Comparaison des ordres maximaux dans les groupes $GL(n, \mathbb{Z})$ et S_n

par

Jean-Louis NICOLAS [1]

Abstract. Let S_n be the symmetric group on n letters, and $g(n)$ be the maximal order of an element of S_n. Let $G(n)$ be the maximum order of torsion elements of $GL(n, \mathbb{Z})$. It is known that for all n, $g(n) \leq G(n)$ and that, as $n \to \infty$,

$$\log\, g(n) \sim \log\, G(n) \sim \sqrt{n\, \log\, n}\,.$$

In this paper, it is proved that for $n \geq 5$, the inequality

$$\log\, G(n) \leq 1.054511\sqrt{n\, \log\, n}$$

holds. Further, it is proved that, as $n \to \infty$, $G(n)/g(n) \to \infty$.

2000 Mathematics subject classification : primary 11 N 56, secondary 11 N 37.

1. Introduction

1. Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Girard Desargues, UMR 5028.

Soit $GL(n,\mathbb{Z})$ le groupe multiplicatif des matrices $n\times n$ inversibles à coefficients entiers. Différents auteurs ont étudié la fonction $\gamma(n)$ ordre maximal d'un sous groupe d'ordre fini de $GL(n,\mathbb{Z})$. En particulier dans [6], il est démontré :

$$\gamma(n) \leq (e^c + o(1))^n \, n!, \quad n \to +\infty,$$

où $c = \sum_p \frac{\log p}{(p-1)^2} = 1.227\ldots$, la sommation portant sur tous les nombres premiers. On conjecture que la constante $e^c = 3.41\ldots$ peut être remplacée par 2.

Nous définissons $G(n)$ comme l'ordre maximal d'un sous groupe cyclique d'ordre fini de $GL(n,\mathbb{Z})$. On trouvera dans [9] quelques propriétés de $G(n)$. Soit S_n le groupe des $n!$ permutations de n lettres. Dans [8], E. Landau a introduit la fonction $g(n)$, ordre maximal d'un élément de S_n, et prouvé que

$$\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}\,. \tag{1.1}$$

Il est facile de voir que S_n se plonge naturellement dans $GL(n,\mathbb{Z})$ et cela entraîne :

$$g(n) \leq G(n). \tag{1.2}$$

La fonction de Landau g a fait l'objet de plusieurs articles, et on lira avec intérêt l'exposé de synthèse [14]. On trouvera dans la thèse de H. Gerlach [3] une généralisation des fonctions g et G.

Une fonction arithmétique f est dite additive si l'on a $f(mn) = f(m) + f(n)$ lorsque m et n sont premiers entre eux. Une telle fonction est donc définie si l'on connait sa valeur sur les puissances de nombres premiers. On définit la fonction additive ℓ par $\ell(p^\alpha) = p^\alpha$ pour tout p premier et $\alpha \geq 1$. Il est démontré dans [15], p.139 que

$$g(n) = \max_{\ell(N)\leq n} N. \tag{1.3}$$

Erdős et Turán ont observé dans [2] qu'il existe un élément d'ordre K dans S_n si et seulement si $\ell(K) \leq n$, et ont montré que le nombre $W(n)$ d'ordres distincts d'éléments de S_n vérifiait

$$\log W(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{n}{\log n}} + O\left(\frac{\sqrt{n} \log \log n}{\log n}\right).$$

Soit f une fonction telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. On dit que N est un champion pour la fonction f (on un f-champion) si $M > N \Rightarrow f(M) > f(N)$ ou, ce qui est équivalent, si $f(M) \leq f(N) \Rightarrow M \leq N$. Une autre façon de formuler (1.3) est de dire que les nombres $g(n)$, valeurs prises par la fonction g, sont exactement les nombres ℓ-champions.

Soit φ l'indicateur d' Euler, et ℓ' la fonction additive définie par

$$\begin{cases} \ell'(1) = \ell'(2) = 0 \\ \ell'(p^\alpha) = \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \quad \text{si} \quad p^\alpha \geq 3. \end{cases}$$

Notons que, pour $N = \prod p_i^{\alpha_i} \not\equiv 2 \bmod 4$, on a $\ell'(N) = \sum \varphi(p_i^{\alpha_i})$, tandis que, pour $N \equiv 2 \bmod 4$, on a $\ell'(N) = \sum \varphi(p_i^{\alpha_i}) - 1$. Remarquons aussi que $\ell'(N)$ est toujours pair, et que, pour N impair, $\ell'(2N) = \ell'(N)$.

Dans [20] (cf. aussi [9] et [7]), il est démontré que K est l'ordre d'un élément de $GL(n, \mathbb{Z})$ si et seulement si $\ell'(K) \leq n$. Il s'ensuit que

$$G(n) = \max_{\ell'(N) \leq n} N \tag{1.4}$$

et les remarques ci-dessus montrent que

$$G(2n+1) = G(2n), \quad n \geq 1. \tag{1.5}$$

On trouvera aussi dans [9] l' équivalence :

$$\log G(n) \sim \sqrt{n \log n}\,, \qquad n \to \infty \tag{1.6}$$

et une table des valeurs de $G(n)$ pour $n \leq 300$.

Comme $\varphi(n) \leq n$, on a $\ell'(n) \leq \ell(n)$ et les formules (1.3) et (1.4) redonnent aisément (1.2). La similitude des formules (1.3) et (1.4) permet d'étendre à G la plupart des résultats démontrés pour g.

Nous dirons qu'un nombre N est super ℓ-champion s'il existe un réel $\rho > 0$ tel que pour tout entier M on ait

$$(1.7)\qquad \ell(M) - \rho \log M \geq \ell(N) - \rho \log N.$$

Un tel nombre est ℓ-champion : $M > N \Rightarrow \ell(M) \geq \ell(N) + \rho \log \frac{M}{N} > \ell(N)$. Cette définition généralise la notion de nombre hautement composé supérieur introduite par Ramanujan (cf. [17]), et dans le problème d'optimisation défini par (1.3), le paramètre ρ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange discret. L'inconvénient est que tous les nombres ℓ-champions ne sont pas super ℓ-champions.

Les nombres super ℓ'-champions sont définis en remplaçant dans la définition des nombres super ℓ-champions la fonction ℓ par ℓ', notamment dans (1.7). Au paragraphe 2, nous rappellerons les propriétés des nombres super ℓ-champions, et nous donnerons les propriétés, très similaires, des nombres super ℓ'-champions. Comme application, nous donnerons au paragraphe 3 la démonstration du theorème 1, qui étend à la fonction G le résultat de [10] :

THÉORÈME 1. *On a pour tout $n \geq 5$:*

$$(1.8)\qquad \log G(n) \leq 1.054510...\sqrt{n \log n}$$

avec égalité pour $n = 235630$, $G(n) = 2^9 3^5 5^3 7^3 11^2 \ldots 29^2 31 \ldots 1811$.

La démonstration du théorème 1 que nous donnerons ci-dessous est différente de celle donnée dans [10] pour majorer $\log g(n)$, et qui aurait pu s'adapter sans difficulté. Il s'agit en fait de deux méthodes de démonstration de ce type de résultat, et il est difficile de dire quelle est la meilleure.

Rappelons que d'après [12], on a $\log g(n) \geq \sqrt{n \log n}$ pour $n \geq 906$. (1.2) et le calcul de $G(n)$ pour $n \leq 905$ montrent que

$$(1.9)\qquad \log G(n) \geq \sqrt{n \log n} \quad \text{pour} \quad n \geq 154.$$

Nous verrons que la fonction G n'est pas beaucoup plus grande que la fonction g. Plus précisément, nous démontrerons :

THÉORÈME 2.
(i) Lorsque $n \to \infty$, on a :

$$(1.10) \qquad (\log n)^{1+o(1)} \leq G(n)/g(n) \leq \exp(O(\log\log n)^2).$$

(ii) Sous l'hypothèse de Riemann, on a, lorsque $n \to +\infty$ *:*

$$(1.11) \qquad G(n)/g(n) \leq (\log n)^{3+o(1)}.$$

Je conjecture que $G(n)/g(n) = (\log n)^{1+o(1)}$. Cependant, la liste des points $(n, G(n)/g(n))$ donnée en annexe, montre une assez grande dispersion.

La démonstration du théorème 2, exposée au paragraphe 6, repose de façon essentielle sur l'estimation de la somme portant sur les nombres premiers :

$$(1.12) \qquad U(x) = \sum_{p \leq x} p^{\alpha_p - 1},$$

où α_p est le plus grand entier tel que

$$(1.13) \qquad p^{\alpha_p} \leq \frac{p}{p-1} \log p \frac{x}{\log x},$$

et sur une somme voisine $V(x)$ définie en (5.21). En effet, si N est un nombre super ℓ-champion, sa décomposition en facteurs premiers est connue (cf. (2.6) ci dessous), et l'on a

$$\ell(N) - \ell'(N) = U(x)$$

pour une valeur de x adéquate.

Pour majorer $U(x)$, on utilise le théorème des nombres premiers qui, sous l'hypothèse de Riemann est beaucoup plus précis, et cela explique la différence entre (1.10) et (1.11). L'étude des sommes $U(x)$ et $V(x)$ fera l'objet du paragraphe 5.

Un autre outil important dans la preuve du théorème 2 est la proposition 3 qui fournit une formule des "accroissements finis" pour les fonctions $\log g$ et $\log G$, et montre que leur comportement local est assez régulier. Cette proposition repose sur la "méthode des bénéfices", qui a déjà été appliquée avec succès dans [15], [11] et [12].

En gros, cette méthode exposée au paragraphe 4, montre que si $g(n)$ est voisin d'un nombre super ℓ-champion N_ρ de paramètre ρ, le point ($\log g(n)$, $\ell(g(n))$) ne s'écarte pas trop de la droite de pente ρ passant par le point ($\log N_\rho, \ell(N_\rho)$). Cet écart, mesuré verticalement, est par définition le bénéfice de $g(n)$ par rapport à ρ. Cette méthode s'étend sans difficultés aux valeurs de $G(n)$ et aux nombres super ℓ'-champion.

Il résulte du théorème 2 que les estimations asymptotiques données dans [11] pour $\log g(n)$, sont aussi valables pour $\log G(n)$, en particulier

$$\log G(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O(\sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{\log n}}) \tag{1.14}$$

où Li désigne le logarithme intégral, Li^{-1} sa fonction réciproque et a un nombre réel positif convenable.

Parmi les problèmes ouverts, nous signalons au paragraphe 2 : les images de $\mathbb{N}$ par g et G ont elles une infinité d'éléments communs ? Soit n_j la suite des nombres tels que $G(n_j) > G(n_j - 1)$. Compte tenu de (1.5) les nombres n_j sont pairs, et l'on peut conjecturer (comme dans [16] pour la fonction g) que $\underline{\lim}(n_{j+1} - n_j) = 2$. Par contre, on peut démontrer comme pour la fonction g (cf. [15], p. 158) qu' il existe des intervalles arbitrairement grands sur lesquels la fonction G est constante, c'est-à-dire $\overline{\lim}(n_{j+1} - n_j) = +\infty$. Enfin l'estimation précise des sommes $U(x)$ et $V(x)$ définies au lemme 10, permettant d'obtenir dans le théorème 2 un équivalent de $\log(G(n)/g(n))$ est sans doute un problème difficile.

Notation. Nous utiliserons les notations suivantes :
$f \ll g$ veut dire $f = O(g)$
$\lfloor x \rfloor$ notera la partie entière de x
p, P, q, Q, p_i, P_i, q_i désigneront des nombres premiers.

2. Les nombres super-champions.

Il a été démontré dans [15], p. 139-141 les équivalences :

$$N \in g(\mathbb{N}) \iff N \text{ est un } \ell-\text{champion} \iff N = g(\ell(N)). \tag{2.1}$$

On a de même comme conséquence de (1.4)

$$N \in G(\mathbb{N}) \iff N \text{ est un } \ell'-\text{champion} \iff N = G(\ell'(N)). \tag{2.2}$$

En effet, il résulte de (1.4) que, pour tout $n \geq 0$,

$$\ell'(G(n)) \leq n, \tag{2.3}$$

et que

$$A > G(n) \Longrightarrow \ell'(A) > n \geq \ell'(G(n)).$$

Cela prouve que $G(n)$ est un ℓ'-champion. Ensuite soit N un ℓ'-champion ; on a, toujours par (1.4),

$$A = G(\ell'(N)) \geq N,$$

et, par (2.3), avec $n = \ell'(N)$, on a $\ell'(A) \leq \ell'(N)$. Comme N est un ℓ'-champion, cela implique $A \leq N$ et $A = N = G(\ell'(N))$. Enfin, $N = G(\ell'(N))$ entraîne évidemment $N \in G(\mathbb{N})$, ce qui complète la preuve de (2.2).

Si N possède k facteurs premiers, on a :

$$(N)^{1/k} = (p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k})^{1/k} \leq \frac{p_1^{\alpha_1} + p_2^{\alpha_2} + ... + p_k^{\alpha_k}}{k} = \frac{\ell(N)}{k}.$$

Il s'ensuit que

$$\ell(N) \geq k\, N^{1/k} \tag{2.4}$$

et comme $k \leq (1 + o(1)) \frac{\log N}{\log \log N}$ (cf. [4], chap. 18) et que la fonction $t \mapsto tN^{1/t}$ est décroissante pour $t \leq \log N$, on a lorsque $N \to +\infty$,

$$\ell(N) \geq \frac{(\log\ N)^{2+o(1)}}{\log\ \log\ N}. \tag{2.5}$$

Pour tout $\rho > 0$ réel fixé, on a donc $\ell(N) - \rho \log\ N \to +\infty$, et cette fonction admet un minimum qu'elle atteint en un (ou plusieurs) nombres N qui, par (1.7), sont super ℓ-champion. Comme la fonction $N \mapsto \ell(N) - \rho \log\ N$ est additive, il est possible de déterminer ces nombres.

Supposons $\rho \geq \frac{2}{\log 2}$. Il existe un unique $x \geq 4$ tel que $\rho = \frac{x}{\log x}$. On définit alors

(2.6) $$N_\rho = \prod_{p \le x} p^{\alpha_p}, \quad \rho = \frac{x}{\log x}$$

avec

(2.7) $$\begin{cases} \alpha_p = 1 & \text{si } \frac{p}{\log p} \le \rho < \frac{p^2 - p}{\log p} \\ \alpha_p = \alpha \ge 2 & \text{si } \frac{p^\alpha - p^{\alpha-1}}{\log p} \le \rho < \frac{p^{\alpha+1} - p^\alpha}{\log p}. \end{cases}$$

Il est montré dans [12] que les nombres super ℓ-champions sont 1, 3, 6 ou N_ρ défini par (2.6) avec $\rho \ge \frac{2}{\log 2}$.

Pour tout $i \ge 1$, la fonction $t \mapsto \frac{t^i - t^{i-1}}{\log t} = t^{i-1}\frac{t-1}{\log t}$ est une bijection croissante de $[1, +\infty[$ sur lui-même. Pour $\rho \ge \frac{2}{\log 2}$, on définit $x_1 \ge 4$ par $\rho = \frac{x}{\log x}$, $x_1 = x$ et pour $i \ge 2$, on définit x_i par

(2.8) $$\frac{x_i^i - x_i^{i-1}}{\log x_i} = \rho.$$

Le nombre N_ρ défini par (2.6) peut être écrit

(2.9) $$N_\rho = \prod_{k \ge 1} \prod_{x_{k+1} < p \le x_k} p^k.$$

Notons que dans (2.9) le produit en k est fini puisque, par (2.8), pour $2^{k-1} > \rho \log 2$, on a $x_k < 2$.

Avant d'étudier les nombres super ℓ'-champions, on observe d'abord :

LEMME 1. *Pour $N \ge 7$, on a $\ell'(N) \ge \ell(N)/2$.*

Démonstration. Soit $N = \prod_p p^{\alpha_p}$. Si N est impair, on a

$$\ell'(N) = \sum_{p|N} p^{\alpha_p}(1 - \frac{1}{p}) \ge \frac{2}{3} \sum_{p|N} p^{\alpha_p} = \frac{2\ell(N)}{3} \ge \frac{\ell(N)}{2}.$$

Si N est multiple de 4, la même démonstration, en minorant $1 - 1/p$ par $1/2$, fournit $\ell'(N) \ge \frac{\ell(N)}{2}$. Si $N \equiv 2 \bmod 4$, on écrit $N = 2N'$ avec N' impair et

$$\ell'(N) = \ell'(N') \geq \frac{2\ell(N')}{3} = \frac{2(\ell(N)-2)}{3} \geq \frac{\ell(N)}{2}$$

dès que $\ell(N) \geq 8$. Or l'étude de la fonction $t \mapsto tN^{1/t}$ et (2.4) montrent que $\ell(N) \geq e \log N$ et donc pour $N \geq 19$, on a $\ell(N) \geq 8$. Le calcul de $\ell(N)$ et $\ell'(N)$ pour $N = 10$, 14, 18 achève la preuve du lemme 1.

Par (2.5) et le lemme 1, on voit que pour ρ fixé, $\ell'(N) - \rho \log N$ tend vers l'infini avec N, et la fonction $N \mapsto \ell'(N) - \rho \log N$ admet un minimum sur $\mathbb{N}^*$, qu'elle atteint en un, ou plusieurs nombres N qui, par (1.7), sont super ℓ'-champions.

Pour $\rho > 0$, ou définit N'_ρ par :

$$N'_\rho = \prod_{p \leq x'} p^{\alpha'_p} \tag{2.10}$$

où, pour $\rho > 0$, x' est défini par $x' = 2$ si $\rho \leq \frac{1}{\log 2}$ et pour $\rho > \frac{1}{\log 2}$ par :

$$\frac{x'-1}{\log x'} = \rho. \tag{2.11}$$

Quant à α'_p, il est défini comme l'exposant α qui minimise la quantité $\ell'(p^\alpha) - \rho\alpha \log p$; de façon plus précise, pour p impair on a

$$\begin{cases} \alpha'_p = 1 & \text{si } \frac{p-1}{\log p} \leq \rho < \frac{(p-1)^2}{\log p} \\ \alpha'_p = \alpha \geq 2 & \text{si } \frac{p^{\alpha-2}(p-1)^2}{\log p} \leq \rho < \frac{p^{\alpha-1}(p-1)^2}{\log p} \end{cases}, \tag{2.12}$$

et pour $p = 2$, compte tenu de ce que $\ell'(2) = 0$, on a

$$\begin{cases} \alpha'_2 = 1 & \text{si } \rho < \frac{2}{\log 2} \\ \alpha'_2 = \alpha \geq 3 & \text{si } \frac{2^{\alpha-2}}{\log 2} \leq \rho < \frac{2^{\alpha-1}}{\log 2}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Table des N'_ρ

$\rho > 0$	N'_ρ	$l'(N'_\rho)$
	2	0
$\frac{2}{\log 3} = 1.82$		
	$6 = 2 \cdot 3$	2
$\frac{4}{\log 5} = 2.48$		
	$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	6
$\frac{2}{\log 2} = 2.88$		
	$120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$	10
$\frac{6}{\log 7} = 3.08$		
	$840 = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	16
$\frac{4}{\log 3} = 3.64$		
	$2520 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$	20
$\frac{10}{\log 11} = 4.17$		
	$27720 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	30

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 1. *On définit pour p premier et $\alpha \geq 2$ le nombre*

$$e(p, \alpha) = \frac{\ell'(p^\alpha) - \ell'(p^{\alpha-1})}{\log\, p}$$

et

$$e(p, 1) = \frac{\ell'(p)}{\log\, p}.$$

Alors les nombres $e(p, \alpha)$, $\alpha \geq 1$ et p premier sont tous distincts, à l'exception de

$$e(2, 2) = e(2, 3) = 2/\log\, 2.$$

Soit $E' = \cup_{p,\alpha}\{e(p, \alpha)\} = \{e_1 = 0,\, e_2 = 2/\log\, 3,\, e_3 = 4/\log\, 5,\, e_4 = 2/\log\, 2,\, e_5 = 6/\log\, 7,\, ...,\, e_j,\, ...\}$, où l'on a classé les éléments de E' par ordre croissant.

Si $\rho \notin E'$, $\ell'(N) - \rho \log N$ est minimal en un seul nombre N'_ρ défini par (2.10). Si $\rho = e_j$, avec $0 < \rho \neq 2/\log 2$, $\ell'(N) - \rho \log N$ est minimal en deux nombres N'_{ρ^-} et N'_{ρ^+}, où ρ^- est un nombre quelconque de $]e_{j-1}, e_j[$ et ρ^+ un nombre quelconque de $[e_j, e_{j+1}[$. Si $\rho = 2/\log 2$, alors $\ell'(N) - \rho \log N$ atteint son minimum en 3 nombres : 30, 60 et 120. Seul, 60 est un nombre super ℓ'-champion qui n'est pas de la forme (2.10).

Démonstration. La preuve est tout à fait semblable à celle que l'on trouvera dans [15], p. 150 pour le minimum de $\ell(N) - \rho \log N$. On utilise l'additivité de $\ell'(N) - \rho \log N$, et l'on détermine α'_p pour minimiser $\ell'(p^\alpha) - \rho\alpha \log p$.

Remarque. Comme on a vu dans l'introduction, un nombre super ℓ'-champion est un ℓ'-champion, et par (2.2), on a donc :

$$N \quad \text{super } \ell'\text{-champion} \Longrightarrow N = G(\ell'(N)). \tag{2.14}$$

DÉFINITION DE x'_i. Pour tout $k \geq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^k(t-1)^2}{\log t}$ est croissante pour $t \geq 1$, et est donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. On définit x' en fonction de ρ par (2.11) lorsque $\rho > 1/\log 2$, $x'_1 = x'$ et pour $i \geq 2$, x'_i est défini par

$$\frac{(x'_i)^{i-2}(x'_i - 1)^2}{\log x'_i} = \frac{x' - 1}{\log x'} = \rho. \tag{2.15}$$

On déduit alors de (2.10), (2.12), et (2.13) : Pour $\rho > \frac{2}{\log 2}$, on a :

$$N'_\rho = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{x'_{k+1} < p \leq x'_k} p^k. \tag{2.16}$$

Comme dans (2.9), le produit en k est en fait fini puisque pour $2^{k-2} > \rho \log 2$, (2.15) donne $x'_k < 2$.

Comparons maintenant les nombres N_ρ et N'_ρ définis par (2.6) ou (2.9) et (2.10) ou (2.16).

PROPOSITION 2. *Pour $\rho > \frac{2}{\log 2}$, N'_ρ défini par (2.10) est un multiple de $2N_\rho$ où N_ρ est défini par (2.6).*

Démonstration. Observons d'abord que x' défini par (2.11) est plus grand que x défini par (2.6). On a de même $x'_i > x_i$ où x'_i et x_i sont définis en fonction de ρ par (2.8) et (2.15). (2.9) et (2.16) montrent alors que N_ρ divise N'_ρ. Le calcul de α'_2 et α_2 par (2.7) et (2.13) montre que l'on a exactement $\alpha'_2 = \alpha_2 + 1$, ce qui achève la démonstration.

Problème. Existe-t-il une suite de valeurs de ρ tendant vers l'infini pour lesquelles on ait $N'_\rho = 2N_\rho$? Ceci se produit pour des valeurs de ρ assez grandes. Par exemple $\rho = 700$, $N_\rho = 2^{10}3^6 5^4 7^3 11^3 13^2 ... 53^2 59 ... 6101$. Mais ce problème dépend des approximations diophantiennes des logarithmes de nombres premiers, et il se peut qu'il soit très difficile. S'il avait une réponse affirmative, on en déduirait que l'intersection

$$\{G(n);\ n \geq 1\} \cap \{2g(n);\ n \geq 1\}$$

est infinie. On peut se demander aussi si les images de $\mathbb{N}$ par g et G ont une infinité d'éléments communs.

LEMME 2. *Désignons les fonctions de Chebichev par* $\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ *et par* $\Psi(x) = \sum_{p \leq x} \lfloor \log x / \log p \rfloor \log p$ *.*

(i) Soit $x \geq 4$, $\rho = x/\log x$ *et* N_ρ *défini par (2.6). Alors, pour tout* $p \leq x$, *p premier, on a* $p^{\alpha_p} \leq x$ *et*

$$\Theta(x) \leq \log N_\rho \leq \Psi(x) \tag{2.17}$$

(ii) Soit $x' \geq 16$, $\rho = (x'-1)/\log x'$ *et* N'_ρ *défini par (2.10). Alors, pour tout* $p \leq x'$, *p premier, on a* $p^{\alpha'_p} \leq x'$ *et*

$$\Theta(x') \leq \log N'_\rho \leq \Psi(x'). \tag{2.18}$$

Démonstration. On trouvera dans [10] la preuve de (i). La preuve de (ii) est similaire : si $\alpha'_p = 1$, $p^{\alpha'_p} \leq x'$ est évident. Supposons $\alpha'_p \geq 2$ et raisonnons par l'absurde : si l'on avait $x' < p^{\alpha'_p}$, par la croissance de la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\log t}$, on aurait $\frac{x'-1}{\log x'} < \frac{p^{\alpha'_p}-1}{\alpha'_p \log p} < \frac{p^{\alpha'_p}}{\alpha'_p \log p}$. En comparant avec (2.12), on aurait :

$$\frac{p^{\alpha'_p-2}(p-1)^2}{\log p} \leq \rho = \frac{x'-1}{\log x'} < \frac{p^{\alpha'_p}}{\alpha'_p \log p}$$

et cela entraînerait

$$(\alpha'_p - 1)p^2 - 2\alpha'_p p + \alpha'_p < 0. \tag{2.19}$$

Mais, pour $\alpha'_p \geq 2$, on a $(\alpha'_p - 1) \geq \alpha'_p/2$, et pour $p \geq 5$, (2.19) n'est jamais vérifiée. Il reste à vérifier les cas $p = 2$ et $p = 3$. Pour $p = 2$, (2.13) donne : $2^{\alpha'_2} \leq 4\rho \log 2 = \frac{x'-1}{\log x'} \log(16) \leq x' - 1 < x'$ pour $x' \geq 16$. De même, pour $p = 3$, (2.12) donne $3^{\alpha'_3} \leq \frac{9}{4}\rho \log 3 \leq \frac{x'-1}{\log x'} \frac{9}{4} \log 3 \leq x' - 1 < x'$ pour $x' \geq 12$.

La preuve de (2.18) est une conséquence facile de $p^{\alpha'_p} \leq x'$, de (2.10) et de la définition des fonctions de Chebichev.

Remarque. D'après le théorème des nombres premiers, on a $\Theta(x) \sim \Psi(x) \sim x$. Les inégalités (2.17) et (2.18) nous donnent donc des informations sur la valeur des nombres super champions. Considérons la suite ordonnée des nombres super ℓ'-champions : $N^{(1)} = 2, N^{(2)} = 6, ..., N^{(j)}, ...$. D'après la proposition 1, $N^{(j)}$ divise $N^{(j+1)}$, et le quotient $N^{(j+1)}/N^{(j)}$ est un nombre premier $p \leq P$ où P est le plus petit nombre premier ne divisant pas $N^{(j)}$. Posons $n^{(j)} = \ell'(N^{(j)})$. On aura $n^{(j+1)} - n^{(j)} = \ell'(p^{\alpha'_p+1}) - \ell'(p^{\alpha'_p})$, où α'_p est l'exposant de p dans $N^{(j)}$. Soit ρ le paramètre commun à $N^{(j)}$ et $N^{(j+1)}$. On a $\rho = (\ell'(p^{\alpha_p+1}) - \ell'(p^{\alpha_p}))/\log p$. On définit x' par $(x'-1)/\log x' = \rho$. On a donc $x' \leq P$. Par le lemme 2, (ii) appliqué à $N^{(j+1)}$, on a $p^{\alpha'_p+1} \leq x' \leq P$ et il s'ensuit que $n^{(j+1)} - n^{(j)} \leq \ell'(p^{\alpha'_p+1}) \leq P$.

3. Majoration effective de G(n)

Il résulte d'abord de (1.3), (1.4) et du lemme 1, que pour n suffisamment grand, on a

$$G(n) \leq g(2n). \tag{3.1}$$

Un calcul plus précis montre qu'en fait, (3.1) est vérifié dès que $n \geq 3$. Du résultat de J.P. Massias [10], $\log g(n) \leq 1.0532\sqrt{n \log n}$, on déduit l'existence d'une constante C telle que

$$\log G(n) \leq C\sqrt{n \log n} \quad \forall n \geq 2.$$

LEMME 3. *Soit N' et N'' deux nombres super ℓ'-champions consécutifs, supérieurs ou égaux à 6. Soit n vérifiant $\ell'(N') \leq n \leq \ell'(N'')$. On a :*

$$(3.2) \qquad \frac{\log G(n)}{\sqrt{n \log n}} \leq \max\left(\frac{\log N'}{\sqrt{\ell'(N') \log \ell'(N')}}, \frac{\log N''}{\sqrt{\ell'(N'') \log \ell'(N'')}}\right).$$

Démonstration. Observons d'abord que la fonction $t \mapsto \sqrt{t \log t}$ est croissante et concave de $]1, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, et donc, sa fonction réciproque est croissante et convexe sur $]0, +\infty[$. D'après la proposition 1, les deux nombres N' et N'' ont un paramètre commun $\rho \in E'$ tel que la fonction $M \mapsto \ell'(M) - \rho \log M$ atteigne son minimum aux deux points N' et N''. Posons $A = G(n)$, on a :

$$(3.3) \qquad \ell'(A) - \rho \log A \geq \ell'(N') - \rho \log N' = \ell'(N'') - \rho \log N''.$$

Désignons par c le membre de droite de (3.2), et posons $\Phi(t) = c\sqrt{t \log t}$. N étant l'un quelconque des deux nombres N' et N'', on a $\log N \leq \Phi(\ell'(N))$ et encore $\ell'(N) \geq \Phi^{-1}(\log N)$. De (3.3), on déduit

$$(3.4) \quad \ell'(A) \geq \ell'(N) - \rho \log N + \rho \log A \geq \Phi^{-1}(\log N) - \rho \log N + \rho \log A.$$

De l'hypothèse $\ell'(N') \leq n \leq \ell'(N'')$, de la croissance de la fonction G et de (2.14), on déduit $N' \leq A \leq N''$, et comme la fonction $t \mapsto \Phi^{-1}(t) - \rho \log t$ est convexe, pour au moins un des deux nombres $N = N'$ ou $N = N''$ on a :

$$\Phi^{-1}(\log N) - \rho \log N \geq \Phi^{-1}(\log A) - \rho \log A.$$

Par (3.4), on obtient $\ell'(A) \geq \Phi^{-1}(\log A)$ soit

$$\log A \leq \Phi(\ell'(A)) = c\sqrt{\ell'(A) \log(\ell'(A))}.$$

Puisque $A = G(n)$, et que par (2.3), $\ell'(A) \leq n$, cela prouve (3.2).

LEMME 4. *Soit $S(x) = \sum_{p \leq x} p$. On a pour $x \geq 70841$,*

$$S(x) \geq \frac{x^2}{2 \log x}\left(1 + \frac{0.477}{\log x}\right).$$

Démonstration. C'est le théorème D, (ii) de [13].

LEMME 5. *Soit $x' \geq 200000$, $\rho = (x'-1)/\log x'$, et N'_ρ défini par (2.10). Alors on a*

$$\log N'_\rho \leq 1.05434\sqrt{\ell'(N'_\rho)\,\log(\ell'(N'_\rho))}\,. \tag{3.5}$$

Démonstration. Par (2.18), on a $\log N'_\rho \leq \Psi(x')$, et l'on a pour $\Psi(x')$ la majoration (cf. [19], p. 357)

$$\Psi(x') \leq x'\left(1+\frac{0.0221}{\log x'}\right) \leq x'\left(1+\frac{0.0221}{\log(200000)}\right) \leq 1.00182\,x'. \tag{3.6}$$

L'exposant de 2 dans N'_ρ est, par (2.13), supérieur à 3 ; en observant que pour $\alpha \geq 2$, $\ell'(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \geq p$ et que $\ell'(p) = p-1$, on a, par (2.10) :

$$\ell'(N'_\rho) \geq \sum_{p\leq x'} p - \pi(x').$$

Par le lemme 4, et la majoration classique de $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$ (cf. [18], p. 69), il vient :

$$\begin{aligned}\ell'(N'_\rho) \;&\geq\; S(x') - \pi(x') \geq \frac{x'^2}{2\log x'}\left(1+\frac{0.477}{\log x'}\right) - 1.26\,\frac{x'}{\log x'}\\ &\geq\; \frac{x'^2}{2\log x'}\left(1+\frac{1}{\log x'}\left(0.477-\frac{2.52\log x'}{x'}\right)\right).\end{aligned}$$

Et, comme pour $x' \geq 200000$, $\frac{2.52\log x'}{x'} \leq 10^{-3}$, on obtient :

$$\ell'(N'_\rho) \geq \frac{x'^2}{2\log x'}\left(1+\frac{0.476}{\log x'}\right). \tag{3.7}$$

Il vient ensuite, en posant $X = 1/\log x'$:

$$\log \ell'(N'_\rho) \geq 2\log x' - \log 2 - \log\log x' = \frac{2}{X}\left(1-\frac{X\log 2}{2}+\frac{X\log X}{2}\right)$$

et

$$\frac{1}{x'}\sqrt{\ell'(N'_\rho)\,\log(\ell'(N'_\rho))} \geq \left((1+0.476X)\left(1-\frac{X\,\log 2}{2}+\frac{X\,\log X}{2}\right)\right)^{1/2}.$$

Or le membre de droite ci-dessus est une fonction décroissante de X pour $0 \leq X \leq 1/10$ et vaut 0.9502 pour $X = 1/\log(200000))$. On a donc pour $x' \geq 200000$:

$$\sqrt{\ell'(N'_\rho)\,\log(\ell'(N'_\rho))} \geq 0.9502\,x'. \tag{3.8}$$

Par (2.18), (3.6) et (3.8), il vient :

$$\frac{\log N'_\rho}{\sqrt{\ell'(N'_\rho)\,\log(\ell'(N'_\rho))}} \leq \frac{1.00182\,x'}{0.9502\,x'} \leq 1.05434$$

ce qui démontre (3.5).

Démonstration du théorème 1. Par les lemmes 3 et 5, il suffit de calculer $\frac{\log N'_\rho}{\sqrt{\ell'(N'_\rho)\,\log(\ell'(N'_\rho))}}$ pour les nombres super ℓ'-champions vérifiant $x' \leq 200000$. Il faut aussi calculer $\frac{\log G(n)}{\sqrt{n\,\log\,n}}$ pour les $n \leq 2$ puisque le lemme 3 n'est valable que pour $6 \leq N' < N''$. Tout ceci a été fait en ordinateur en utilisant MAPLE. Pour tout $N'_\rho \geq 30$ et vérifiant $x' \leq 200000$, on trouve un quotient ≤ 1.054511, et le maximum est obtenu pour $x' = 1811$, $\ell'(N'_\rho) = 235630$. La table ci-dessous montre que les seules exceptions à (1.8) sont $n = 1$, $n = 2$ et $n = 4$.

n	$G(n)$	$\dfrac{\log G(n)}{\sqrt{n \log n}}$
1	2	∞
2	6	1.52178
3	6	0.98695
4	12	1.05524
5	12	0.87597
6	30	1.03733

4. La méthode des bénéfices

Soit ρ un nombre réel positif, et définissons N_ρ par (2.6). On sait que la fonction $M \mapsto \ell(M) - \rho \log M$ est minimale pour $M = N_\rho$. On pose pour un nombre M entier, $M \geq 1$:

$$\text{bén}_\rho(M) = \ell(M) - \ell(N_\rho) - \rho \log(M/N_\rho) \geq 0. \tag{4.1}$$

Comme la fonction ℓ est additive, si l'on pose $M = \prod_p p^{\beta_p}$, on a :

$$\text{bén}_\rho(M) = \sum_p \big(\ell(p^{\beta_p}) - \ell(p^{\alpha_p}) - \rho(\beta_p - \alpha_p) \log p\big)\,, \tag{4.2}$$

et d'après la définition de α_p, chaque terme de cette somme est positif ou nul. On trouvera des explications supplémentaires dans [11] et [16].

Evidemment, cette notion se définit aussi pour la fonction ℓ'. On pose

$$\text{BÉN}_\rho(M) = \ell'(M) - \ell'(N'_\rho) - \rho \log \frac{M}{N'_\rho} \geq 0, \tag{4.3}$$

avec N'_ρ défini par (2.10). Notons que, avec les notations de la proposition 1, si $\rho \in E'$, et si $\hat{N}'_\rho$ est un autre nombre où le minimum de la fonction $M \mapsto \ell'(M) - \rho \log M$ est atteint, on a aussi

$$\text{BÉN}_\rho(M) = \ell'(M) - \ell'(\hat{N}'_\rho) - \rho \log(M/\hat{N}'_\rho).$$

Cela permet de montrer la continuité par rapport à ρ de $\text{BÉN}_\rho(M)$. En utilisant l'additivité de la fonction ℓ', on a comme en (4.2)

$$\text{(4.4)} \qquad \text{BÉN}_\rho(M) = \sum_p \Big(\ell'(p^{\beta_p}) - \ell'(p^{\alpha'_p}) - \rho(\beta_p - \alpha'_p)\log p\Big)$$

et grâce au choix de α'_p en (2.12) et (2.13), on a pour tout p premier

$$\text{(4.5)} \qquad \ell'(p^{\beta_p}) - \ell'(p^{\alpha'_p}) - \rho(\beta_p - \alpha'_p)\log p \geq 0.$$

Nous allons montrer

LEMME 6. *Soit ρ un nombre réel tendant vers $+\infty$. On définit x et x' par $x \geq e$ et $\frac{x}{\log x} = \frac{x'-1}{\log x'} = \rho$. Il existe une constante δ, $1/2 < \delta < 1$ telle que :*
(i) soit $n = \ell(N_\rho)$ et $|t| \leq n^\delta$ alors $\text{bén}_\rho\, g(n+t) = O(x/\log x)$
(ii) soit $n' = \ell'(N'_\rho)$ et $|t| \leq n'^\delta$ alors $\text{BÉN}_\rho\, G(n'+t) = O(x'/\log x')$.
On peut prendre $\delta = 0.732$.

Démonstration. (i) est une amélioration du lemme D de [11], dont nous suivons la méthode de démonstration. Le premier ingrédient est le théorème de Hoheisel [5] : Soit $\pi(y) = \sum_{p\leq y} 1$; il existe $\tau < 1$ tel que pour y assez grand

$$\text{(4.6)} \qquad \pi(y + y^\tau) - \pi(y) \gg \frac{y^\tau}{\log y}\cdot$$

La meilleure valeur de τ est due à Baker et Harman (cf. [1]) et vaut $0,535$. Nous choisirons dans notre lemme $\delta < 1 - \tau/2$.

Nous allons prouver (ii), la preuve de (i) étant très similaire. Nous définissons x'_2 et x'_3 par (2.15) :

$$\frac{x'_3(x'_3-1)^2}{\log x'_3} = \frac{(x'_2-1)^2}{\log x'_2} = \frac{x'-1}{\log x'} = \rho,$$

et les méthodes classiques donnent les développements asymptotiques, lorsque $x' \to +\infty$:

$$(4.7)\qquad x_2' = \sqrt{x'/2}\Big(1 - \frac{\log 2}{2\log x'} + O\Big(\frac{1}{(\log x')^2}\Big)\Big), \qquad x_3' \sim \sqrt[3]{\frac{x'}{3}}$$

(cf. lemme 9 ci-dessous et (5.19)). Ensuite par (2.18) et le théorème des nombres premiers, on a $\log N'_\rho \sim x'$, et comme $n' = \ell'(N'_\rho)$, on a, par (2.14), $N'_\rho = G(n')$ et

$$\log G(n') = \log N'_\rho \sim x'.$$

Enfin, par (1.6), on a $x' \sim \sqrt{n' \log n'}$, ce qui entraîne :

$$(4.8)\qquad n' = (x')^{2+o(1)}.$$

Soit $x' < P_1 < P_2 < \cdots$ les nombres premiers suivant x'. On définit $j \geq 0$ par

$$(4.9)\qquad P_1 - 1 + P_2 - 1 + \cdots + P_j - 1 \leq t < P_1 - 1 + \cdots + P_{j+1} - 1$$

lorsque t est positif. Nous allons démontrer (ii) lorsque t est positif. Pour t négatif, on utiliserait les nombres premiers précédant x'. De (4.9) il vient :

$$j(x'-1) \leq t \leq n'^{\delta},$$

et, par (4.8) et le choix de δ, pour x' assez grand,

$$(4.10)\qquad j \leq (x')^{2\delta - 1 + o(1)} = o\left((x')^{1-\tau}\right) = o\left(x'^{\tau}/\log x'\right)$$

car $\tau > 1/2$. On a donc aussi $j + 1 = o(x'^{\tau}/\log x')$ et (4.6) entraîne que, pour ρ assez grand

$$(4.11)\qquad x' < P_1 < P_2 < \cdots < P_{j+1} \leq x' + (x')^{\tau}.$$

On introduit ensuite les nombres premiers $q_i < \cdots < q_2 < q_1 < x_2'$ précédant x_2' mais supérieur à x_3', et l'on pose

$$M_{j,h} = P_1 P_2 ... P_j \, \frac{P_{j+1} ... P_{j+h}}{q_1 q_2 ... q_{2h}} \, N'_\rho \, .$$

Par (2.16), les nombres premiers q_i, $1 \le i \le 2h$ qui sont compris entre x'_3 et x'_2 divisent N'_ρ avec l'exposant 2 et l'on a, puisque $\ell'(N'_\rho) = n'$

(4.12)

$$\ell'(M_{j,h}) = n' + \sum_{i=1}^{j} (P_i - 1) + \sum_{i=1}^{h} \big((P_{j+i} - 1) - (q_{2i-1} - 1)^2 - (q_{2i} - 1)^2 \big) \, .$$

Dans la deuxième somme, chaque terme vérifie

$$(4.13) \quad (P_{j+i} - 1) - (q_{2i-1} - 1)^2 - (q_{2i} - 1)^2 \ge x' - 1 - 2(x'_2 - 1)^2 \sim \frac{x' \log 2}{\log x'}$$

en utilisant (4.7). Ceci montre que $\ell'(M_{j,h})$ est croissant en h, et l'on fixe alors h tel que

$$(4.14) \qquad \ell'(M_{j,h}) \le n' + t < \ell'(M_{j,h+1}).$$

Par (4.12), (4.13) et (4.14), on a

$$n' + \sum_{i=1}^{j} (P_i - 1) + h(1 + o(1)) \frac{x' \log 2}{\log x'} \le \ell'(M_{j,h}) \le n' + t$$

tandis que, par (4.9) et (4.11), on a

$$n' + t \le n' + \sum_{i=1}^{j} (P_i - 1) + P_{j+1} \le n' + \sum_{i=1}^{j} (P_i - 1) + x' + (x')^\tau .$$

Par comparaison, on obtient avec (4.10)

$$(4.15) \qquad h \le (1 + o(1)) \frac{\log x'}{\log 2} .$$

Pour h vérifiant (4.15), on a bien par (4.6) et (4.7)

$$(4.16)\qquad x_2' > q_1 > q_2 > \cdots > q_{2h} \geq x_2' - {x_2'}^{\tau} > x_3'.$$

Par (4.10) et (4.15), on a $j+h = o(x'^{\tau}/\log x')$, qui assure, par (4.6)

$$(4.17)\qquad x' < P_1 < P_2 < \cdots < P_{j+h} \leq x' + x'^{\tau}.$$

Majorons maintenant $\mathrm{BÉN}_\rho\,(M_{j,h})$: par (4.3) et (4.12), il vient :

$$(4.18)\quad \mathrm{BÉN}_\rho(M_{j,h}) = \sum_{i=1}^{j+h} (P_i - 1 - \rho \log P_i) + \sum_{i=1}^{2h} \left(\rho \log q_i - (q_i - 1)^2\right).$$

Or on a, puisque $\rho = \frac{x'-1}{\log x'} = \frac{(x_2'-1)^2}{\log x_2'}$:

$$P_i - 1 - \rho \log P_i = P_i - 1 - (x'-1) - \rho \log \frac{P_i}{x'} \leq P_i - x'$$

et

$$\begin{aligned} \rho \log q_i - (q_i-1)^2 &= (x_2'-1)^2 - (q_i-1)^2 + \rho \log \frac{q_i}{x_2'} \\ &\leq (x_2'-1)^2 - (q_i-1)^2 \leq 2x_2'(x_2' - q_i). \end{aligned}$$

Donc (4.16), (4.17) et (4.18) entraînent :

$$\mathrm{BÉN}_\rho(M_{j,h}) \leq (j+h)x'^{\tau} + 4h\, x_2'\, {x_2'}^{\tau}$$

et par (4.10), (4.15) et (4.7),

$$(4.19)\qquad \mathrm{BÉN}_\rho(M_{j,h}) \leq (x')^{\max(2\delta+\tau-1,(1+\tau)/2)+o(1)}.$$

Enfin, de (4.14) et de (1.4), on déduit $G(n'+t) \geq M_{j,h}$. Par (4.3), (2.3) et (4.14), il suit :

$$\mathrm{BÉN}_\rho(G(n'+t)) \;=\; \ell'(G(n'+t)) - \ell'(N_\rho') - \rho \log \frac{G(n'+t)}{N_\rho'}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; n' + t - \ell'(N'_\rho) - \rho \log \frac{M_{j,h}}{N'_\rho} \\
&\leq \; \ell'(M_{j,h+1}) - \ell'(N'_\rho) - \rho \log \frac{M_{j,h}}{N'_\rho} \\
&= \; \text{BÉN}_\rho(M_{j,h+1}) + \rho \log \frac{M_{j,h+1}}{M_{j,h}}.
\end{aligned}
$$

Mais, par (4.16),(4.17) et (4.7), il vient

$$\frac{M_{j,h+1}}{M_{j,h}} = \frac{P_{j+h+1}}{(q_{2h+1}q_{2h+2})} \sim \frac{x'}{(x'_2)^2} \to 2$$

et donc, par (4.19), puisque $\delta < 1 - \tau/2$, on complète la preuve de (ii).

LEMME 7. *Soit τ un nombre tel que (4.6) soit vérifié, et $\varepsilon > 0$. Lorsque $n \to +\infty$, on a :*

$$(i) \qquad \ell(g(n)) = n + O_\varepsilon(n^{\tau/2+\varepsilon})$$

$$(ii) \qquad \ell'(G(n)) = n + O_\varepsilon(n^{\tau/2+\varepsilon}).$$

Démonstration. Nous allons montrer (ii). La preuve de (i) est similaire. Soit p le plus petit nombre premier qui ne divise pas $G(n)$; il est démontré dans [9], théorème 1, que p tend vers l'infini avec n. En utilisant les notations du lemme 2, on a $\Theta(p-1) \leq \log G(n)$, et d'après le théorème des nombres premiers, cela entraîne $p \leq 2\log(G(n))$ pour n assez grand. Soit Q le nombre premier précédant p. Par (4.6) et (1.6), on a :

$$p - Q = O(p^\tau) = O(\log(G(n)))^\tau = O(n^{\tau/2+\varepsilon}). \tag{4.20}$$

Soit $\alpha \geq 1$ l'exposant de Q dans $G(n)$, et posons $M = pG(n)/Q$. On a $M > G(n)$ et donc, par (1.4), $\ell'(M) > n$. Il suit

$$n < \ell'(M) = \ell'(G(n)) + p - 1 + \ell'(Q^{\alpha-1}) - \ell'(Q^\alpha) \leq \ell'(G(n)) + p - Q,$$

ce qui donne, par (2.3), $0 \le n - \ell'(G(n)) \le p - Q$ et qui, avec (4.20), achève la preuve de (ii).

L'estimation dans (i) ou (ii) est assez grossière, mais cela vient du manque de précision sur la majoration de la différence entre deux nombres premiers consécutifs (cf. [15], Th. 3, p. 158).

5. Etude de sommes portant sur les nombres premiers

Rappelons d'abord deux lemmes classiques, l'un sur les nombres premiers, l'autre sur les développements asymptotiques.

LEMME 8. *Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x et $\mathrm{li}\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. On pose $r(x) = \pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$. Soit $R(x)$ une fonction positive, croissante pour x assez grand, tendant vers $+\infty$ et vérifiant $|r(x)| \le R(x)$ pour tout x. Soit k un réel ≥ 1, dépendant éventuellement de x, on a :*

$$\sum_{p \le x} p^{k-1} = \mathrm{li}\,(x^k) + O(x^{k-1}R(x)) \tag{5.1}$$

et la constante impliquée dans le O est absolue.

Nous appliquerons ce lemme avec les fonctions $R_1(x) = c_1\, x\, e^{-a\sqrt{\log x}}$, qui est une majoration usuelle de $|r(x)|$ dans le théorème des nombres premiers avec c_1 et a des constantes positives bien choisies, ou encore avec $R_2(x) = c_2\sqrt{x}\log x$ qui majore $|r(x)|$ sous l'hypothèse de Riemann.

Démonstration. On a par l'intégrale de Stieltjès :

$$\begin{aligned}
\sum_{p \le x} p^{k-1} &= \int_{2^-}^x t^{k-1} d[\pi(t)] = \int_{2^-}^x t^{k-1}(d(\mathrm{li}\,(t)) + d[r(t)]) \\
&= \int_2^x \frac{t^{k-1}}{\log t} dt + [t^{k-1} r(t)]_{2^-}^x - \int_2^x (k-1) t^{k-2} r(t) dt \\
&= \mathrm{li}\,(x^k) - \mathrm{li}\,(2^k) + x^{k-1} r(x) - I,
\end{aligned}$$

avec, pour x assez grand

$$|I| = \left| \int_2^x (k-1) t^{k-2} r(t) dt \right| \le |R(x)| \int_2^x (k-1) t^{k-2} dt \le x^{k-1} R(x).$$

Puisque

$$\mathrm{li}\,(2^k) = \int_2^{2^k} \frac{dt}{\log t} \leq \frac{2^k}{\log 2} = O(x^{k-1}) \quad \text{pour } x \to +\infty$$

on a donc

$$|\sum_{p \leq x} p^{k-1} - \mathrm{li}\,(x^k)| \leq 2x^{k-1}R(x) + O(x^{k-1}),$$

ce qui démontre (5.1).

LEMME 9. *Soit x un nombre réel ≥ 4. Pour $k \geq 2$, on définit x_k par*

$$\frac{x_k^k - x_k^{k-1}}{\log\, x_k} = \frac{x}{\log\, x} \tag{5.2}$$

et x'_k par

$$\frac{(x'_k)^{k-2}(x'_k - 1)^2}{\log\, x'_k} = \frac{x-1}{\log\, x}\cdot \tag{5.3}$$

Par commodité, on posera $x_1 = x'_1 = x$. On a pour tout $k \geq 2$:

$$x_k \leq x'_k. \tag{5.4}$$

De plus, on a, uniformément pour $2 \leq k \leq (\log\, x)/\log\log\, x$, lorsque $x \to +\infty$

$$x_k^k \sim (x'_k)^k \sim x/k \tag{5.5}$$

et

$$x_k \sim x'_k \sim (x/k)^{1/k}. \tag{5.6}$$

Démonstration. Notons $\gamma_k(t) = \frac{t^k - t^{k-1}}{\log\, t}$ et $\delta_k(t) = \frac{t^{k-2}(t-1)^2}{\log\, t}\cdot$ Pour $k \geq 2$, ces deux fonctions sont croissantes pour $t \geq 1$. Comme $x \geq 4$, on a

$$\delta_k(x) = \frac{x-1}{\log\, x}\, x^{k-2}(x-1) \geq \frac{x-1}{\log\, x} = \delta_k(x'_k) > 0 = \delta_k(1)$$

et cela prouve

$$(5.7) \qquad\qquad 1 < x'_k \leq x.$$

De plus, on a, par (5.3) et (5.7)

$$\gamma_k(x'_k) = \delta_k(x'_k)\frac{x'_k}{x'_k - 1} = \frac{x-1}{\log\, x}\,\frac{x'_k}{x'_k - 1} \geq \frac{x}{\log\, x} = \gamma_k(x_k)\ ,$$

et cela prouve (5.4). Pour $2 \leq k \leq (\log\, x)/\log\,\log\, x$, on a

$$\gamma_k(4) \leq 4^k \leq \exp(\frac{\log\, 4\, \log\, x}{\log\, \log\, x}) \leq \frac{x}{\log\, x} = \gamma_k(x_k)$$

pour x assez grand, et cela prouve, avec (5.4)

$$(5.8) \qquad\qquad 4 \leq x_k \leq x'_k.$$

Pour minorer x_k, on itère la formule déduite de (5.2) :

$$(5.9) \qquad\qquad x_k^k \geq \frac{x}{\log\, x}\, \log\, x_k.$$

En partant de (5.8), on obtient successivement, pour x assez grand :

$$x_k^k \geq \frac{x}{\log\, x}\, \log\, 4 \geq \sqrt{x}$$

soit :

$$(5.10) \qquad\qquad x_k \geq (x)^{1/2k},$$

$$x_k^k \geq \frac{x}{\log\, x}\,\frac{\log\, x}{2k} = \frac{x}{2k}$$

soit

$$x_k \geq (x/2k)^{1/k}, \tag{5.11}$$

et enfin

$$x_k^k \geq \frac{x}{k \log x}(\log x - \log(2k)) = \frac{x}{k}\left((1 - \frac{\log(2k)}{\log x}\right) \geq \frac{x}{k}\left(1 - \frac{\log\log x}{\log x}\right) \tag{5.12}$$

et

$$x_k \geq \left(\frac{x}{k}\right)^{1/k}\left(1 - \frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1/k} \geq \left(\frac{x}{k}\right)^{1/k}\left(1 - \frac{\log\log x}{\log x}\right). \tag{5.13}$$

Pour majorer x'_k, on itère la formule déduite de (5.3) :

$$(x'_k)^k = \frac{x-1}{\log x}(\log x'_k)\frac{(x'_k)^2}{(x'_k-1)^2} \tag{5.14}$$

en observant que la fonction $t \mapsto \frac{t^2 \log t}{(t-1)^2}$ est croissante pour $t \geq 4$, et que, pour x assez grand, (5.8) assure $x'_k \geq 4$. En partant de (5.7), on obtient :

$$(x'_k)^k \leq \frac{x-1}{\log x} \log x \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{x-1} \leq 2x,$$

ce qui donne

$$x'_k \leq (2x)^{1/k}. \tag{5.15}$$

De (5.8) et (5.11), on déduit

$$x'_k \geq x_k \geq \exp(-\frac{\log(2k)}{k})x^{1/k} \geq \exp\left(-\frac{2}{e}\right) x^{(\log\log x)/\log x} \geq \frac{1}{3}\log x,$$

et de (5.14), on obtient :

$$(x'_k)^k \le \frac{x}{\log x}\left(\frac{\log x}{\log x - 3}\right)^2 \log x'_k. \tag{5.16}$$

En itérant (5.16) à partir de (5.15), il vient :

$$(x'_k)^k \le \frac{x}{\log x}\left(\frac{\log x}{\log x - 3}\right)^2 \frac{1}{k} \log(2x) \le \frac{x}{k}(1 + \frac{10}{\log x}) \tag{5.17}$$

pour x assez grand. Il s'ensuit que :

$$x'_k \le \left(\frac{x}{k}\right)^{1/k}\left(1 + \frac{10}{\log x}\right) \le \left(\frac{x}{k}\right)^{1/k} \exp\left(\frac{10}{\log x}\right). \tag{5.18}$$

Les formules (5.8), (5.12) et (5.17) prouvent (5.5), tandis que (5.8), (5.13) et (5.18) prouvent (5.6). La même méthode fournit, pour k fixé, le développement pour x_k ou x'_k :

(5.19)
$$(\frac{x}{k})^{1/k}\Big(1 - \frac{\log k}{k \log x} - \frac{\log k}{2k^2(\log x)^2}\,(k \log k + 2k - \log k) + O(\frac{1}{(\log x)^3})\Big).$$

LEMME 10. *Soit x un nombre réel ≥ 2. On pose*

$$U(x) = \sum_{p \le x} p^{\alpha_p - 1} \tag{5.20}$$

$$V(x) = \sum_{p \le x} p^{\alpha'_p - 1} \tag{5.21}$$

où α_p et α'_p sont les plus grands entiers vérifiant :

$$p^{\alpha_p} \le \frac{p}{p-1} \log p \, \frac{x}{\log x} \tag{5.22}$$

et

(5.23)
$$p^{\alpha'_p} \le \frac{p^2}{(p-1)^2} \log p \,\frac{(x-1)}{\log x}\cdot$$

Alors on a :

(i) $U(x) \le V(x)$.

(ii) Lorsque $x \to +\infty$, $\quad U(x) \ge (1+o(1))\frac{x}{\log x} \log\log x$.

(iii) Lorsque $x \to +\infty$, $\quad V(x) \ll \frac{x}{\log x} (\log\log x)^2$.

(iv) Sous l'hypothèse de Riemann, on a lorsque $x \to +\infty$ *:*

$$V(x) \le (3+o(1))\frac{x}{\log x} \log\log x.$$

Remarque : Je conjecture que $U(x) \sim V(x) \sim \frac{x}{\log x} \log\log x$, mais ce semble difficile à montrer. Une somme encore plus difficile à étudier est

(5.24)
$$W(x) = \sum_{p^m \le x < p^{m+1}} p^{m-1} = x \sum_{p \le x} p^{-1-\{\log x/\log p\}}$$

où $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire de u. Par une méthode voisine de la démonstration de (iii), A. Ivić a prouvé

(5.25)
$$W(x) \ll x \log\log\log x.$$

Il est facile de voir que $W(x) \gg x$. Sous l'hypothèse, très forte, que les nombres $\log p$, p premier, sont algébriquement indépendants, A. Schinzel a prouvé que $W(x)/x \to +\infty$.

Démonstration. (i) est évident en observant que pour $p \le x$, le membre de droite de (5.22) est inférieur au membre de droite de (5.23). Pour prouver les autres assertions du lemme, on observe d'abord qu'en définissant x_k et x'_k par (5.2) et (5.3), on a par (5.22) et (5.23)

(5.26)
$$\alpha_p = k \iff x_{k+1} < p \le x_k$$

et

$$(5.27) \qquad \alpha'_p = k \Longleftrightarrow x'_{k+1} < p \le x'_k$$

en posant $x_1 = x'_1 = x$. Il vient ainsi

$$(5.28) \qquad U(x) = \sum_{p \le x_K} p^{\alpha_p - 1} + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{x_{k+1} < p \le x_k} p^{k-1}$$

où K est un paramètre à fixer mais que l'on choisira tel que $K \to \infty$ avec x et $K \le \log x / \log \log x$. Pour prouver (ii), on néglige dans (5.28) la première somme, et on applique le lemme 8. Il vient

$$(5.29) \qquad U(x) \ge \sum_{k=1}^{K-1} \left(\mathrm{li}\,(x_k^k) - \mathrm{li}\,(x_{k+1}^k) + O(x_k^{k-1}\, R(x_k)) \right).$$

Par le lemme 9, on a $x_k^k \sim x/k$, et $x/k \to +\infty$ uniformément pour $k \le K$. On a donc :

$$(5.30) \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{K-1} \mathrm{li}\,(x_k^k) \sim \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x_k^k}{\log x_k^k} \sim \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x}{k \log x} \sim \frac{x}{\log x} \log K.$$

Montrons maintenant que

$$S_3 = \sum_{k=1}^{K-1} \mathrm{li}\,(x_{k+1}^k)$$

est négligeable. On a par (5.5)

$$x_{k+1}^k = \frac{x_{k+1}^{k+1}}{x_{k+1}} \le \frac{x_{k+1}^{k+1}}{x_K} \ll \frac{x}{(k+1)\sqrt{\log x}}$$

car, par (5.10) on a : $x_K \ge x^{\frac{1}{2K}} \ge x^{\frac{\log \log x}{2 \log x}} = \sqrt{\log x}$ si l'on choisit $K \le \frac{\log x}{\log \log x}$. On en déduit :

$$(5.31) \qquad S_3 \ll \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \frac{1}{(k+1)} \ll \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \log K.$$

Il reste à estimer

$$S_4 = \sum_{k=1}^{K-1} x_k^{k-1} R(x_k) \ll \sum_{k=1}^{K-1} x_k^k \exp(-a\sqrt{\log x_k}).$$

On choisit $K = \lfloor A\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\rfloor$, avec A suffisamment petit. Par (5.4) et (5.15), on a, pour $k \leq K$, $x_k^k \ll x$ et par (5.10), il s'ensuit que

$$S_4 \ll Kx \exp(-a\sqrt{\log x_K}) \leq Kx \exp\left(-a\sqrt{\frac{\log x}{2K}}\right)$$

et, comme $K \leq \frac{A \log x}{(\log\log x)^2}$, pour $A < a^2/8$, on a

$$S_4 \ll Kx(\log x)^{-a/\sqrt{2A}} = O(x/\log x). \tag{5.32}$$

(5.29), (5.30), (5.31) et (5.32) démontrent (ii). La preuve de (iii) est très voisine. De (5.27), on déduit :

$$V(x) = \sum_{p \leq x'_K} p^{\alpha'_p - 1} + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{x'_{k+1} < p \leq x'_k} p^{k-1}. \tag{5.33}$$

Pour majorer

$$S'_1 = \sum_{p \leq x'_K} p^{\alpha'_p - 1}$$

nous utilisons (5.23). On a :

$$S'_1 \leq \frac{x-1}{\log x} \sum_{p \leq x'_K} \frac{p \log p}{(p-1)^2} = (1+o(1))\frac{x}{\log x} \log x'_K$$

en utilisant la formule $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \sim \log x$, et en remarquant que la série $\sum_p \left(\frac{p \log p}{(p-1)^2} - \frac{\log p}{p}\right)$ est convergente. Par le lemme 9, (5.6), on a :

$$S'_1 \leq (1+o(1))\frac{x}{K \log x} \log\left(\frac{x}{K}\right) \leq (1+o(1))\frac{x}{K}. \tag{5.34}$$

On procède alors comme ci-dessus. On applique le lemme 8 pour estimer la deuxième somme de (5.33). On obtient alors

$$V(x) = S'_1 + S'_2 - S'_3 + O(S'_4) \leq S'_1 + S'_2 + O(S'_4) \tag{5.35}$$

avec $S'_2 = \sum_{k=1}^{K-1} \operatorname{li}((x'_k)^k)$, $S'_3 = \sum_{k=1}^{K-1} \operatorname{li}((x'_{k+1})^k)$ et

$$S'_4 = \sum_{k=1}^{K-1} (x'_k)^k \exp(-a\sqrt{\log x'_k}).$$

On choisit $K = \lfloor \frac{A \log x}{(\log\log x)^2} \rfloor$, avec A suffisamment petit, et l'on obtient comme dans (5.30) et (5.32)

$$S'_2 \sim \frac{x}{\log x} \log K \tag{5.36}$$

et

$$S'_4 = O\left(\frac{x}{\log x}\right) \cdot \tag{5.37}$$

Les relations (5.35), (5.34), (5.36) et (5.37) démontrent (iii).

Sous l'hypothèse de Riemann, la majoration $R(x)$ du reste dans le théorème des nombres premiers peut être choisie telle que $R(x) = O(\sqrt{x} \log x)$ et (5.35) devient

$$V(x) \leq S'_1 + S'_2 + O(S''_4) \tag{5.38}$$

avec

$$S''_4 = \sum_{k=1}^{K-1} (x'_k)^{k-1/2} \log x'_k.$$

On choisit $K = \lfloor B \frac{\log x}{\log\log x} \rfloor$ et $\frac{1}{4} < B < \frac{1}{2}$. Par (5.18), il vient

$$
\begin{aligned}
S_4'' &\le \sum_{k=1}^{K-1} \frac{x}{k}\left(\frac{x}{k}\right)^{-\frac{1}{2k}} \exp\left(\frac{10k}{\log\, x}\right)\left(\frac{1}{k}\log\,\frac{x}{k}+\frac{10}{\log\, x}\right)\\
&\le (1+o(1))\sum_{k=1}^{K-1}\frac{x\log\, x}{k^2}x^{-\frac{1}{2k}}.
\end{aligned}
$$

On définit $K_1 = \frac{\log\, x}{4\,\log\,\log\, x}$. On a :

$$
\sum_{1\le k\le K_1} \frac{1}{k^2}x^{-1/2k} \le x^{-1/2K_1}\sum_{k\ge 1} 1/k^2 = O((\log\, x)^{-2})
$$

et

$$
\sum_{K_1<k\le K-1} \frac{1}{k^2}\,x^{-1/2k} \le \frac{K}{K_1^2}\,x^{-\frac{1}{2K}} \le 16B(\log\, x)^{-1-1/(2B)}\,\log\,\log\, x.
$$

On en déduit

$$
S_4'' = O\left(\frac{x}{\log\, x}\right). \tag{5.39}
$$

et (5.38), (5.34), (5.36) et (5.39) prouvent (iv), en choisissant B aussi proche que l'on veut de $1/2$.

6. Démonstration du théorème 2.

Nous allons maintenant appliquer les lemmes 6 et 7 pour obtenir une formule des "accroissements finis" pour les fonctions $\log\, g$ et $\log\, G$.

Proposition 3. *Soit n tendant vers l'infini, $\delta = 0.732$ comme dans le lemme 6 et n' tel que*

$$
|n-n'| \le \frac{1}{2}n^{\delta}. \tag{6.1}
$$

Alors on a

(i)

$$\log \frac{g(n)}{g(n')} = \frac{n-n'}{2\sqrt{n/\log n}}\left(1+\frac{\log\log n+1}{2\log n}+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^2\right)+O(1)$$

et

(ii)

$$\log \frac{G(n)}{G(n')} = \frac{n-n'}{2\sqrt{n/\log n}}\left(1+\frac{\log\log n+1}{2\log n}+O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^2\right)+O(1).$$

Démonstration. Nous allons prouver (ii) ; la preuve de (i) est similaire. On définit N'_ρ comme le nombre super ℓ'-champion précédant $G(n)$, et l'on pose $m = \ell'(N'_\rho)$. On a donc (cf. remarque à la fin du paragraphe 2) :

$$N'_\rho \leq G(n) < PN'_\rho \tag{6.2}$$

et

$$m \leq n < m+P \tag{6.3}$$

où P est le plus petit nombre premier ne divisant pas N'_ρ. Posons $\frac{x'-1}{\log x'} = \rho$. On sait que P est le plus petit nombre premier supérieur à x' et, par le théorème des nombres premiers, $P \sim x'$. De (6.3) on déduit

$$0 \leq n-m < P = O(x'). \tag{6.4}$$

Déterminons maintenant ρ en fonction de n, ρ étant l'un quelconque des paramètres de N'_ρ (c'est-à-dire tel que N'_ρ minimise $\ell'(M) - \rho\log M$). Avec les notations de (2.10), on a par le lemme 2 : $p-1 \leq \ell'(p^{\alpha'_p}) \leq p^{\alpha'_p} \leq x'$ et cela implique, avec (2.16)

$$\sum_{p\leq x'}(p-1) \leq m = \ell'(N'_\rho) \leq \sum_{p\leq x'}(p-1) + x'\,\pi(x'_2).$$

Par (6.4) et (4.7), il s'ensuit que

$$n = m + O(x') = \sum_{p \le x'} (p-1) \ + O(x')^{3/2} = \sum_{p \le x'} p \ + O(x')^{3/2}$$

et en appliquant le lemme 8,

$$n = \mathrm{li}\,((x')^2) + O\left((x')^2\, e^{-a\sqrt{\log x'}}\right).$$

Comme $\mathrm{li}\,(t) \sim \frac{t}{\log t}$, on en déduit :

$$x' \sim \sqrt{n \log n} \tag{6.5}$$

et

$$(x')^2 = \mathrm{li}^{-1}(n) + O\left((x')^2 \log x'\, e^{-a\sqrt{\log x'}}\right)$$

puis, en changeant la valeur de a,

$$x' = \sqrt{\mathrm{li}^{-1}(n)} + O\left(\sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{\log n}}\right),$$

et enfin $\rho = \frac{x'-1}{\log x'}$ vérifie

$$\rho = \frac{2\sqrt{\mathrm{li}^{-1}(n)}}{\log(\mathrm{li}^{-1}(n))} + O\left(\sqrt{n}\, e^{-a\sqrt{\log n}}\right). \tag{6.6}$$

À partir du développement asymptotique

$$\mathrm{li}\,(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(k-1)!\,x}{\log^k x} + O\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right)$$

on calcule

$$\mathrm{li}^{-1}(y) = y\left(\log y + \log\log y - 1 + O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right)$$

et l'on déduit de (6.6) le développement

$$\rho = 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(1 - \frac{\log\log n + 1}{2\log n} + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^2\right). \tag{6.7}$$

Par (6.4) et (6.5), on a $|m-n| \leq \frac{1}{4}m^\delta$ qui donne, avec (6.1), $|m-n'| \leq m^\delta$. On applique alors le lemme 6, et l'on obtient avec (4.3) :

$$\ell'(G(n)) - m - \rho \log \frac{G(n)}{N'_\rho} = \text{BÉN}_\rho\,(G(n)) = O(\rho)$$

et

$$\ell'(G(n')) - m - \rho \log \frac{G(n')}{N'_\rho} = \text{BÉN}_\rho\,(G(n')) = O(\rho).$$

Par soustraction, en observant que par le lemme 7 et (6.7) on a $\ell'(G(n)) - \ell'(G(n')) = n - n' + O(\rho)$, il vient

$$\log \frac{G(n)}{G(n')} = \frac{n-n'}{\rho} + O(1)$$

qui, avec (6.7), prouve (ii).

Démontrons maintenant le théorème 2. Soit n assez grand. Comme dans la preuve de la proposition 3, on définit N'_ρ comme le plus grand nombre super ℓ'-champion précédant $G(n)$, et l'on pose $m = \ell'(N'_\rho)$. On introduit ensuite les variables P, x', ρ avec la même définition que dans la preuve de la proposition 3, de telle sorte que les relations (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) et (6.7) sont encore vérifiées.

Évaluons maintenant $\ell(N'_\rho)$. Par (2.10), on obtient :

$$\ell(N'_\rho) = \ell'(N'_\rho) + \sum_{p \leq x'} p^{\alpha'_p - 1} = m + V(x')$$

où $V(x')$ est défini en (5.21) et donc, par (1.3),

$$g(m + V(x')) \geq N'_\rho. \tag{6.8}$$

Il vient ensuite, en observant que, par (2.14), $G(m) = G(\ell'(N'_\rho)) = N'_\rho$

$$\frac{G(n)}{g(n)} = \frac{G(n)}{G(m)} \frac{N'_\rho}{g(m+V(x'))} \frac{g(m+V(x'))}{g(n)} \leq \frac{G(n)}{G(m)} \frac{g(m+V(x'))}{g(n)} \tag{6.9}$$

par(6.8). On applique alors la proposition 3. Les hypothèses sont vérifiées, puisque, par (6.4), (6.5) et le lemme 10 (iii), on a

$$(6.10) \quad m-n = O(\sqrt{n\,\log\,n}) \qquad \text{et} \qquad m+V(x')-n = O(\sqrt{n\,\log\,n}).$$

La proposition 3 et (6.9) donnent alors

$$\begin{aligned}\log\frac{G(n)}{g(n)} \quad &\le \quad \frac{n-m}{2\sqrt{n\,/\,\log\,n}}\left(1+\frac{\log\,\log\,n}{2\log\,n}+O\left(\frac{1}{\log\,n}\right)\right)\\ &+ \quad \frac{m+V(x')-n}{2\sqrt{n\,/\,\log\,n}}\left(1+\frac{\log\,\log\,n}{2\log\,n}+O\left(\frac{1}{\log\,n}\right)\right)+O(1).\end{aligned}$$

Par (6.10), les deux premiers termes de reste se fondent dans le troisième, et l'on obtient

$$(6.11) \qquad \log\frac{G(n)}{g(n)} \le \frac{V(x')}{2\sqrt{n\,/\,\log\,n}}\left(1+\frac{\log\,\log\,n}{2\log\,n}\right)+O(1).$$

En estimant x' par (6.5) et $V(x')$ par le lemme 10 (iii) et (iv), on obtient la majoration dans (1.10) et (1.11).

La minoration s'obtient de façon très symétrique. Partant de n assez grand, on définit $N_{\rho'}$ comme le nombre super ℓ-champion précédant $g(n)$. On pose $m' = \ell(N_{\rho'})$. On définit $x \ge 4$ par $\frac{x}{\log\,x} = \rho'$ et P' est le plus petit nombre premier ne divisant pas $N_{\rho'}$. La similitude des fonctions ℓ et ℓ' fait que les relations (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) et (6.7) sont encore vérifiées, en remplaçant m par m', P par P', x' par x et ρ par ρ'. En particulier, on a

$$(6.12) \qquad x \sim \sqrt{n\,\log\,n}.$$

Évaluons maintenant $\ell'(N_{\rho'})$. Par (2.6), on obtient :

$$\ell'(N_{\rho'}) = \ell(N_{\rho'}) - \sum_{p\le x} p^{\alpha_p-1} = m' - U(x)$$

où $U(x)$ est défini en (5.20) et donc, par (1.4),

$$G(m'-U(x)) \ge N_{\rho'}.$$

Il vient ensuite

$$\frac{G(n)}{g(n)} = \frac{G(n)}{G(m'-U(x))}\frac{G(m'-U(x))}{N_{\rho'}}\frac{g(m')}{g(n)} \geq \frac{G(n)}{G(m'-U(x))}\frac{g(m')}{g(n)}.$$

En appliquant la proposition 3 on obtient

$$\log \frac{G(n)}{g(n)} \geq \frac{U(x)}{2\sqrt{n\,/\log\, n}}\left(1+\frac{\log\log n}{2\log n}\right)+O(1) \tag{6.13}$$

qui, à l'aide de (6.12) et de l'estimation de $U(x)$ par le lemme 10 (ii) donne la minoration dans (1.10).

ANNEXE

On trouvera à la page suivante une représentation graphique de $G(n)/g(n)$ pour $2 \leq n \leq 50000$ ainsi que des fonctions $U(x)$ et $V(x)$ définies par (5.20) et (5.21) pour $x \leq 1000$. Les relations (6.11) et (6.13) ci-dessus montrent le lien entre le rapport $G(n)/g(n)$ et ces deux fonctions U et V.

Le nuage des points $(n, G(n)/g(n))$ avec $G(n)/g(n) > 46$ correspond à 18 intervalles de la forme $[n_i \mathinner{..} (n_i + \delta_i)]$. Les valeurs de n_i et δ_i sont listées ci-dessous

15108	0	15526	1	15946	2
16376	3	16808	4	17246	5
17688	6	18136	7	18592	8
19052	9	19514	10	19980	11
20458	12	20944	13	21434	14
21932	8	22434	5	22942	0

Pour les 18 nombres n_i , $G(n_i)$ est un nombre super ℓ'-champion. Les plus grands facteurs premiers de $G(n_i)$ varient de 409 à 509, et correspondent aux valeurs de x' dans (2.10) et (6.11). Sur le deuxième graphique, on constate que, pour x voisin de 400, les valeurs de $U(x)$ et $V(x)$ sont relativement grandes.

On sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = 1$, mais la convergence n'est pas très rapide. Par exemple, $\frac{g(20471)}{g(20470)} = 1.87\ldots$ (noter que $20470 = n_{13} + \delta_{13}$). Le terme d'erreur dans la proposition 3 est important, et cela fait que les calculs ne montrent peut-être pas la vraie nature du phénomène.

On remarquera que $U(109) = V(109) = 62$.

Références

[1] R.C. Baker and G. Harman, The difference between consecutive primes, Proc. London Math. Soc. **72** (1996), 261-280.

[2] P. Erdős and P. Turán, On some problems of a statistical group theory IV, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **19** (1968), 413-435.

[3] H. Gerlach, Über die Elemente einer Menge verallgemeinerter ganzer Zahlen, die klein sind bezüglich einer auf dieser Menge definierten reellwertigen Abbildung, Thèse de l'Université de Kaiserslautern, 1986.

[4] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th edition, Oxford, at the Clarendon Press, 1979.

[5] G. Hoheisel, Primzahlprobleme in der Analysis, Berlin Math. Ges. Sitzungsber. 1930, 580-588.

[6] Y.R. Katznelson, On the order of finite subgroups of $GL(n, \mathbb{Z})$, Expo. Math. **12** (1994), 453-457.

[7] R.S. Kulkarni, Lattices on trees, automorphisms of graphs, free groups and surfaces, preprint.

[8] E. Landau, Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades, Archiv. der Math. und Phys., Sér 3, 5 (1903), 92-103. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, 2nd ed, Chelsea, New-York, 1953, 222-229.

[9] G. Levitt and J.-L. Nicolas, On the maximum order of torsion elements in $GL(n, \mathbb{Z})$ and $\mathrm{Aut}(F_n)$, J. of Algebra **208** (1998), 630-642.

[10] J.P. Massias, Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **6** (1984), 269-280.

[11] J.P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, Evaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique, Acta Arithmetica **50** (1988), 221-242.

[12] J.P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, Effective bounds for the maximal order of an element in the symmetric group, Math. of Comp. **53** (1989), 665-678.

[13] J.P. Massias, G. Robin, Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers, J. Th. des Nombres de Bordeaux **8** (1996), 215-242.

[14] W. Miller, The maximum order of an element of a finite symmetric group, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 497-506.

[15] J.-L. Nicolas, Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et highly composite numbers, Bull. Soc. Math. France **97** (1969), 129-191.

[16] J.-L. Nicolas, "On Landau's function $g(n)$", The Mathematics of Paul Erdős I, R.L. Graham and J. Nešetřil editors, Springer Verlag, Algorithms and Combinatorics n^o 13, 228-240.

[17] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Series 2, **14** (1915), 347-400, and Collected papers, Cambridge at the University Press, 1927, 78-128.

[18] J.B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.

[19] L. Schoenfeld, Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, II, Math. of Comp. **30** (1976), 337-360.

[20] R.T. Vol'vačev, On the order of an element of a matrix group(Russian), Vesci Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk **2,** (1965), 11-16.

Jean-Louis Nicolas
Institut Girard Desargues UMR 5028,
Mathématiques, Bat. 101,
Université Claude Bernard (Lyon 1)
F-69622 VILLEURBANNE Cedex, France
e-mail : jlnicola@in2p3.fr