsi que l'égalité  $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) dx = \Gamma(y + 1)$ . Enfin nous donnons une forme explicite de la transformée de Fourier de la fonction  $((\sin t)/t)^\alpha$  pour tout  $\alpha$  réel  $> 0$ .

We propose a double interpolation of the eulerian numbers  $A(k, n)$  ( $k$  and  $n$  integers) as a function  $A(x, y)$  ( $x$  and  $y$  real numbers,  $x$  arbitrary,  $y > -1$ ) taking exactly the values  $A(k, n)$  when  $x$  and  $y$  are integers. A second function  $B(x, y)$  defined by an integral representation is another candidate. We prove that the two functions are equal and that  $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) dx = \Gamma(y + 1)$ . Finally, an explicit form for the Fourier transform of the function  $((\sin t)/t)^\alpha$  is given for all  $\alpha$  real  $> 0$ .

### 1. INTRODUCTION

Les nombres eulériens<sup>†</sup>

$$A(k, n) = \sum_{p < k} (-1)^p \binom{n+1}{p} (k-p)^n, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 1 \leq k \leq n$$

ont fait l'objet de deux travaux antérieurs des auteurs [11, 13]. Dans le dernier travail, on établit en particulier la *représentation intégrale*:

$$A(k, n) = \frac{2(n!)}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \cos((n+1-2k)t) dt$$

et on en déduit une *interpolation 'horizontale'* en remplaçant l'entier  $k$  par un nombre réel  $x$ , ce qui donne:

$$A(x, n) = \frac{2(n!)}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n+1} \cos(ut) dt, \quad u = 2x - (n+1). \quad (1)$$

La fonction  $x \mapsto A(x, n)$  a les propriétés suivantes:

- (i)  $A(x, n)$  est égal au nombre eulérien  $A(k, n)$  pour  $x = k = 1, 2, \dots, n$ ;
- (ii)  $A(x, n) = 0$  pour  $x \leq 0$  ou  $x \geq n + 1$ ;
- (iii)  $A(x, n + 1) = (n + 2 - x)A(x - 1, n) + xA(x, n)$  (récurrence fonctionnelle triangulaire);

<sup>†</sup> Pour les propriétés générales combinatoires, algébriques et géométriques, on pourra consulter le livre d'analyse combinatoire de Comtet [7; t. 1, p. 63; t. 2, p. 82] et les références à Loday [12], Foata et Schützenberger [9], Carlitz [5] et Riordan [15].

(iv)  $A(x, n) = A(n + 1 - x, n)$  (symétrie par rapport à  $(n + 1)/2$ ).

$$(v) \quad A(x, n) = \sum_{p < x} (-1)^p \binom{n+1}{p} (x-p)^n, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

(expression polynomiale par morceaux ou 'spline function' [13]).

On se propose ici d'étudier une *interpolation 'verticale'* en remplaçant l'entier naturel  $n$  par un nombre réel  $y > -1$ . Dans la fonction  $A: (x, y) \mapsto A(x, y)$  ainsi obtenue, les valeurs  $A(x, y)$  seront donc les nombres eulériens  $A(k, n)$  lorsque  $x$  et  $y$  sont des entiers  $k$  et  $n$  positifs. Cette interpolation peut se faire *a priori* de deux façons. Au Paragraphe 2 nous considérons une première approche qui résulte de la formule (2) pour conduire à la fonction  $F$  définie par:

$$F(x, y) = \sum_{p < x} (-1)^p \binom{y+1}{p} (x-p)^y, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Cette fonction  $F$  ne vérifie pas la propriété de symétrie:  $F(x, y) \neq F(y + 1 - x, y)$ . C'est pourquoi nous symétrisons en prenant pour  $A(x, y)$  la formule:

$$A(x, y) = \frac{1}{2}(F(x, y) + F(y + 1 - x, y)) \quad (4)$$

qui, elle, vérifiera les bonnes propriétés exigées pour l'extension.

Une deuxième approche consiste à partir de la formule intégrale (1) où l'on remplace formellement l'entier  $n$  par le nombre réel  $y > -1$ , selon l'expression:

$$I(\alpha, u) = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha \cos(ut) dt \quad (5)$$

avec  $\alpha = y + 1 > 0$ ,  $u = 2x - \alpha$ ,  $\alpha$  et  $u$  réels. Bien entendu, il faut préciser la fonction:

$$f_\alpha: t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha$$

qui est à valeurs complexes et définie sur  $\mathbb{R}$  suivant les valeurs de  $t$  par:

$$f_\alpha(t) = e^{ir\pi\alpha} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha \quad \text{si} \quad r\pi < t < (r+1)\pi, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

$f_\alpha(r\pi) = 0$  pour  $r \geq 1$  et prolongée par parité pour  $t < 0$ . De plus, pour aboutir à des fonctions réelles, nous prenons en définitive la partie réelle:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \Re I(\alpha, u) = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re f_\alpha(t) \cos(ut) dt \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} \left( \cos(r\pi\alpha) \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha \cos(ut) dt \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Au Paragraphe 4 nous démontrons que ces deux procédés conduisent au même résultat (Théorème 4.3):

$$A(x, y) = B(x, y).$$

Ce théorème est l'un des résultats principaux et il ne s'obtient pas immédiatement. La

démonstration nécessite d'abord l'examen du cas  $0 < \alpha < 1$ , qui est la clé de la question, et ensuite le *passage de  $\alpha$  à  $\alpha + 1$* , qui est plus facile. En addition, nous déduisons de la valeur de l'intégrale (5), le calcul de la transformée de Fourier  $\hat{f}_\alpha$  de la fonction  $f_\alpha$  définie par (6) (cf. corollaire du Théorème 4.1). Auparavant, il nous aura fallu au Paragraphe 3 justifier l'existence de l'intégrale (5) et en donner quelques propriétés. Au Paragraphe 5 nous démontrons le théorème suivant (Théorème 5.1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) dx = \Gamma(y + 1)$$

qui est la généralisation d'une formule de Worpitzky:  $\sum_{k=1}^n A(k, n) = n!$  étendue d'abord à  $A(x, n)$  sous la forme  $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, n) dx = \int_0^{n+1} A(x, n) dx = n!$  (cf. [13]). La démonstration du Théorème 5.1 utilise pour le cas  $\alpha > 1$  des éléments de la théorie classique de la transformation de Fourier que l'on peut trouver par exemple dans le livre de Chandrasekharan [6]. Pour atteindre le cas  $0 < \alpha < 1$  et terminer la démonstration, on justifie un *procédé de descente* qui permet de passer de  $\alpha + 1$  à  $\alpha$ . Notons qu'une preuve différente du Théorème 5 a été donnée dans [18, p. 560] (voir aussi [3, Proposition 3.1]).

Enfin au Paragraphe 6, nous démontrons, comme application des résultats précédents, une propriété qui a été aussi trouvée récemment par Zhang par d'autres méthodes (cf. [19]) et également par Butzer et Hauss (cf. [4, Théorème 9]). La série  $\sum_{k=1}^{\infty} F(k, y)$  est convergente pour  $y > -1$  et a pour somme  $\Gamma(y + 1)$ .

On pourra trouver des travaux voisins motivés soit par les fonctions splines (cf., par exemple, [17, pp. 134–139]) soit par les dérivées d'ordre fractionnaire (cf. [3], [18] ou [2]). Mais le lien avec les nombres eulériens n'y sont pas mentionnés. Le but du travail récent [4] est l'étude des fonctions  $E(\alpha, k)$ , soit  $F(k, \alpha)$  avec nos notations, lorsque  $k$  est un entier positif. A la fin de l'article, le rapport avec la dérivation d'ordre fractionnaire est établi et cela donne une autre façon d'obtenir la partie réelle de  $J(\alpha, u)$  dans le Théorème 4.1 ci-dessous. Mais il n'est pas dit comment la fonction  $p_\alpha(x)$ , avec nos notations  $F(x, \alpha - 1)$ , peut servir à définir  $A(x, y)$  lorsque  $x$  n'est pas entier.

## 2. PREMIÈRE APPROCHE

Elle se fait avec la formule (3) de l'introduction. Dans cette formule, il est convenu que  $F(x, y) = 0$  pour  $x \leq 0$  (mais pas pour  $x \geq y + 1$ ). On a la propriété suivante inspirée du cas  $y = n$  entier:

PROPRIÉTÉ 2.1. (*réurrence fonctionnelle triangulaire*). Pour  $y > -1$  et  $x$  réel, on a

$$F(x, y + 1) = (y + 2 - x)F(x - 1, y) + x(F(x, y)). \tag{8}$$

DÉMONSTRATION. Nous utiliserons l'identité combinatoire:

$$\binom{y + 1}{p} = \binom{y}{p} + \binom{y}{p - 1}. \tag{9}$$

On a:

$$F(x, y + 1) = \sum_{p \geq 0, p < x} (-1)^p \binom{y + 2}{p} (x - p)^{y+1},$$

$$(y + 2 - x)F(x - 1, y) = \sum_{q \geq 0, q < x - 1} (-1)^q \binom{y + 1}{q} (x - 1 - q)^y (y + 2 - x)$$

et

$$xF(x, y) = \sum_{p \geq 0, p < x} (-1)^p \binom{y+1}{p} (x-p)^y x.$$

En posant  $q = p - 1$ , on a:

$$(y+2-x)F(x-1, y) = \sum_{p \geq 1, p < x} (-1)^{p-1} \binom{y+1}{p-1} (x-p)^y (y+2-x).$$

Le terme correspondant à  $p = 0$  dans  $xF(x, y)$ , s'il existe (c'est à dire si  $x > 0$ ), est  $x \cdot x^y = x^{y+1}$ , qui est bien le terme attendu dans  $F(x, y+1)$ . Pour les autres termes, on a:

$$\sum_{p \geq 1, p < x} (-1)^p (x-p)^y \left[ \binom{y+1}{p} x - \binom{y+1}{p-1} (y+2-x) \right]. \quad (10)$$

Les termes entre crochet valent, par (9):

$$x \binom{y+2}{p} - (y+2) \binom{y+1}{p-1} = \binom{y+2}{p} (x-p),$$

et (10) est bien égal à  $F(x, y+1)$ . □

La propriété de symétrie:  $F(x, y) = F(y+1-x, y)$  n'a pas lieu, mais on peut y remédier grâce à la:

**PROPRIÉTÉ 2.2 (symétrisation).** *La fonction  $(x, y) \mapsto F(y+1-x, y)$  vérifie la propriété de récurrence fonctionnelle triangulaire.*

La vérification est immédiate. □

Enfinement:

**PROPRIÉTÉ 2.3.** *La fonction  $A: (x, y) \mapsto A(x, y)$  définie par (3) et (4) pour  $x$  réel quelconque et  $y$  réel  $> -1$  réalise une double interpolation des nombres eulériens qui vérifie la propriété de récurrence fonctionnelle triangulaire et la propriété de symétrie:  $A(x, y) = A(y+1-x, y)$ .*

$F(x, y)$  est continue en  $x$  lorsque  $y > 0$ , et ses points de discontinuité pour  $-1 < y < 0$  sont  $x = 0, 1, 2, \dots$ .  $A(x, y)$  est continue en  $x$  lorsque  $y > 0$  et ses points de discontinuité pour  $-1 < y < 0$  sont  $x = 0, 1, 2, \dots$  et  $x = \alpha - 0, \alpha - 1, \alpha - 2, \dots$ , où  $0 < \alpha = 1 + y < 1$ . Nous donnons ci-après les courbes représentatives de  $F(x, -\frac{1}{2})$  et  $F(x, \frac{1}{2})$ , qui commandent celles de  $A(x, \frac{1}{2})$  et  $A(x, -\frac{1}{2})$ . On y voit que  $F(x, y)$  n'est pas nécessairement positif comme dans le cas  $y = n$  entier, pas plus que  $A(x, y)$ . On verra plus tard que  $F(x, y)$  et  $A(x, y)$  tendent vers 0 quand  $x \mapsto \pm\infty$  lorsque  $y > 0$ , et que, si  $-1 < y < 0$ , on a encore  $\lim_{k \rightarrow +\infty} F(k, y) = 0$  (cf. §6).

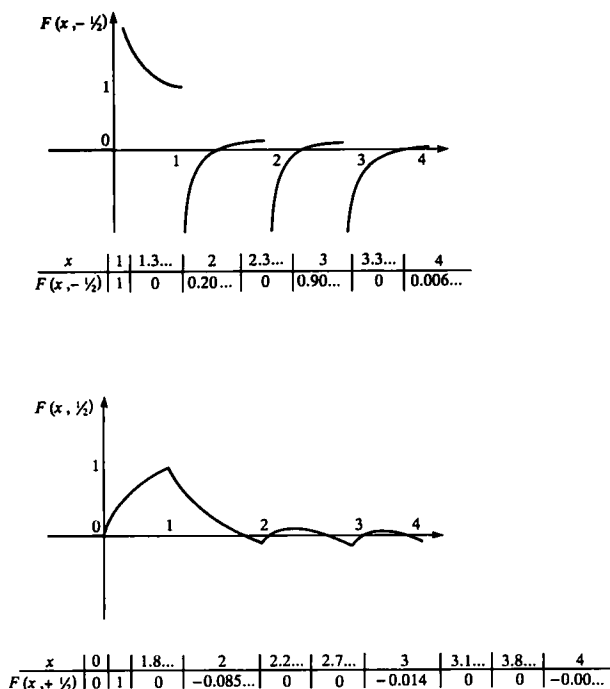


FIGURE 1.

### 3. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES $J(\alpha, u)$ ET $I(\alpha, u)$

Avec la définition (6), la transformée de Fourier de  $f_\alpha$  s'écrit:

$$\hat{f}_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha e^{iut} dt, \quad (11)$$

et compte tenu de la parité de  $f_\alpha(t)$ , on a

$$\hat{f}_\alpha(u) = 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha \cos(ut) dt. \quad (12)$$

Par la définition (5), on a

$$I(\alpha, u) = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha \cos(ut) dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \hat{f}_\alpha(u). \quad (13)$$

Il est utile d'introduire aussi l'intégrale

$$J(\alpha, u) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha e^{iut} dt \quad (14)$$

qui sera à la base du calcul de  $I(\alpha, u)$  par la formule

$$I(\alpha, u) = J(\alpha, u) + J(\alpha, -u). \quad (15)$$

**THÉORÈME 3.1.** *Les fonctions  $J(\alpha, u)$  et  $I(\alpha, u)$  sont définies et continues en tout point  $(\alpha, u)$  lorsque  $\alpha > 1$  et  $u \in \mathbb{R}$ .  $J(\alpha, u)$  est définie et continue en tout point  $(\alpha, u)$  lorsque  $0 < \alpha \leq 1$ , et  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$  et  $I(\alpha, u)$  est définie et continue en tout point  $(\alpha, u)$  vérifiant  $0 < \alpha \leq 1$  et  $u \pm \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour  $\alpha > 1$ , le théorème découle de la convergence normale des intégrales (13) et (14) pour  $\alpha \geq \alpha_0 > 1$  et  $u$  réel. Pour  $0 < \alpha \leq 1$ , nous allons appliquer le critère de convergence de Cauchy, et la transformation d'Abel. Posons

$$\varphi = \varphi(t, \alpha, u) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha e^{iut} \quad (16)$$

et montrons d'abord que si  $T$  et  $T'$  sont des nombres réels vérifiant  $0 < T \leq T'$ , on a pour  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ ,

$$\left| \int_T^{T'} \varphi dt \right| \leq \frac{\pi}{T^\alpha} \left( 2 + \frac{1}{|\sin(\pi(u + \alpha))/2|} \right). \quad (17)$$

Désignons par  $\lceil t \rceil = \min_{n \in \mathbb{Z}, n \geq t} n$  le plafond de  $t$ , et posons  $r = \lceil T/\pi \rceil$  et  $s = \lceil T'/\pi \rceil$ . On a  $r \leq s$ , puisque  $T \leq T'$ . Il vient ensuite

$$\left| \int_T^{r\pi} \varphi dt \right| \leq \int_T^{r\pi} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{(r\pi - T)}{T^\alpha} \leq \frac{\pi}{T^\alpha}. \quad (18)$$

De même

$$\left| \int_{T'}^{s\pi} \varphi dt \right| \leq \frac{\pi}{T'^\alpha} \leq \frac{\pi}{T^\alpha}. \quad (19)$$

Enfin, on a:

$$\begin{aligned} \int_{r\pi}^{s\pi} \varphi dt &= \sum_{n=r}^{s-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|^\alpha}{t^\alpha} e^{in\pi\alpha} e^{iut} dt \\ &= \sum_{n=r}^{s-1} \int_0^\pi \frac{|\sin t|^\alpha}{(t + n\pi)^\alpha} e^{in\pi\alpha} e^{iu(t+n\pi)} dt \\ &= \int_0^\pi |\sin t|^\alpha e^{iut} \left( \sum_{n=r}^{s-1} a_n(t) u_n \right) dt \end{aligned} \quad (20)$$

avec

$$a_n(t) = \frac{1}{(t + n\pi)^\alpha}, \quad u_n = e^{in\pi(u+\alpha)}.$$

Comme  $a_n(t)$  décroît avec  $n$ , on peut appliquer la transformation d'Abel qui donne la majoration:

$$\left| \sum_{n=r}^{s-1} a_n(t) u_n \right| \leq \frac{1}{(t + r\pi)^\alpha} \frac{1}{|\sin(\pi(u + \alpha))/2|} \leq \frac{1}{T^\alpha} \frac{1}{|\sin(\pi(u + \alpha))/2|} \quad (21)$$

et (17) se déduit alors de (18), (19), (20) et (21). La formule (17) montre que l'intégrale (14) définissant  $J(\alpha, u)$  converge uniformément sur tout compact dont les points vérifient  $\alpha > 0$  et  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ , et donc que  $J(\alpha, u)$  est continue en  $\alpha$  et  $u$  lorsque  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ . Enfin, la relation (15) achève la preuve du Théorème 3.1.  $\blacksquare$

THÉORÈME 3.2. Pour  $\alpha$  fixé  $> 0$ , la fonction  $J(\alpha, u)$  est absolument intégrable par rapport à  $u$  sur tout intervalle fermé borné, et l'on a pour tout  $U$  réel:

$$\int_{U-1}^{U+1} J(\alpha, u) du = \frac{2}{\alpha} J(\alpha + 1, U). \quad (22)$$

Pour  $\alpha$  fixé  $> 1$ , la fonction  $J(\alpha + 1, u)$  est dérivable par rapport à  $u$  pour tout  $u$  réel, et l'on a

$$\frac{d}{du} J(\alpha + 1, u) = \frac{\alpha}{2} (J(\alpha, u + 1) - J(\alpha, u - 1)). \quad (23)$$

Pour  $\alpha$  fixé,  $0 < \alpha \leq 1$ , la relation (23) reste valable pour tout  $u$  vérifiant  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ .

DÉMONSTRATION. Lorsque  $\alpha > 1$ , on peut appliquer le théorème de Fubini, puisque pour  $u_1$  et  $u_2$  réels,  $u_1 \leq u_2$ , on a

$$\int_{u_1}^{u_2} \left( \int_0^\infty |\varphi| dt \right) du \leq \int_{u_1}^{u_2} \left( 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \right) du < +\infty.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} J(\alpha, u) du &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\sin t}{t} \right)^\alpha \frac{e^{iu_2 t} - e^{iu_1 t}}{it} dt \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\sin t)^\alpha}{t^{\alpha+1}} \sin \left( \frac{u_2 - u_1}{2} t \right) e^{i(u_1 + u_2)t/2} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

En faisant  $u_1 = U - 1$  et  $u_2 = U + 1$ , (24) donne (22). Lorsque  $\alpha < 1$ , observons d'abord que  $J(\alpha, u)$  est absolument intégrable au voisinage d'un point  $u_0 = -\alpha + 2k$ . On a en effet par (17), en faisant tendre  $T'$  vers  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\pi |J(\alpha, u)|}{\Gamma(\alpha)} &= \left| \int_0^T \varphi dt + \int_T^{+\infty} \varphi dt \right| \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} T^{1-\alpha} + \frac{\pi}{T^\alpha} \left( 2 + \frac{1}{\sin |\pi(u - u_0)/2|} \right) \end{aligned}$$

et en choisissant  $T = 1/|u - u_0|$ , on obtient, quand  $u$  tends vers  $u_0$ ,

$$J(\alpha, u) = O\left( \frac{1}{(u - u_0)^{1-\alpha}} \right). \quad (25)$$

Lorsque  $\alpha = 1$ , un raisonnement similaire donne  $J(1, u) = O(\log(u - u_0))$ . Lorsque  $\alpha \leq 1$ , la convergence uniforme de l'intégrale (14) entraîne (24) pour tout intervalle  $[u_1, u_2]$  ne rencontrant pas  $-\alpha + 2\mathbb{Z}$ . Mais le membre de droite de (24) a un sens pour tout  $u_1$  et  $u_2$  réels, et est une fonction continue de  $u_1$  et  $u_2$ . Par conséquent (24) est encore vraie lorsque  $u_1$  et  $u_2$  appartiennent à  $-\alpha + 2\mathbb{Z}$ , et finalement (24) est vraie pour tout  $u_1$  et  $u_2$  réels. Pour  $\alpha > 0$ , la fonction de  $u$ ,  $J(\alpha, u)$  est intégrable au sens de Lebesgue sur tout intervalle borné. La fonction de  $U$ :

$$W(U) = \int_0^U J(\alpha, u) du$$

est donc dérivable en tout point où  $J(\alpha, u)$  est continue, c'est à dire pour tout  $u$  réel (sauf lorsque  $\alpha \leq 1$ ,  $u \in -\alpha + 2\mathbb{Z}$ ), et  $W'(U) = J(\alpha, U)$ . (22) s'écrit

$$J(\alpha + 1, U) = \frac{\alpha}{2}(W(U + 1) - W(u - 1)),$$

qui par dérivation donne (23).  $\square$

**THÉORÈME 3.3.** *Les fonctions  $(\alpha, u) \mapsto \psi(\alpha, u)$  définies par  $J(\alpha, u)$ ,  $J(\alpha, -u)$  et  $I(\alpha, u)$  vérifient la propriété de récurrence triangulaire (26)*

$$\psi(\alpha + 1, u) = \frac{\alpha + 1 - u}{2} \psi(\alpha, u - 1) + \frac{\alpha + 1 + u}{2} \psi(\alpha, u + 1) \quad (26)$$

pour tout  $\alpha > 0$ , et tout  $u$  réel (vérifiant, lorsque  $\alpha \leq 1$ ,  $u \notin 1 - \alpha + 2\mathbb{Z}$  pour  $J(\alpha, u)$  et  $u \notin 1 \pm \alpha + 2\mathbb{Z}$  pour  $I(\alpha, u)$ ).

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de démontrer (26) lorsque  $\psi(\alpha, u) = J(\alpha, u)$ : la formule (26) pour la fonction  $(\alpha, u) \mapsto J(\alpha, -u)$  s'en déduira par le changement de  $u$  en  $-u$ . Celle qui concerne la fonction  $(\alpha, u) \mapsto I(\alpha, u)$  s'obtient alors par (15). D'après la définition de  $(\sin t)^\alpha$ , égal à  $f_\alpha(t)t^\alpha$ , on a  $(\sin t)^{\alpha+1} = (\sin t)^\alpha \sin t$ , et pour  $\alpha > 0$ ,  $(\sin t)^{\alpha+1}$  est continuellement dérivable avec

$$\frac{d}{dt} (\sin t)^{\alpha+1} = (\alpha + 1)(\sin t)^\alpha \cos t.$$

En intégrant (14) par parties, avec

$$\frac{dt}{t^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha} d\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),$$

il vient

$$\begin{aligned} J(\alpha + 1, u) = & -\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi\alpha} \left[ \frac{(\sin t)^{\alpha+1}}{t^\alpha} e^{iut} \right]_0^\infty + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{(\alpha + 1)(\sin t)^\alpha}{t^\alpha} \cos t e^{iut} dt \\ & + \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\pi\alpha} u \int_0^\infty \left( \frac{\sin t}{t} \right)^\alpha (i \sin t) e^{iut} dt. \end{aligned}$$

Le crochet  $[\cdot \cdot \cdot]_0^\infty$  est nul; il reste alors, en remplaçant  $\cos t$  par  $(e^{it} + e^{-it})/2$  et  $i \sin t$  par  $(e^{it} - e^{-it})/2$ :

$$J(\alpha + 1, u) = \frac{\alpha + 1}{2}(J(\alpha, u - 1) + J(\alpha, u + 1)) + \frac{u}{2}(J(\alpha, u + 1) - J(\alpha, u - 1))$$

ce qui prouve (26) pour  $\psi = J$ .  $\square$

#### 4. COMPARAISON DES DEUX APPROCHES

**THÉORÈME 4.1.** *Pour tout  $\alpha$  réel  $> 0$ , et non entier, pour tout  $u$  réel (tel que  $\alpha + u \notin 2\mathbb{Z}$ , lorsque  $0 < \alpha < 1$ ),  $J(\alpha, u)$  défini par (14) vérifie, avec  $F$  défini par (3):*

$$\begin{aligned} J(\alpha, u) = & \frac{1}{2} F\left(\frac{\alpha + u}{2}, \alpha - 1\right) \\ & + \frac{i}{2} \left[ \frac{\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} F\left(\frac{\alpha + u}{2}, \alpha - 1\right) - \frac{1}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{p \geq 0, p > (\alpha + u)/2} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \left(p - \frac{\alpha + u}{2}\right)^{\alpha-1} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$



COROLLAIRE 4.2. La transformée de Fourier de la fonction  $f_\alpha$ , définie par (11) et (6), est égale (par (13) et (15)) à :

$$\hat{f}_\alpha(u) = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)} (J(\alpha, u) + J(\alpha, -u))$$

et le Théorème 4.1 permet d'en donner une forme explicite.

PREUVE DU THÉORÈME 4.1. Observons d'abord que la somme de la formule (27) est absolument sommable par la formule (28) ci-dessous. Ensuite, le point de départ est le développement de

$$(\sin t)^\alpha = \frac{e^{it\alpha}}{2^\alpha i^\alpha} (1 - e^{-2it})^\alpha$$

par la série du binôme. Mais il faut naturellement préciser ce développement et tenir compte de la détermination choisie précédemment pour  $(\sin t)^\alpha$  suivant les valeurs de  $t$ . C'est l'objet des différents lemmes suivants dans lesquels nous examinons d'abord le cas  $0 < \alpha < 1$ .

Cas  $0 < \alpha < 1$ .

LEMME 4.1. Pour tout  $\alpha$  réel fixé,  $\alpha > 0$ , la série

$$1 - \alpha z + \dots + (-1)^p \binom{\alpha}{p} z^p + \dots$$

converge uniformément pour  $|z| \leq 1$ . Lorsque  $z \neq 1$ , sa somme est

$$S(z) = (1 - z)^\alpha = \exp(\alpha \log(1 - z))$$

avec  $\log(1 - z) = \log|1 - z| + i \arg(1 - z)$ ,  $-\pi/2 < \arg(1 - z) < \pi/2$ . Lorsque  $z = 1$ , sa somme est  $S(z) = 0$ .

DÉMONSTRATION. On a pour  $\alpha$  non entier

$$(-1)^p \binom{\alpha}{p} = \frac{\Gamma(p - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(p + 1)}$$

et par la formule de Stirling (cf. [1, Chap. VII, §2])

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

il vient

$$(-1)^p \binom{\alpha}{p} \sim \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} p^{-1-\alpha}, \quad p \rightarrow +\infty. \tag{28}$$

Ceci démontre la convergence normale de la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} z^p$$

pour  $|z| \leq 1$ . Soit  $S(z)$  la somme de cette série.  $S(z)$  est analytique pour  $|z| < 1$ , continue pour  $|z| \leq 1$  et vaut  $(1 - z)^\alpha$  pour  $z$  réel  $-1 \leq z \leq 1$ . Mais la fonction

$F(z) = \exp(\alpha \log(1-z))$  est analytique pour  $\Re(1-z) > 0$  avec la détermination  $-\pi/2 < \arg(1-z) < \pi/2$  pour le logarithme et l'on a  $S(z) = F(z)$  pour  $z$  réel  $-1 < z < 1$ . ■

LEMME 4.2. Soit  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $t = r\pi + \tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \pi$ ,  $0 < \alpha < 1$ . On a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} e^{i\tau(\alpha-2p)} = e^{i\alpha\pi} 2^{\alpha} i^{\alpha} |\sin t|^{\alpha}$$

en prenant  $i^{\alpha} = e^{i\alpha\pi/2}$ .

DÉMONSTRATION. On a

$$1 - e^{-2i\tau} = 1 - e^{-2i\tau} = e^{-i\tau}(e^{i\tau} - e^{-i\tau}) = 2ie^{-i\tau} \sin \tau,$$

et donc :

$$|1 - e^{-2i\tau}| = 2 |\sin \tau|, \quad \arg(1 - e^{-2i\tau}) = \frac{\pi}{2} - \tau \quad \text{car} \quad \sin \tau \geq 0.$$

D'après le Lemme 4.1 il vient, lorsque  $t \notin \pi\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} e^{i\tau\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} e^{-2p\tau i} &= e^{i\tau\alpha} \exp\left(\alpha \log(2 |\sin t|) + i\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)\right) \\ &= 2^{\alpha} |\sin t|^{\alpha} e^{i\alpha\pi/2} e^{i\alpha r\pi}. \end{aligned}$$

Enfin, lorsque  $t \in \pi\mathbb{Z}$ , l'égalité ci-dessus a encore lieu, les deux membres valant 0. ■

LEMME 4.3. Soit  $r \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . On a

$$\int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{|\sin t|^{\alpha}}{t^{\alpha}} e^{iut} dt = e^{-i\pi\alpha r} 2^{-\alpha} i^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^{\alpha}} dt.$$

DÉMONSTRATION. On utilise le Lemme 4.2 :

$$\frac{|\sin t|^{\alpha}}{t^{\alpha}} e^{iut} = e^{-i\pi\alpha} 2^{-\alpha} i^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^{\alpha}}$$

pour tout  $t \neq 0$  avec  $r\pi \leq t \leq (r+1)\pi$ . Intégrons maintenant entre  $r\pi$  et  $(r+1)\pi$ . La série des modules est intégrable puisque, par (28),

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} |(-1)^p| \binom{\alpha}{p} t^{-\alpha} dt &= O\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\alpha}} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} t^{-\alpha} dt\right) \\ &= O\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\alpha}} \int_0^{\pi} t^{-\alpha} dt\right) \\ &= O\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\pi^{1-\alpha}}{1-\alpha} \frac{1}{p^{1+\alpha}}\right) < +\infty \end{aligned}$$

et le Lemme 4.3 s'ensuit par le théorème de la convergence dominée. ■

LEMME 4.4. Soit  $0 < \alpha < 1$ . On a, pour  $y$  réel  $> 0$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-iyt}}{t^{\alpha}} dt = e^{-i(\pi/2)(1-\alpha)} y^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{(\sin(\pi\alpha))\Gamma(\alpha)} e^{-i(\pi/2)(1-\alpha)} y^{\alpha-1}$$

et pour  $y < 0$ , l'intégrale ci-dessus prend la valeur conjuguée.

DÉMONSTRATION. Cette intégrale se trouve (avec  $u = -y$ ) dans les tables de Oberhettinger (cf. [14, p. 199]) comme transformée de Fourier sur  $(0, +\infty)$  de  $1/t^\alpha$ . La dernière égalité s'obtient en appliquant la formule des compléments:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin(\pi\alpha). \quad \blacksquare$$

LEMME 4.5. Soit  $a \notin 2\mathbb{Z}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . La famille d'intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{it(a-2p)}}{t^\alpha} dt$$

converge uniformément pour  $p \in \mathbb{Z}$ .

DÉMONSTRATION. La convergence au voisinage de  $t = 0$  est uniforme par rapport à  $p$  quelconque puisque

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{it(a-2p)}}{t^\alpha} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

et  $0 < \alpha < 1$ . Soit  $m = \min_{p \in \mathbb{Z}} |a - 2p|$ . La convergence au voisinage de  $+\infty$  s'obtient en intégrant par parties, et en appliquant le critère de Cauchy. On pose  $s = a - 2p$ ; il vient pour  $1 \leq T \leq T'$ :

$$\int_T^{T'} \frac{e^{it(a-2p)}}{t^\alpha} dt = \frac{1}{is} \left[ \frac{e^{ist}}{t^\alpha} \right]_T^{T'} + \frac{\alpha}{is} \int_T^{T'} \frac{e^{ist}}{t^{\alpha+1}} dt$$

et

$$\left| \int_T^{T'} \frac{e^{it(a-2p)}}{t^\alpha} dt \right| \leq \frac{2}{mT^\alpha} + \frac{\alpha}{m} \int_T^{T'} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{3}{mT^\alpha}. \quad \blacksquare$$

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1 LORSQUE  $0 < \alpha < 1$ . Il résulte du Théorème 3.1 que, pour  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ , on a

$$J(\alpha, u) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sum_{r=0}^{+\infty} e^{ir\pi\alpha} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{|\sin t|^\alpha}{t^\alpha} e^{iur} dt.$$

En exprimant l'intégrale à l'aide du Lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned} J(\alpha, u) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} 2^{-\alpha} i^{-\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \int_{r\pi}^{(r+1)\pi} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^\alpha} dt \\ &= \frac{2^{-\alpha} i^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}{\pi} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \int_0^{N\pi} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Or l'intégrale étant uniformément convergente en  $p$  d'après le Lemme 4.5, et la série  $\sum_p (-1)^p \binom{\alpha}{p}$  étant absolument convergente par le Lemme 4.1, on en déduit:

$$J(\alpha, u) = \frac{2^{-\alpha} i^{-\alpha} \Gamma(\alpha)}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^\alpha} dt.$$

Si  $p > \frac{1}{2}(\alpha + u)$ , on obtient au moyen du Lemme 4.4:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^\alpha} dt = (2p - \alpha - u)^{\alpha-1} \frac{\pi}{(\sin(\pi\alpha))\Gamma(\alpha)} e^{-(i\pi/2)(1-\alpha)}.$$

Si  $p < \frac{1}{2}(\alpha + u)$ , on obtient l'intégrale conjuguée:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{i(\alpha+u-2p)t}}{t^\alpha} dt = (\alpha + u - 2p)^{\alpha-1} \frac{\pi}{(\sin(\pi\alpha))\Gamma(\alpha)} e^{(i\pi/2)(1-\alpha)}.$$

On aura donc en ajoutant les deux contributions données par les valeurs de  $p = 0, 1, 2, \dots$

$$J(\alpha, u) = \sum_{p < \frac{1}{2}(\alpha+u)} \frac{ie^{-i\pi\alpha}}{2 \sin \pi\alpha} \left(\frac{\alpha+u}{2} - p\right)^{\alpha-1} (-1)^p \binom{\alpha}{p} \\ + \sum_{p > \frac{1}{2}(\alpha+u)} \frac{-i}{2 \sin \pi\alpha} \left(p - \frac{\alpha+u}{2}\right)^{\alpha-1} (-1)^p \binom{\alpha}{p}.$$

ce qui donne la formule (27) lorsqu'on explicite les parties réelle et imaginaire.

PASSAGE DU CAS  $0 < \alpha < 1$  AU CAS  $\alpha > 1$  DANS LE THÉORÈME 4.1. En revenant à  $x$  et  $y$  par  $\alpha = y + 1$ ,  $u = 2x - y - 1$  et en utilisant les fonctions  $F$  définie par (3), et  $G$  définie par

$$G(x, y) = \sum_{p \geq 0, p > x} (-1)^p \binom{y+1}{p} (p-x)^y \quad (29)$$

la formule (27) s'écrit

$$J(y+1, 2x-y-1) = \frac{1}{2}F(x, y) \\ + \frac{i}{2} \left( \frac{\cos(\pi(y+1))}{\sin(\pi(y+1))} F(x, y) - \frac{1}{\sin(\pi(y+1))} G(x, y) \right). \quad (30)$$

Cette formule a donc été démontrée pour  $-1 < y < 0$  et pour tout  $x$  réel,  $x \notin \mathbb{Z}$ . Par le Théorème 3.3, nous voyons que le premier membre de (30) vérifie la relation de récurrence triangulaire avec  $g(x, y) = J(y+1, 2x-y-1)$ :

$$g(x, y+1) = (y+2-x)g(x-1, y) + xg(x, y) \quad (31)$$

pour  $y > -1$  et  $x \notin \mathbb{Z}$ . Si nous démontrons que la fonction du second membre vérifie aussi la relation de récurrence triangulaire, nous aurons étendu la formule (30) à l'intervalle  $0 < y < 1$  et par suite à toute valeur de  $y > -1$  et de  $\alpha > 0$ . Or il en est ainsi de la fonction  $F(x, y)$  (Propriété 2.1) et aussi de

$$\frac{\cos(\pi(y+1))}{\sin(\pi(y+1))} F(x, y)$$

puisque  $\cos(\pi(y+1))/\sin(\pi(y+1))$  reste invariant par le changement de  $y$  en  $(y+1)$ . Pour que le second membre de (30) vérifie la relation de récurrence triangulaire, il suffit donc en définitive que la fonction  $G(x, y)/\sin(\pi(y+1))$  la vérifie, c'est à dire que l'on ait:

$$-G(x, y+1) = (y+2-x)G(x-1, y) + xG(x, y). \quad (32)$$

Or, la démonstration de (32) se fait de la même manière que celle de la Propriété 2.1, et cela achève la démonstration du Théorème 4.1, pour  $\alpha > 1$ ,  $\alpha$  non entier, et  $u + \alpha \notin 2\mathbb{Z}$ . Lorsque  $\alpha > 1$ ,  $\alpha$  non entier, et  $u + \alpha \in 2\mathbb{Z}$ , par le Théorème 3.1,  $J(\alpha, u)$  est continu en  $u$ , et on peut voir que le deuxième membre de (27) est aussi une fonction continue de  $u$ . La relation (27) s'obtient donc par prolongement par continuité.

CAS  $\alpha$  ENTIER. On peut calculer, pour  $|u| \neq 1$ ,

$$\Im J(1, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \sin(ut) dt = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right|, \quad (33)$$

(cf. [14, p. 133]). Par le Théorème 3.1,  $J(\alpha, u)$  est continu en  $\alpha = 1$  pour  $u + 1 \notin 2\mathbb{Z}$ . Il est possible de voir que la partie imaginaire du membre de droite de (27) a une limite quand  $\alpha \rightarrow 1$  et que cette limite est

$$\frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right|.$$

Pour  $\alpha_0$  entier  $> 1$ , on peut calculer  $J(\alpha_0, u)$  par la formule de récurrence (26), ou prendre la limite, quand  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  de la formule (27).

**THÉORÈME 4.3.** *Les deux interpolations réelles des nombres eulériens  $A(x, y)$  défini par (4) et  $B(x, y)$  défini par (7) sont égales pour tout  $y > -1$  et tout  $x$  réel, à l'exception lorsque  $0 < y < 1$  des points  $(x, y)$ , avec  $x \in \mathbb{N}$  ou  $\alpha - x \in \mathbb{N}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Ce théorème a d'abord été vérifié numériquement pour deux valeurs prises au hasard de  $x$  et  $y$ , soit  $x = 2.07$  et  $y = 8.3$ . C'est cette vérification numérique qui nous a conduit à définir  $f_\alpha(t)$  par (6). On a, par (7), (15), (27)\* et (4):

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \Re(I(y+1, 2x-y-1)) = \Re(J(y+1, 2x-y-1) + J(y+1, -2x+y+1)) \\ &= \frac{1}{2}(F(x, y) + F(y+1-x)) = A(x, y). \end{aligned}$$

### 5. THEOREME DE WORPITZKY GENERALISE

La première formule de Worpitzky s'écrit  $\sum_{k=1}^n A(k, n) = n!$ . Elle est valable pour la fonction  $A(x, n)$  sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, n) dx = \int_0^{n+1} A(x, n) dx = n!$$

En effet, dans [14], il est prouvé que  $A(x, n) = n! (A(0, x))^{*(n+1)}$  où  $(A(0, x))^{*(n+1)}$  est la convolée de  $A(0, x)$   $(n+1)$  fois avec elle même, et cela entraîne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(n, x) = n! \left( \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, x) dx \right)^{n+1} = n!.$$

Nous allons démontrer la généralisation à la fonction  $A(x, y)$  sous la forme suivante.

**THÉORÈME 5.1.** *On a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) dx = \Gamma(y+1), \quad y > -1.$$

**DÉMONSTRATION.** La démonstration va utiliser des éléments de la théorie classique de la transformation de Fourier que l'on peut trouver par exemple dans le livre de Chandrasekharan [6]. Observons d'abord que, par le théorème 4.3, (7) et (13), on a:

$$A(x, y) = B(x, y) = \Re \left( \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \hat{f}_\alpha(u) \right) \quad (34)$$

avec  $\alpha = y + 1$  et  $u = 2x - y - 1$ . Nous distinguons deux cas.

(1)  $\alpha > 1$ . Alors  $f_\alpha(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$  est à variation bornée et continue. Nous pouvons appliquer le théorème 5 de [6, §4, p. 28],

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^{+U} e^{-iut} \hat{f}_\alpha(u) du \right) = f_\alpha(t)$$

et qui, pour  $t = 0$  donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_\alpha(u) du = 2\pi f_\alpha(0) = 2\pi. \quad (35)$$

Il vient alors, par (34) et (35)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) dx = \Re \left( \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_\alpha(2x - y - 1) dx \right) = \Gamma(\alpha) = \Gamma(y + 1),$$

ce qui prouve le Théorème 5.1 lorsque  $\alpha > 1$ .

REMARQUE. Lorsque  $\alpha \geq 2$ ,  $f_\alpha(t)$  est de classe  $C^2$ , ce qui entraîne que  $\hat{f}_\alpha \in L_1(-\infty, +\infty)$ . On peut alors appliquer la formule d'inversion de Fourier (cf. [6, p. 21]), ce qui donne (35). Lorsque  $\alpha < 2$ , nous ne savons pas si  $\hat{f}_\alpha \in L_1(-\infty, +\infty)$ .

(2)  $0 < \alpha < 1$ . De (13) et du Théorème 3.3, nous obtenons la formule de récurrence

$$\alpha \hat{f}_{\alpha+1}(u) = \frac{\alpha + 1 - u}{2} \hat{f}_\alpha(u - 1) + \frac{\alpha + 1 + u}{2} \hat{f}_\alpha(u + 1). \quad (36)$$

Ensuite, de (13), (15) et (23), nous avons la formule de dérivation

$$\frac{d}{du} \hat{f}_{\alpha+1}(u) = \frac{1}{2} (\hat{f}_\alpha(u + 1) - \hat{f}_\alpha(u - 1)). \quad (37)$$

Enfin, de (13), (15) et (22), nous avons la formule d'intégration

$$\hat{f}_{\alpha+1}(U) = \frac{1}{2} \int_{U-1}^{U+1} \hat{f}_\alpha(u) du. \quad (38)$$

Par un procédé de descente de  $\alpha + 1$  à  $\alpha$ , nous allons établir que si  $\hat{f}_{\alpha+1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , alors l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_\alpha(u) du$  est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_\alpha(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{\alpha+1}(u) du. \quad (39)$$

Ainsi, la formule (35) prouvée pour  $\alpha > 1$ , sera aussi valable pour  $\alpha > 0$ , ce qui achèvera la preuve du Théorème 5.1.

De (36) et (37), on déduit

$$\alpha \hat{f}_{\alpha+1}(u) = \frac{\alpha + 1}{2} (\hat{f}_\alpha(u - 1) + \hat{f}_\alpha(u + 1)) + u \frac{d}{du} \hat{f}_{\alpha+1}(u). \quad (40)$$

En observant que  $\hat{f}_\alpha(u)$  est paire en  $u$  pour tout  $\alpha$ , on obtient, par (37),

$$\int_{-U}^U (\hat{f}_\alpha(u + 1) - \hat{f}_\alpha(u - 1)) du = [2\hat{f}_{\alpha+1}(u)]_{-U}^{+U} = 0. \quad (41)$$

En intégrant (40) et en tenant compte de (41), il vient:

$$\alpha \int_{-U}^U \hat{f}_{\alpha+1}(u) du = (\alpha + 1) \int_{-U}^U \hat{f}_\alpha(u - 1) du + 2U\hat{f}_{\alpha+1}(U) - \int_{-U}^U \hat{f}_{\alpha+1}(u) du \quad (42)$$

et encore

$$\int_{-U}^U \hat{f}_{\alpha+1}(u) du = \int_{-U}^{+U} \hat{f}_{\alpha}(u-1) du + \frac{2U}{\alpha+1} \hat{f}_{\alpha+1}(U). \quad (43)$$

Mais, pour  $\alpha > 0$ ,  $f_{\alpha+1} \in L_1(-\infty, +\infty)$  et est continument différentiable avec  $f'_{\alpha+1} \in L_1(-\infty, +\infty)$ . On peut donc appliquer le théorème 3B de [6, §3, p. 18], qui exprime que

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} U \hat{f}_{\alpha+1}(U) = 0. \quad (44)$$

On écrit enfin, avec (38),

$$\int_{-U}^U \hat{f}_{\alpha}(u-1) du = \int_{-U-1}^{U-1} \hat{f}_{\alpha}(u) du = \int_{-U-1}^{U+1} \hat{f}_{\alpha}(u) du - 2\hat{f}_{\alpha+1}(U). \quad (45)$$

La relation (44) implique  $\lim_{U \rightarrow +\infty} \hat{f}_{\alpha+1}(U) = 0$ , et (43), (44) et (45) démontrent (39).

THÉORÈME 5.2. On a, pour  $y > -1$ :

$$\int_0^{+\infty} F(x, y) dx = \Gamma(y+1).$$

DÉMONSTRATION. La formule (35) a été démontrée pour tout  $\alpha > 0$ . Par (13), il suit:

$$\int_{-x}^{+\infty} I(\alpha, u) du = 2\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Or, on a, par (15),

$$\int_{-U}^{+U} J(\alpha, u) du = \int_{-U}^{+U} J(\alpha, -u) du = \frac{1}{2} \int_{-U}^{+U} I(\alpha, u) du,$$

d'où

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} \int_{-U}^{+U} J(\alpha, u) du = \Gamma(\alpha). \quad (46)$$

Explicitons la partie réelle, avec (27), en choisissant  $U > \alpha$ :

$$\begin{aligned} \Re \int_{-U}^{+U} J(\alpha, u) du &= \frac{1}{2} \int_{-U}^{+U} F\left(\frac{u+\alpha}{2}, \alpha-1\right) du = \int_{-(U+\alpha)/2}^{(U+\alpha)/2} F(x, \alpha-1) dx \\ &= \int_0^{(U+\alpha)/2} F(x, \alpha-1) dx \end{aligned} \quad (47)$$

puisque  $F(x, y) = 0$  pour  $x \leq 0$ . En posant  $\alpha = y + 1$ , (46) et (47) achèvent la preuve du Théorème 5.2.

## 6. APPLICATION

Nous pouvons déduire du Théorème 5.1, la démonstration du résultat ci-dessous, récemment obtenu par Zhang de façon indépendante (cf. [19]).

THÉORÈME 6.1. Pour tout  $y$  réel  $> -1$ , on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(k, y) = \Gamma(y+1) \quad (48)$$

où  $F$  est défini par (3).

DÉMONSTRATION. Lorsque  $y$  est entier,  $y = n$ , la formule classique de Worpitzky donne  $F(k, n) = A(k, n)$ , et l'on a

$$\sum_{k=1}^n A(k, n) = n!.$$

Supposons d'abord  $y > 0$ . Par (27) et (22), il vient

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k F(x, y-1) dx &= 2\Re \int_{k-1}^k J(y, 2x-y) dx \\ &= \Re \int_{2k-y-3}^{2k-y-1} J(y, u) du = \frac{2}{y} J(y+1, 2k-y-2) = \frac{1}{y} F(k, y). \end{aligned} \quad (49)$$

On déduit alors de (49):

$$\sum_{k=1}^K F(k, y) = y \int_0^K F(x, y-1) dx, \quad (50)$$

et (48) s'ensuit en utilisant le Théorème 5.2.

On peut calculer les sommes partielles de la série (48). Posons  $c_m = \sum_{k=1}^m F(k, y)$ . On a

$$c_m = \sum_{k=1}^m \sum_{0 \leq p \leq k-1} (-1)^p \binom{y+1}{p} (k-p)^y = \sum_{t=1}^m t^y \left( \sum_{0 \leq p \leq m-t} (-1)^p \binom{y+1}{p} \right) \quad (51)$$

et, par (9),

$$c_m = \sum_{t=1}^m t^y (-1)^{m-t} \binom{y}{m-t} = \sum_{0 \leq p \leq m-1} (-1)^p \binom{y}{p} (m-p)^y.$$

Lorsque  $y = n$  est entier, on a  $c_n = n!$  et (51) redonne l'identité de Tepper (cf. [8, p. 47]).

Supposons maintenant  $-1 < y < 0$ . Nous appliquons le théorème suivant d'analyse (cf. [10, th. 41, p. 98]): soit deux suites  $a_n$  et  $b_n$ , la suite  $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$  est appelée la suite résultante ou de composition des deux suites  $a_n$  et  $b_n$ . Alors: si  $r, s, a$  et  $b$  sont réels tels que  $r > -1, s > -1$  et  $a_n \sim an^r, b_n \sim bn^s$ , on a

$$c_n \sim ab \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} n^{r+s+1}.$$

Ici nous avons:

$$a_n = (-1)^n \binom{y}{n} \sim \frac{n^{-y-1}}{\Gamma(-y)}$$

par (28) et  $b_n = n^y$  (avec  $b_0 = 0$ ), donc

$$r = -y - 1 > -1, \quad s = y > -1, \quad a = 1/\Gamma(-y), \quad b = 1.$$

Par conséquent le théorème cité donne:

$$c_n \sim \frac{\Gamma(-y)\Gamma(y+1)}{\Gamma(-y)\Gamma(1)} n^0 = \Gamma(y+1)$$

ce qui achève la preuve du Théorème 6.1. ■

Notons que la convergence de la série (48) entraîne  $\lim_{k \rightarrow +\infty} F(k, y) = 0$  et ceci pour tout  $y > -1$ . Lorsque  $-1 < y < 0$ , par (3), la fonction  $x \mapsto F(x, y)$  n'est bornée sur



aucun intervalle de longueur  $\geq 1$ . Lorsque  $y > 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = 0$ . Cela découle du Théorème 4.1, et de la propriété  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} J(\alpha, u) = 0$ , qui s'obtient en appliquant le théorème de Riemann Lebesgue à l'intégrale (14).

## REFERENCES

1. N. Bourbaki, *Fonctions d'une Variable Réelle*, Ch. VII, La fonction  $\Gamma$ , Hermann Editeurs, Paris, 1951.
2. P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Vol. I: *One-dimensional Theory*. Birkhäuser, Basel/Academic Press, New York, 1971.
3. P. L. Butzer and U. Westphal, An access to fractional differentiation via fractional difference quotients, in: *Fractional Calculus and its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, No. 457, Springer-Verlag, Berlin, 1975, pp. 116–145.
4. P. L. Butzer and M. Hauss, Eulerian numbers with fractional order parameters, *Aeq. Math.*, **46** (1993), 119–143.
5. L. Carlitz, Eulerian numbers and operators, in: *The Theory of Arithmetic Functions*, Lecture Notes in Mathematics, No. 251, Springer-Verlag, Berlin, 1972, pp. 65–71.
6. K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transform*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
7. L. Comtet, *Analyse Combinatoire*, tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
8. G. P. Egorychev, *Integral Representation and the Computation of Combinatorial Sums*, Translations of Mathematical Monographs, A.M.S., vol. 59, 1984.
9. D. Foata et M. P. Schützenberger, *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Mathematics, No. 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
10. G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1956.
11. L. Lesieur and J. L. Nicolas, On the eulerian numbers  $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} A(n, k)$ , *Europ. J. Combinatorics*, **13** (1992), 379–399.
12. J. L. Loday, Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives, *Invent. Math.*, **96** (1989), 205–230.
13. J. L. Nicolas, An integral representation for eulerian numbers, *Coll. Math. Soc. János Bolyai*, **60**, *Sets Graphs and Numbers (Hungary)*, (1991), 514–527.
14. F. Oberhettinger, *Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
15. J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley, New York, 1958, pp. 38–39 et Ch. 8.
16. I. J. Schoenberg, Euler's contribution to cardinal interpolation: the exponential Euler splines, in: *Leonhard Euler 1707–1783, Beitrage zu Leben und Werk, Gedenkbank des Kantons Basels-Stadt*, Birkhauser-Verlag, Basel, 1983, pp. 199–214.
17. L. L. Schumaker, *Spline Functions—Basic Theory*, John Wiley, New York, 1981.
18. U. Westphal, An approach to fractional powers of operators via fractional differences, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **29** (1974), 557–576.
19. C. Zhang, La fonction gamma considérée comme la somme de nombres eulériens généralisés, e *Europ. J. Combinatorics*, **15** (1994), 309–315.

Received 20 May 1993 and accepted 15 March 1994

LÉONCE LESIEUR  
 Université de Paris-Sud,  
 Département de Mathématiques,  
 Bâtiment 425,  
 91405 Orsay Cedex, France

JEAN-LOUIS NICOLAS  
 Université Claude Bernard, Lyon I,  
 Mathématiques, Bâtiment 101,  
 69622 Villeurbanne Cedex, France