Ramanujan J (2007) 14: 277–304
DOI 10.1007/s11139-007-9028-6

Grandes valeurs du nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers

Mohand-Ouamar Hernane · Jean-Louis Nicolas

Received: 6 January 2004 / Accepted: 14 February 2005 /
Published online: 31 August 2007

Abstract Among various functions used to count the factorizations of an integer n, we consider here the number of ways of writing n as an ordered product of primes, which, if $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, is equal to the multinomial coefficient $h(n) = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!}$. The function $P(s) = \sum_{p \text{ prime}} p^{-s}$, sometimes called the *prime zeta function*, plays an important role in the study of the function h. We denote by $\lambda = 1.399433\dots$ the real number defined by $P(\lambda) = 1$. The mean value of the function h satisfies $\frac{1}{x}\sum_{n\le x} h(n) \sim -\frac{1}{\lambda P'(\lambda)} x^{\lambda-1}$. In this paper, we study how large $h(n)$ can be. We prove that there exists a constant $C_1 > 0$ such that, for all $n \ge 3$, $\log h(n) \le \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}$ holds. We also prove that there exists a constant C_2 such that, for all $n \ge 3$, there exists $m \le n$ satisfying $\log h(m) \ge \lambda \log n - C_2 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}$. Let us call h-champion an integer N such that $M < N$ implies $h(M) < h(N)$. S. Ramanujan has called *highly composite* a τ-champion number, where $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ is the number of divisors of n. We give several results about the number of prime factors of an h-champion number N, about the exponents in the standard factorization into primes of such an N and about the number $Q(X)$ of h-champion numbers $N \le X$. At the end of the paper, several open problems are listed.

Keywords Factorization · Highly composite numbers · Prime zeta function · Optimization

Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Camille Jordan, UMR 5208 et par l'action de coopération franco-algérienne 01 MDU 514, *Arithmétique, Géométrie Algébrique et Applications*.

M.-O. Hernane
Institut de Mathématiques, Université Houari Boumédienne, BP 32, El Alia,
16111 Bab Ezzouar, Alger, Algeria
e-mail: hernane_m@caramail.com

J.-L. Nicolas (✉)
Institut Camille Jordan, Mathématiques, Université Claude Bernard (Lyon 1),
69622 Villeurbanne cedex, France
e-mail: jlnicola@in2p3.fr

Mathematics Subject Classification (2000) Primary 11A25 · 11N37

1 Introduction

1.1 Diverses fonctions de factorisation

La fonction de factorisation la plus classique est le nombre de diviseurs de l'entier n :

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 \tag{1.1}$$

qui est aussi le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x_1x_2 = n$ en entiers positifs x_1 et x_2.

Pour $r \geq 2$, le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1x_2 \ldots x_r = n \tag{1.2}$$

est $\tau_r(n)$, le nombre de décomposition de n en produit de r facteurs. On a $\tau_2(n) = \tau(n)$, et la série génératrice vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s} = (\zeta(s))^r \tag{1.3}$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ est la fonction de Riemann.

La fonction de Kalmár (cf. [17–19], [10] et aussi [33]) $\widehat{f_K}(n)$ compte le nombre de solutions de (1.2) pour tout r, mais avec la restriction que chaque facteur x_i doit vérifier $x_i \geq 2$. Ainsi, $\widehat{f_K}(12) = 8$ et les 8 factorisations de 12 sont : $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. La fonction de Kalmár satisfait $\widehat{f_K}(n) = \frac{1}{2}\sum_{d|n} \widehat{f_K}\left(\frac{n}{d}\right)$ pour $n \geq 2$ avec $\widehat{f_K}(1) = 1$ et sa série génératrice est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f_K}(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}. \tag{1.4}$$

Elle est reliée à la fonction τ_r par la formule

$$\widehat{f_K}(n) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

La fonction d'Oppenheim (cf. [2, 25] et [14]), $\widehat{f_O}(n)$, a la même définition que celle de Kalmár, mais, cette fois, l'ordre ne compte pas : les trois factorisations de 12 : $3 \cdot 2 \cdot 2$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ et $2 \cdot 2 \cdot 3$ ne comptent que pour une. Ainsi, 12 n'a plus que 4 factorisations d'Oppenheim : $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ et $\widehat{f_O}(12) = 4$. Elle a pour série génératrice (cf. [23])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f_O}(n)}{n^s} = \prod_{n \geq 2}\left(1 - \frac{1}{n^s}\right)^{-1}. \tag{1.5}$$

Soit $\mathcal{A} \subset \{2, 3, 4, \ldots\}$; dans [16] et [9] (cf. aussi [21] et [22]), E. Hille et P. Erdős ont généralisé la fonction de Kalmár en définissant la fonction $f_{\mathcal{A}}(n)$ qui compte le nombre de solutions de (1.2) pour tout r, avec la restriction que chaque x_i doit vérifier $x_i \in \mathcal{A}$. La fonction de Kalmár apparaît ainsi comme $\widehat{f_K}(n) = f_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(n)$. La formule (1.4) se généralise sous certaines conditions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{\mathcal{A}}(n)}{n^s} = \frac{1}{1-\zeta_{\mathcal{A}}(s)} \quad \text{avec } \zeta_{\mathcal{A}}(s) = \sum_{n\in\mathcal{A}} \frac{1}{n^s}. \tag{1.6}$$

1.2 La fonction $h = f_{\mathcal{P}}$

Soit $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Dans cet article, nous nous intéresserons essentiellement à la fonction $f_{\mathcal{P}}(n)$, que nous appellerons $h(n)$ et qui est donc le nombre de solutions de (1.2) en nombres premiers x_1, $x_2, \ldots, x_r$. Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. La seule possibilité d'écrire n sous la forme (1.2) avec $x_1, x_2, \ldots, x_r$ premiers est de prendre $r = \Omega(n)$ et de choisir α_1 variables x_i égales à q_1, α_2 égales à $q_2, \ldots, \alpha_k$ égales à q_k. Le nombre de façons de faire ces choix est le coefficient multinomial (cf. [4, p. 38]) et l'on a donc

$$h(n) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k)!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_k!} \tag{1.7}$$

pour $n \geq 2$ et $h(1) = 1$. Nous définissons

$$P(s) = \zeta_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots, \quad \Re s > 1. \tag{1.8}$$

La fonction P est quelquefois appelée la *fonction ζ des nombres premiers* (cf. [28, p. 69]). La série génératrice de $h(n)$ est, d'après (1.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \frac{1}{1-P(s)}, \quad \Re s > \lambda \tag{1.9}$$

où λ est défini par

$$P(\lambda) = 1, \quad \lambda = 1.399433\ldots, \tag{1.10}$$

et l'on a

$$h(n) = \sum_{p\in\mathcal{P},\ p|n} h\left(\frac{n}{p}\right) \quad \text{pour } n \geq 2. \tag{1.11}$$

Il résulte de (1.9) que

$$\sum_{n\leq x} h(n) = \frac{-1}{\lambda P'(\lambda)} x^{\lambda}(1 + o(1)), \quad x \to \infty \tag{1.12}$$

cf. [22], où est aussi étudié l'ordre normal des fonctions $\widehat{f_K}$, $\widehat{f_O}$ et h, et [31].

1.3 Grandes valeurs des fonctions de factorisation

S. Ramanujan fût le premier, dans [26], à étudier de façon extensive les grandes valeurs de la fonction τ définie par (1.1). Pour cela, il a introduit les nombres *hautement composés* (un nombre N est dit hautement composé si $M < N \Longrightarrow \tau(M) < \tau(N)$) et donné de nombreuses propriétés de ces nombres.

Diverses généralisations des idées de S. Ramanujan ont été développées (cf. [24]), essentiellement en remplaçant la fonction τ par une autre fonction arithmétique. Les grandes valeurs de τ_r, définie par (1.3), sont étudiées dans [6].

Les grandes valeurs de la fonction d'Oppenheim sont étudiées dans [2] et [20]. Quant à la fonction de Kalmár, à la fin de [9, pp. 992–993], P. Erdős dit qu'il sait démontrer qu'il existe deux constantes c_1 et c_2, $0 < c_1 < c_2 < 1$, telles que, pour une suite infinie de valeurs de n, on aît

$$\widehat{f_K}(n) > \frac{n^\rho}{e^{(\log n)^{c_1}}} \tag{1.13}$$

(où $\rho = 1.728647\ldots$ est défini par $\zeta(\rho) = 2$) et que, pour tout $n > n_0$,

$$\widehat{f_K}(n) < \frac{n^\rho}{e^{(\log n)^{c_2}}}. \tag{1.14}$$

Les grandes valeurs de la fonction de Kalmár ont été précisées par R. Evans (cf. [10, Th. 6 et 7]).

1.4 Grandes valeurs de la fonction h

Nous nous proposons dans cet article d'étudier les grandes valeurs de la fonction h définie par (1.7), autrement dit, de résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers

$$\begin{cases} n \le X, \\ \max h(n). \end{cases} \tag{1.15}$$

Soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots, p_k$ le k-ième nombre premier. Par (1.7), le problème (1.15) est, pour k assez grand, équivalent à

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \cdots + x_k \log p_k \le \log X, \\ \max \log\left(\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_k)!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!}\right) \end{cases} \tag{1.16}$$

où les inconnues x_i sont des entiers positifs ou nuls. Grâce à la formule de Stirling, nous remplaçons dans (1.16) la fonction à optimiser par une fonction plus grande, $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, définie en (2.1) ci-dessous. Le problème

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \cdots + x_k \log p_k \le \log X, \\ \max F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{cases} \tag{1.17}$$

a une solution simple, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$, donnée au paragraphe 4, qui permet de majorer $h(n)$. Pour une valeur de k convenable, en choisissant pour α_i un entier voisin de x_i^*, on construit des nombres entiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec une grande valeur de $h(n)$.

Au paragraphe 6, nous étudierons les propriétés des nombres h-champion. Un nombre N est dit h-champion si

$$M < N \Longrightarrow h(M) < h(N). \tag{1.18}$$

Nous montrons que le nombre $\omega(N)$ de facteurs premiers d'un nombre h-champion satisfait $\omega(N) \sim \lambda a^{1/\lambda} \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$ et que $\Omega(N)$, le nombre de facteurs premiers comptés avec multiplicité, satisfait $\Omega(N) \sim 2^\lambda a \log N$, où a est une constante définie au paragraphe 3. Nous donnons enfin un encadrement (assez grossier) pour $Q(X)$, le nombre de nombres $N \le X$ qui sont h-champions.

Le pragraphe 7 présente une liste de problèmes ouverts.

1.5 Notations

Nous noterons $\lfloor t \rfloor$ la partie entière du nombre réel t. Dans tout l'article, on désigne par p_k le k-ième nombre premier ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.) et par $q_1, q_2, \dots, q_k$ des nombres premiers quelconques. La décomposition en facteurs premiers d'un entier générique n sera notée $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, $q_1 < q_2 < \dots < q_k$. On désigne par $v_p(n)$ la valuation p-adique de n et par $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) le nombre de facteurs premiers (resp. comptés avec multiplicité) de n. Enfin, N désignera toujours un nombre h-champion.

2 Approximation de log(h) par F

Proposition 1 *Soit la décomposition en facteurs premiers de* $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ *et* $h(n)$ *défini par* (1.7). *Soit* $x_1, x_2, \dots, x_k$ *des nombres réels positifs ou nuls* ; *on pose*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \log(x_1 + x_2 + \dots + x_k) - \sum_{i=1}^{k} x_i \log x_i \tag{2.1}$$

avec la convention $t \log t = 0$ *si* $t = 0$. *Alors, pour tout* $n \ge 2$, *on a*

$$\text{(i)} \quad \log h(n) \le F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - \frac{k-1}{3} \le F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

$$\text{(ii)} \quad \log h(n) \ge F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) - k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i .$$

Démonstration Nous utiliserons la formule valable pour tout $m \ge 1$

$$m^m \exp(-m) \sqrt{2\pi m} \le m! \le e m^m \exp(-m) \sqrt{m}. \tag{2.2}$$

La formule (2.2) se déduit de la formule de Stirling classique (cf. [1, 6.1.38]), valable pour $m \geq 1$

$$m! = m^m \exp(-m)\sqrt{2\pi m}\exp\left(\frac{\theta}{12m}\right) \quad \text{avec } 0 < \theta < 1 \tag{2.3}$$

car, pour $m \geq 2$, $\sqrt{2\pi}\exp(1/24) = 2.61\ldots < e$, et pour $m = 1$, la majoration dans (2.2) est évidente.

Majoration. Lorsque $k = 1$, on a $h(n) = 1$, $F(\alpha_1) = 0$ et (i) est vérifiée. Nous pouvons donc supposer $k \geq 2$.

En utilisant (1.7), (2.2) et (2.1), il vient

$$h(n) \leq \exp(F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k))\frac{e\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sqrt{\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_k}}. \tag{2.4}$$

Mais, $\alpha_i \geq 1$, et

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} + \cdots + \frac{\alpha_k}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} \leq k \leq 2^{k-1}$$

et (2.4) entraîne, car $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} h(n)\exp(-F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)) &\leq e 2^{\frac{k-1}{2}}(2\pi)^{-k/2} = \frac{e}{\sqrt{2}}\frac{\pi^{\frac{1-k}{3}}}{\pi^{\frac{k+2}{6}}} \\ &\leq \frac{e}{\sqrt{2}\pi^{2/3}}\pi^{\frac{1-k}{3}} \leq e^{\frac{1-k}{3}} \end{aligned}$$

ce qui prouve (i).

Minoration. Par (1.7), (2.2) et (2.1), il vient

$$h(n)\exp(-F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)) \geq \frac{\sqrt{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_k)}}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}} \geq \frac{1}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}}$$

ce qui prouve (ii). □

3 Étude de λ et λ_k

Soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \ldots, p_k$ le k-ième nombre premier. Pour $k \geq 1$, on pose :

$$P_k(s) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j^s}. \tag{3.1}$$

Pour chaque k fixé, la fonction $P_k(s)$ décroît de k à 0 lorsque s varie de 0 à $+\infty$; elle admet donc une fonction réciproque $P_k^{-1}(y)$ définie pour $0 < y \leq k$. On pose

$$\lambda_k = P_k^{-1}(1), \quad \text{autrement dit} \quad P_k(\lambda_k) = 1. \tag{3.2}$$

La série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s}$ converge normalement pour $s \geq s_0 > 1$ et donc la suite des sommes partielles $(P_k(s))_{k\geq 1}$ converge uniformément vers $P(s)$ pour $s \geq s_0 > 1$; par les méthodes habituelles de l'analyse, il est facile de montrer

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots < \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda. \tag{3.3}$$

On a

$k =$	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$\lambda_k =$	0	0.788	1.033	1.147	1.201	1.304	1.384	1.396	1.398

La valeur numérique de λ donnée en (1.10) peut être calculée avec précision à l'aide de la formule ([28, p. 70])

$$P(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta(ms) \tag{3.4}$$

par les méthodes indiquées dans [3].

Proposition 2 *Soit $k \geq 1$, λ_k défini par (3.2) et λ par (1.10). Lorsque $k \to \infty$, on a*

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{1}{-(\lambda-1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}} = \frac{1.44617\ldots}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}}. \tag{3.5}$$

Démonstration Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Le théorème des nombres premiers (cf. [8, Th. 4.7]) donne

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + R(x) \tag{3.6}$$

où le logarithme intégral Li est défini en [1, p. 228] et

$$R(x) = \mathcal{O}_\nu\left(\frac{x}{(\log x)^\nu}\right) \tag{3.7}$$

où ν est un nombre réel fixé supérieur à 1. Cela entraîne pour le k-ième nombre premier p_k

$$p_k \sim k \log k \quad \text{et} \quad \log p_k \sim \log k \quad \text{lorsque } k \to \infty. \tag{3.8}$$

Introduisons l'exponentielle intégrale (cf. [1, p. 228])

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \quad x > 0, \tag{3.9}$$

dont le développement asymptotique est

$$E_1(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} + \cdots\right), \quad x \to +\infty. \tag{3.10}$$

Considérons d'abord la quantité $P(s) - P_k(s)$; en utilisant l'intégrale de Stieltjes, (3.6), (3.9), (3.10) et (3.7), il vient pour $s \geq s_0 > 1$

$$\begin{aligned}
P(s) - P_k(s) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s} = \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[\pi(t)]}{t^s} \\
&= \int_{p_k}^{\infty} \frac{dt}{t^s \log t} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[R(t)]}{t^s} \\
&= E_1((s-1)\log p_k) - \frac{R(p_k^+)}{(p_k^+)^s} + \int_{p_k}^{\infty} \frac{sR(t)}{t^{s+1}} dt \\
&= E_1((s-1)\log p_k) + \frac{\mathcal{O}_{\nu,s_0}(1)}{p_k^{s-1}(\log k)^{\nu}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

De même, on a pour $s \geq s_0 > 1$

$$\begin{aligned}
P_k'(s) - P'(s) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log p_j}{p_j^s} = \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[\pi(t)] \log t}{t^s} \\
&= \int_{p_k}^{\infty} \frac{dt}{t^s} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d[R(t)] \log t}{t^s} \\
&= \frac{1}{(s-1)p_k^{s-1}} + \frac{\mathcal{O}_{\nu,s_0}(1)}{p_k^{s-1}(\log k)^{\nu-1}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Par la formule de Taylor, on a

$$P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda) P_k'(\lambda) + \frac{(\lambda_k - \lambda)^2}{2} M' \tag{3.13}$$

avec $M' = P_k''(\xi)$ et $\lambda_k < \xi < \lambda$. On a donc, pour $k \geq 3$

$$0.182\ldots = \frac{(\log 2)^2}{2^{\lambda}} = P_1''(\lambda) < M' < P''(\lambda_3) = 926.56\ldots. \tag{3.14}$$

De (1.10) et (3.2), on déduit $P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) = P(\lambda) - P_k(\lambda)$ et (3.11) et (3.12) (en prenant $s = \lambda$) donnent avec (3.13)

$$\begin{aligned}
&(\lambda_k - \lambda)\left[P'(\lambda) + \frac{1}{(\lambda-1)p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_{\nu}(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{\nu-1}} + \frac{\lambda_k - \lambda}{2} M'\right] \\
&\quad = E_1((\lambda-1)\log p_k) + \frac{\mathcal{O}_{\nu}(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{\nu}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Lorsque $k \to \infty$, par (3.3), $\lambda_k - \lambda \to 0$ et (3.15), (3.10) et (3.8) entraînent

$$-(\lambda - \lambda_k)P'(\lambda) \sim E_1((\lambda-1)\log p_k) \sim \frac{1}{(\lambda-1)k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}},$$

ce qui prouve (3.5). □

Remarque 1 Compte tenu de (3.5), (3.15) donne le résultat plus précis

$$\lambda-\lambda_k=\frac{E_1((\lambda-1)\log p_k)}{-P'(\lambda)}+\frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda+\nu-1}} \tag{3.16}$$

pour tout $\nu>1$. En utilisant le développement asymptotique de Cipolla (cf. [7])

$$p_k\sim \mathrm{Li}^{-1}(k)=k\left(L_1+L_2-1+\frac{L_2-2}{L_1}+\mathcal{O}\left(\frac{L_2^2}{L_1^2}\right)\right) \tag{3.17}$$

avec $L_1=\log k$ et $L_2=\log\log k$, on déduit de (3.10) et (3.16)

$$\lambda-\lambda_k=\frac{-1}{(\lambda-1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(L_1)^{\lambda}}\left(1-\frac{\lambda L_2+\frac{\lambda(2-\lambda)}{\lambda-1}}{L_1}+\mathcal{O}\left(\frac{L_2^2}{L_1^2}\right)\right). \tag{3.18}$$

En utilisant les inégalités (cf. [30, p. 69], [29] et [7]) :

$$k(\log k+\log\log k-1)\le p_k\le k(\log k+\log\log k),\qquad k\ge 6, \tag{3.19}$$

on peut obtenir un encadrement effectif de $\lambda-\lambda_k$ (cf. [15]).

Proposition 3 *Soit $k\ge 1$, λ, λ_k, P et P_k définis par* (1.10), (3.2), (1.8) *et* (3.1). *On définit a et a_k par*

$$a=\frac{-1}{P'(\lambda)}=0.5776486\ldots\quad et\quad a_k=\frac{-1}{P_k'(\lambda_k)}. \tag{3.20}$$

On a

$$a_1>a_2>\cdots>a_k>\cdots>a,\qquad \lim_{k\to\infty}a_k=a \tag{3.21}$$

et lorsque $k\to\infty$

$$a_k-a\sim\frac{1}{(\lambda-1)(P'(\lambda))^2(k\log k)^{\lambda-1}}=\frac{0.835378\ldots}{(k\log k)^{\lambda-1}}. \tag{3.22}$$

Démonstration On a

$k=$	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$a_k=$	1.443	1.158	1.003	0.920	0.869	0.759	0.629	0.595	0.584

En remarquant par (3.1) et (3.2) que l'on a

$$\lambda_{k+1}=P_k^{-1}\left(1-\frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right), \tag{3.23}$$

il vient par le théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned}P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} + P'_k(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k)\\ &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} + P'_k \circ P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) - P'_k \circ P_k^{-1}(1)\\ &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\frac{P''_k(P_k^{-1}(\eta_k))}{P'_k(P_k^{-1}(\eta_k))}\end{aligned}$$

avec $1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} < \eta_k < 1$. En posant $\rho_k = P_k^{-1}(\eta_k)$, on a par (3.2) et (3.23) $\lambda_k < \rho_k < \lambda_{k+1}$ et

$$\begin{aligned}P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}(-P'_k(\rho_k))}(\log p_{k+1} P'_k(\rho_k) + P''_k(\rho_k))\\ &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}(-P'_k(\rho_k))}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\log^2 p_j}{p_j^{\rho_k}} - \frac{\log p_j \log p_{k+1}}{p_j^{\rho_k}}\right) < 0\end{aligned}$$

et par (3.20) cela démontre $a_{k+1} < a_k$. Comme $P'_k(s)$ tend uniformément vers $P'(s)$ pour $1 < s_0 \le s$, on a $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, ce qui achève la preuve de (3.21).

Pour démontrer (3.22), on utilise la formule de Taylor, comme en (3.13)

$$P'_k(\lambda_k) - P'_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)P''_k(\lambda) + \frac{(\lambda_k - \lambda)^2}{2}M'' \tag{3.24}$$

avec, pour $k \ge 3$, $|M''| < |P'''(\lambda_3)|$. Ensuite, on a, comme en (3.12)

$$P''(\lambda) - P''_k(\lambda) = \sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{\log^2 p_j}{p_j^{\lambda}} = \frac{(\lambda-1)\log p_k + 1}{(\lambda-1)^2 p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{\nu-2}}. \tag{3.25}$$

Il vient alors, par (3.24), (3.25), (3.12) et (3.5)

$$\begin{aligned}P'_k(\lambda_k) - P'(\lambda) &= P'_k(\lambda_k) - P'_k(\lambda) + P'_k(\lambda) - P'(\lambda)\\ &= (\lambda_k - \lambda)\Bigg[P''(\lambda) - \frac{(\lambda-1)\log p_k + 1}{(\lambda-1)^2 p_k^{\lambda-1}}\\ &\qquad + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{\nu-2}} + \frac{\lambda_k - \lambda}{2}M''\Bigg]\\ &\qquad + \frac{1}{(\lambda-1)p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{\nu-1}}\\ &= (\lambda_k - \lambda)P''(\lambda) + \frac{1}{(\lambda-1)p_k^{\lambda-1}} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{\nu-1}}.\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor appliquée à la fonction $t \mapsto -1/t$, on a

$$\begin{aligned} a_k - a &= \frac{-1}{P_k'(\lambda_k)} - \frac{-1}{P'(\lambda)} = \frac{P_k'(\lambda_k) - P'(\lambda)}{P'(\lambda)^2} + \mathcal{O}(P_k'(\lambda_k) - P'(\lambda))^2 \\ &= \frac{(\lambda_k - \lambda)P''(\lambda)}{P'(\lambda)^2} + \frac{1}{(\lambda-1)p_k^{\lambda-1}P'(\lambda)^2} + \frac{\mathcal{O}_\nu(1)}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda+\nu-2}} \end{aligned} \tag{3.26}$$

et comme, par (3.5), le premier terme de (3.26) est négligeable devant le second, on obtient (3.22) à l'aide de (3.8). □

4 Un problème d'optimisation

Lemme 1 *La fonction F définie par (2.1) est concave dans $\mathbb{R}_+^k$.*

Démonstration En posant $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $S = (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$, il résulte de (2.1), pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = \log\frac{S}{x_i}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\underline{x}) = \frac{1}{S} - \frac{1}{x_i}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) = \frac{1}{S} \tag{4.1}$$

de telle sorte que la forme quadratique des dérivées secondes de F s'écrit

$$F''(\underline{x}) \cdot (h_1, h_2, \ldots, h_k) = \frac{1}{S}\left(\sum_{i=1}^k h_i\right)^2 - \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{x_i}. \tag{4.2}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^k h_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{x_i}\frac{h_i}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \le S\sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{x_i},$$

et il en résulte, par (4.2), que F est concave dans $\mathbb{R}_+^k$. □

Soit $k \ge 2$, p_k le k-ième nombre premier et A un nombre réel positif. On considère le domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}_+^k$ défini par $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0, \ldots, x_k \ge 0$ et

$$x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \cdots + x_k \log p_k \le A. \tag{4.3}$$

Soit F définie par (2.1). Comme la fonction F est croissante par rapport à chaque variable, le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \underline{x} \in \mathcal{D}(A), \\ \max F(\underline{x}) \end{cases} \tag{4.4}$$

a la même solution que le problème

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \cdots + x_k \log p_k = A, \\ \max F(x_1, x_2, \ldots, x_k). \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4 *La solution du problème* (4.5) (*ou du problème équivalent* (4.4)) *est donnée par*

$$x_i^* = \frac{a_k A}{p_i^{\lambda_k}} \tag{4.6}$$

où λ_k *et* a_k *sont définis par* (3.2) *et* (3.20), *et satisfait*

$$F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \lambda_k A. \tag{4.7}$$

Démonstration Utilisons les multiplicateurs de Lagrange ; une solution de (4.5), $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ satisfait pour $1 \le i \le k$

$$\frac{1}{\log p_i} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) = \frac{\log(x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^*) - \log x_i^*}{\log p_i} = \lambda_k, \tag{4.8}$$

d'où l'on tire

$$x_i^* = \frac{x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^*}{p_i^{\lambda_k}}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{4.9}$$

En ajoutant $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ donnés par (4.9), ou trouve pour λ_k la valeur donnée en (3.2). La solution $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ satisfait la contrainte, autrement dit

$$x_1^* \log 2 + x_2^* \log 3 + \dots + x_k^* \log p_k = A. \tag{4.10}$$

On a ensuite avec (3.1)

$$A = \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = -(x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^*) P_k'(\lambda_k)$$

d'où par (3.20)

$$x_1^* + x_2^* + \dots + x_k^* = -\frac{A}{P_k'(\lambda_k)} = a_k A \tag{4.11}$$

et par (4.9), on obtient (4.6) ; en multipliant (4.8) par $x_i^* \log p_i$ et en ajoutant, on obtient (4.7) à l'aide de (4.10). □

Proposition 5 *Soit* $k \ge 2$, $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{D}(A)$ (*défini par* (4.3)), $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$ *définis par* (4.6) *et* F *définie par* (2.1). *Alors on a*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_k) &\le F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) - \frac{1}{2A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log p_i |x_i - x_i^*| \right)^2 \\ &\le F(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\log p_i)^2}{2A \log p_k} (x_i - x_i^*)^2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Démonstration Définissons $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ par

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2, \ldots, y_{k-1} = x_{k-1}, \quad \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i = A. \tag{4.13}$$

Comme $\underline{x} \in \mathcal{D}(A)$, par (4.3), on a $x_k \leq y_k$ et la croissance de F par rapport à chacune des variables entraîne

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq F(y_1, y_2, \ldots, y_k). \tag{4.14}$$

Posons $h_i = y_i - x_i^*$; on a par (4.13) et (4.10)

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \log p_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i - \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = A - A = 0. \tag{4.15}$$

Appliquons la formule de Taylor à la fonction F entre les points $\underline{y}$ et $\underline{x^*}$:

$$F(\underline{y}) - F(\underline{x^*}) = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x^*}) + \frac{1}{2} F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}) \tag{4.16}$$

où $\underline{\xi} = \theta \underline{y} + (1-\theta)\underline{x^*}$ et $0 < \theta < 1$. Par (4.8) et (4.15), il suit

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x^*}) = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} h_i \log p_i = 0. \tag{4.17}$$

Il vient ensuite, par (4.15) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{k} h_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} h_i \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right)^2 \leq (\xi_1 + \cdots + \xi_k) \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)^2.$$

Mais, pour $t = \frac{\log p_i}{\log p_k}$, on a $0 < t \leq 1$ et $(1-t)^2 \leq 1 - t$; par (4.2), il suit

$$F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(\left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)^2 - 1\right) \leq -\sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i}{\log p_k} \frac{h_i^2}{\xi_i}.$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |h_i| \log p_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\xi_i \log p_i}\, \frac{|h_i|\sqrt{\log p_i}}{\sqrt{\xi_i}}\right)^2 \leq A \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i^2 \log p_i}{\xi_i}$$

(car, par (4.13) et (4.10), $\sum_{i=1}^{k} \xi_i \log p_i = A$) on obtient

$$F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}) \leq -\frac{1}{A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k} |h_i| \log p_i\right)^2 \leq -\frac{1}{A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |h_i| \log p_i\right)^2$$

ce qui, avec (4.14), (4.16), (4.17) et (4.13), complète la preuve de la proposition 5. □

5 Grandes valeurs de la fonction h

Théorème 1 *Soit n un entier, $n \geq 3$, et $k = \omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n. Alors on a*

$$\text{(i)} \quad \log h(n) \leq \lambda_k \log n - \frac{k-1}{3} \leq \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}$$

où λ_k et λ sont définis en (3.2) et (1.10). D'autre part, pour $n \geq 3$, il existe $m \leq n$ tel que

$$\text{(ii)} \quad \log h(m) \geq \lambda \log n - C_2 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}.$$

Les constantes positives C_1 et C_2 sont absolues.

Démonstration de (i) Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$. On pose $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \leq n$. Par (1.7), on a $h(N) = h(n)$, et $\alpha_1 \log 2 + \alpha_2 \log 3 + \cdots + \alpha_k \log p_k = \log N$. Par la proposition 4 avec $A = \log N$, il vient

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \leq \lambda_k \log N$$

tandis que, par la proposition 1(i), on obtient

$$\log h(n) = \log h(N) \leq \lambda_k \log N - \frac{k-1}{3} \leq \lambda_k \log n - \frac{k-1}{3}.$$

Il reste à prouver

$$(\lambda - \lambda_k) \log n + \frac{k-1}{3} \geq C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}. \tag{5.1}$$

Supposons $C_1 \leq 0.135$. On s'assure que (5.1) est vérifiée pour $3 \leq n \leq 15$. On supposera donc que $n \geq 16 > e^e$, ce qui implique $\log\log n > 1$. On observe que (5.1) est vérifiée pour $k = 1$ (car $\lambda_1 = 0$) et pour tout $n \geq 16$. On suppose donc que $k \geq 2$. Par la proposition 2, il existe une constante positive γ_1 telle que l'on ait $\lambda - \lambda_k \geq \frac{\gamma_1}{k^{\lambda-1}(\log k)^\lambda}$ (vraisemblablement, $\gamma_1 = (\lambda - \lambda_2) 2^{\lambda-1} (\log 2)^\lambda = 0.48\ldots$). Si $k \leq \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n} < \log n$, on a

$$\lambda - \lambda_k \geq \frac{\gamma_1}{\left(\frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}\right)^{\lambda-1} (\log\log n)^\lambda} = \frac{\gamma_1 (\log n)^{1/\lambda - 1}}{\log\log n}, \tag{5.2}$$

tandis que, pour $k > \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}$, on a $\frac{k-1}{3} \geq \frac{k}{6} > \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{6\log\log n}$ ce qui, avec (5.2) prouve (5.1) et (i) en choisissant $C_1 = \min(\gamma_1, 0.135)$.

Remarque 2 On peut prouver la relation $\log h(n) \leq \lambda_k \log n$ par une autre méthode en démontrant, pour k fixé, $h(n) \leq n^{\lambda_k}$ pour tous les nombres n ayant au plus k facteurs premiers, et ceci par récurrence sur n. Comme $h(1) = 1$, la propriété est vraie pour

$n = 1$. Supposons la vraie jusqu'à $n-1$, avec $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_j^{\alpha_j}$ et $j \le k$. Par (1.11), l'hypothèse de récurrence et (3.2), il vient

$$h(n) = \sum_{i=1}^{j} h\left(\frac{n}{q_i}\right) \le \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{n}{q_i}\right)^{\lambda_k} \le n^{\lambda_k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\lambda_k}} = n^{\lambda_k}.$$

Lemme 2 *Soit k un entier positif ; on range les 2^k diviseurs de $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ par ordre croissant :* $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{2^k} = n$. *Alors, pour tout i, $1 \le i \le 2^k - 1$, on a $d_{i+1} \le 2d_i$.*

Démonstration Considérons $d_i \ne n$; si d_i est impair, $2d_i$ est un diviseur de n, donc $d_{i+1} \le 2d_i$; sinon, soit $p_j \ge 3$ le plus petit nombre premier ne divisant pas d_i ; $d_i p_j / p_{j-1}$ est un diviseur de n plus grand que d_i, par conséquent, $d_{i+1} \le d_i p_j / p_{j-1}$. Mais, par le postulat de Bertrand (cf. [13, Th. 418]), $p_j < 2p_{j-1}$, ce qui achève la preuve du lemme 2. □

Démonstration du théorème 1, (ii) : choix de k On applique la proposition 4 avec $A = \log n$ et

$$k = \left\lfloor \kappa \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n} \right\rfloor \tag{5.3}$$

où κ est une constante positive satisfaisant

$$\kappa < \lambda a^{1/\lambda} = 0.945\ldots \tag{5.4}$$

et a est défini en (3.20). On a alors par (4.6) et (4.10)

$$x_i^* = \frac{a_k \log n}{p_i^{\lambda_k}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{5.5}$$

et

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = \log n. \tag{5.6}$$

Par (5.5), (3.3), (3.21), (3.8), (5.3) et (5.4), on a, lorsque $n \to \infty$

$$x_1^* > x_2^* > \cdots > x_k^* = \frac{a_k \log n}{p_k^{\lambda_k}} \ge \frac{a \log n}{p_k^{\lambda}} \sim \frac{a \log n}{(k \log k)^{\lambda}} \sim \frac{\lambda^{\lambda} a}{\kappa^{\lambda}} > 1. \tag{5.7}$$

Par (4.7), il vient

$$F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*) = \lambda_k \log n = \lambda \log n - (\lambda - \lambda_k) \log n \tag{5.8}$$

tandis que, par la proposition 2 et (5.3), lorsque $n \to \infty$, on a

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{1}{-(\lambda-1) P'(\lambda) k^{\lambda-1} (\log k)^{\lambda}} \sim \frac{\lambda^{\lambda} (\log n)^{1/\lambda - 1}}{-(\lambda-1) P'(\lambda) \kappa^{\lambda-1} \log\log n}. \tag{5.9}$$

Par (4.11) et (3.21), on a, lorsque $n \to \infty$,

$$x_1^* + x_2^* + \cdots + x_k^* = a_k \log n \sim a \log n. \tag{5.10}$$

Nous aurons aussi besoin d'une estimation de $\sum_{i=1}^k \log x_i^*$. En notant $\Theta(t) = \sum_{p \le t} \log p$ la fonction de Chebichev, on a par (5.5),

$$\sum_{i=1}^k \log x_i^* = \sum_{i=1}^k \log(a_k \log n) - \lambda_k \log p_i = k \log(a_k \log n) - \lambda_k \Theta(p_k). \tag{5.11}$$

Mais, par le théorème des nombres premiers (cf. [8, Th. 4.7]) et (3.17), on a

$$\Theta(p_k) = p_k + \frac{\mathcal{O}(p_k)}{(\log p_k)^2} = k(\log k + \log\log k - 1 + o(1)), \quad k \to \infty$$

et (5.11) devient avec (5.3)

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log x_i^* = \log a_k + \log\log n - \lambda_k \left(\frac{1}{\lambda} \log\log n + \log \frac{\kappa}{e\lambda} + o(1) \right). \tag{5.12}$$

Par (3.21), $\log a_k = \log a + o(1)$ et par (5.9) et (5.4), (5.12) donne, pour n assez grand

$$\sum_{i=1}^k \log x_i^* \sim k \log \frac{(e\lambda)^\lambda a}{\kappa^\lambda} > \lambda k. \tag{5.13}$$

Construction de m k étant défini par (5.3) et x_i^* par (5.5), on pose $m_0 = \prod_{i=1}^k p_i^{\lfloor x_i^* \rfloor}$. Par (5.6), on a $\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} = \prod_{i=1}^k p_i^{x_i^*-1} < m_0 \le \prod_{i=1}^k p_i^{x_i^*} = n$. Soit d le plus grand diviseur de $p_1 p_2 \cdots p_k$ satisfaisant $d \le n/m_0$. Par le lemme 2, on a $d > n/2m_0$. On écrit $d = \prod_{i=1}^k p_i^{\varepsilon_i}$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, et l'on pose $m = m_0 d$. On a donc

$$n/2 < m = m_0 d \le n, \tag{5.14}$$

$$m = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \tag{5.15}$$

avec

$$\alpha_i = \lfloor x_i^* \rfloor + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1, \tag{5.16}$$

et, par (5.14), (5.6) et (5.15), il vient

$$-\log 2 < \log \frac{m}{n} = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - x_i^*) \log p_i \le 0. \tag{5.17}$$

De plus, par (5.16) et (5.7), on a

$$1 \le \lfloor x_i^* \rfloor \le \alpha_i \le 1 + \lfloor x_i^* \rfloor \le 1 + x_i^* \le 2x_i^*, \quad 1 \le i \le k \tag{5.18}$$

et

$$|\alpha_i - x_i^*| \le 1, \quad 1 \le i \le k. \tag{5.19}$$

Fin de la démonstration du théorème 1(ii) Appliquons la formule de Taylor ; il vient, par (4.2)

$$F(\underline{\alpha}) = F(\underline{x^*}) + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x^*}) + \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - x_i^*\right)^2}{2(\xi_1 + \cdots + \xi_k)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_i - x_i^*)^2}{2\xi_i} \tag{5.20}$$

avec, pour $1 \le i \le k$, $\xi_i = \theta\alpha_i + (1-\theta)x_i^*$ et $0 < \theta < 1$. On a donc, par (5.18)

$$\xi_i \ge \theta \lfloor x_i^* \rfloor + (1-\theta)\lfloor x_i^* \rfloor = \lfloor x_i^* \rfloor \ge 1. \tag{5.21}$$

Par (4.8), (5.17) et (3.3), le deuxième terme du membre de droite de (5.20) satisfait

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x^*}) = \lambda_k \log \frac{m}{n} \ge -\lambda_k \log 2 \ge -\lambda \log 2,$$

le troisième terme est positif et, par (5.19) et (5.21), le quatrième vérifie $\sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_i - x_i^*)^2}{2\xi_i} \le \frac{k}{2}$. Ainsi, (5.20) entraîne

$$F(\underline{\alpha}) \ge F(\underline{x^*}) - \lambda \log 2 - \frac{k}{2}. \tag{5.22}$$

Maintenant, par la proposition 1(ii) et (5.15), il vient

$$\log h(m) \ge F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) - k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i$$

qui, par (5.22) et (5.18), donne

$$\log h(m) \ge F(x_1^*, \ldots, x_k^*) - \lambda \log 2 - \frac{3k}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \log(2x_i^*).$$

Par (5.8), (5.9) et (5.13), il en découle $\log h(m) \ge \lambda \log n - \mathcal{O}(k)$, ce qui, par (5.3) achève la preuve du théorème 1. $\square$

6 Propriétés des nombres h-champions

Comme la fonction h ne dépend, par (1.7), que des exposants dans la décomposition en facteurs premiers de n, il est clair qu'un nombre h-champion défini par (1.18) s'écrit

$$N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \quad \text{avec } \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_k \ge 1 \text{ et } k = \omega(N). \tag{6.1}$$

Par ailleurs, il résulte du théorème 1(ii) que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, h(n) = +\infty$$

et donc, il existe une infinité de nombres h-champions. Si N_i désigne le i-ème nombre h-champion ($N_1 = 1$, $N_2 = 6$, $N_3 = 12$, etc., cf. [5]) on a, pour $i \geq 1$,

$$N_i \leq n < N_{i+1} \Longrightarrow h(n) \leq h(N_i). \tag{6.2}$$

Par (1.7), $\omega(n) = 1$ implique $h(n) = 1$; mais $h(6) = 2$, et donc, pour $i \geq 2$, on a $\omega(N_i) \geq 2$, ce qui entraîne, par (1.7), $h(2N_i) > h(N_i)$. Il en résulte que

$$N_{i+1} \leq 2N_i, \quad i \geq 2. \tag{6.3}$$

6.1 Encadrement de $\omega(N)$

Proposition 6 *Soit $N \neq 1$ un nombre h-champion. Alors on a*

$$\text{(i)} \quad \log h(N) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

où λ est défini en (1.10) et C_2 est la constante définie dans le théorème 1. De plus, il existe trois constantes positives C_3, C_4 et N_0 telles que, pour $N \geq N_0$, on ait

$$\text{(ii)} \quad C_3 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \leq \omega(N) \leq C_4 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}.$$

Démonstration de (i) Appliquons le théorème 1(ii). Il existe $m \leq N$ avec $\log h(m) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$. Mais, par (1.18), on a $h(N) \geq h(m)$, ce qui prouve (i).

Démonstration de (ii) Posons $k = \omega(N)$. Par le théorème 1(i), on a

$$\log h(N) \leq \lambda \log N - (\lambda - \lambda_k) \log N - \frac{k-1}{3}. \tag{6.4}$$

En comparant avec (i), il vient

$$(\lambda - \lambda_k) \log N \leq C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

qui, avec la proposition 2, donne

$$k^{\lambda-1} (\log k)^{\lambda} \gtrsim \frac{(\log N)^{1-1/\lambda} \log\log N}{-C_2(\lambda-1)P'(\lambda)}. \tag{6.5}$$

Mais la fonction $y = f(t) = t^{\lambda-1}(\log t)^{\lambda}$ est croissante pour $t \geq 1$, sa fonction réciproque $f^{-1}(y)$ satisfait, lorsque $y \to \infty$

$$f^{-1}(y) \sim (\lambda-1)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \left(\frac{y}{(\log y)^{\lambda}}\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}$$

et ainsi, en choisissant $C_3 < (\frac{\lambda^{\lambda}}{-C_2(\lambda-1)P'(\lambda)})^{\frac{1}{\lambda-1}}$, (6.5) démontre la minoration de (ii).

En comparant (6.4) et (i), il vient

$$\frac{k-1}{3} \le C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

ce qui implique la majoration de (ii). □

6.2 Factorisation de N : petits facteurs premiers

Théorème 2 *Soit N un nombre h-champion dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par* (6.1)*. On définit λ et a par* (1.10) *et* (3.20)*. Lorsque $N \to \infty$, on a*

$$\text{(i)} \quad \alpha_i = v_{p_i}(N) = \frac{a}{p_i^\lambda} \log N + \mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^c}{\log p_i}\right), \quad 1 \le i \le k-1,$$

$$\text{(ii)} \quad \Omega(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = a \log N + \mathcal{O}((\log N)^c)$$

où

$$c = (1 + 1/\lambda)/2 = 0.857\ldots. \tag{6.6}$$

Démonstration de (i) Par la proposition 6(i) et (3.3), on a, avec $k = \omega(N)$:

$$\log h(N) \ge \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \ge \lambda_k \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}. \tag{6.7}$$

Maintenant, par la proposition 5, avec $A = \log N$, $k = \omega(N)$ et x_i^* défini par (4.6), on a, par (4.7), $F(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*) = \lambda_k \log N$ et

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \le \lambda_k \log N - \frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log p_i |\alpha_i - x_i^*| \right)^2. \tag{6.8}$$

Par la proposition 1(i), (6.7) et (6.8), on obtient

$$\frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \log p_i |\alpha_i - x_i^*| \right)^2 \le C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}. \tag{6.9}$$

Par la propositions 6(ii), on a $\omega(N) \asymp \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$ ce qui entraîne par (3.8), lorsque $N \to \infty$,

$$\log p_k \sim \log(k \log k) \sim \log k \sim \frac{1}{\lambda} \log\log N. \tag{6.10}$$

De (6.9) et (6.10), on déduit

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i = \mathcal{O}((\log N)^c) \tag{6.11}$$

où c est donné en (6.6). Pour démontrer (i), on remarque que, par (4.6), (6.11) entraîne, pour $1 \le i \le k-1$,

$$\alpha_i - \frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} \log N = \mathcal{O}\left(\frac{(\log N)^c}{\log p_i}\right). \tag{6.12}$$

Ensuite, par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto p_i^{-t}$, les propositions 2, 3 et 6(ii) ainsi que (6.10), on a pour $1 \le i \le k$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{a}{p_i^{\lambda}}\right| &= \left|\left(\frac{1}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{1}{p_i^{\lambda}}\right)a_k + (a_k - a)\frac{1}{p_i^{\lambda}}\right| \\ &\le \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}}(\lambda - \lambda_k)a_k + \frac{(a_k - a)}{p_i^{\lambda}} \le (\lambda - \lambda_k)a_k \log p_k + (a_k - a) \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Finalement, (6.12) et (6.13) entraînent (i), car, par (6.10), $\log p_i \le \log p_k = \mathcal{O}(\log\log N)$ et $1/\lambda < c$.

Démonstration de (ii) On remarque d'abord que, par (4.11) et (4.10), on a $\sum_{i=1}^{k} x_i^* = a_k \log N$ et $\sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = \log N$, ce qui, par (6.1) et (6.11), entraîne

$$\begin{aligned}|\Omega(N) - a_k \log N| &= \left|\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - x_i^*)\right| = \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*)\left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i - x_i^*| \le \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i - x_i^*|\frac{\log p_i}{\log 2} = \mathcal{O}((\log N)^c).\end{aligned} \tag{6.14}$$

Ensuite, par les propositions 3 et 6(ii), on a, comme en (6.13)

$$a_k - a = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda-1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right)$$

qui, avec (6.14), achève la preuve du théorème 2. □

6.3 Factorisation de N : grands facteurs premiers

Théorème 3 *Soit N un nombre h-champion dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par (6.1). Alors, pour N assez grand, on a*

$$\alpha_k = 1. \tag{6.15}$$

De plus, si P_j désigne le plus grand nombre premier tel que P_j^j divise N (d'après (6.1), $P_1 = p_k$), alors, pour j fixé, $j \ge 1$, on a, lorsque $N \to \infty$,

$$P_j \sim \left(\frac{a \log N}{j}\right)^{1/\lambda} \sim j^{-1/\lambda} P_1 \tag{6.16}$$

où λ *et* a *sont définis par* (1.10) *et* (3.20) $(a^{1/\lambda} = 0.676\ldots$, $2^{-1/\lambda} = 0.609\ldots$, $3^{-1/\lambda} = 0.456\ldots$, *etc.*). *Il en résulte que*

$$k = \omega(N) \sim \lambda a^{1/\lambda} \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} = 0.945\ldots \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}. \tag{6.17}$$

Démonstration Par la proposition 6(ii), $k = \omega(N)$ tend vers l'infini avec N et, par (3.8), on a pour N assez grand

$$M \stackrel{\text{def}}{=} N \frac{p_{k+1} p_{k+2}}{2 p_k p_{k-1}} < N,$$

ce qui implique, par (1.7) et (1.18)

$$h(M) = \frac{\alpha_1 \alpha_{k-1} \alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k} h(N) < h(N). \tag{6.18}$$

Appliquons maintenant le théorème 2 : lorsque $N \to \infty$, on a $\frac{\Omega(N)}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}{\alpha_1} \sim 2^\lambda = 2.63\ldots$ et donc,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k < 3\alpha_1 \tag{6.19}$$

pour N assez grand. Il résulte de (6.1), (6.18) et (6.19) que

$$1 \le \alpha_k^2 \le \alpha_k \alpha_{k-1} < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{\alpha_1} < 3,$$

ce qui prouve (6.15).

Remarque 3 D'après la table numérique (cf. [5]), il semble que les seuls nombres h-champions pour lesquels $\alpha_k \ge 2$ soient

N	N	$h(N)$
3 175 200	$2^5 3^4 5^2 7^2$	540 540
6 350 400	$2^6 3^4 5^2 7^2$	1 261 260
12 700 800	$2^7 3^4 5^2 7^2$	2 702 700
19 051 200	$2^6 3^5 5^2 7^2$	3 783 780
38 102 400	$2^7 3^5 5^2 7^2$	8 648 640

Démontrons maintenant (6.16). Fixons j ; on désigne par $i = i(j)$ le rang du nombre premier P_j, autrement dit,

$$P_j = p_i = p_{i(j)} \tag{6.20}$$

et, par la définition de P_j, on déduit de (6.1)

$$\alpha_i \ge j \quad \text{et} \quad \alpha_{i+1} \le j - 1. \tag{6.21}$$

Il résulte du théorème 2(i) que $i = i(j)$ et donc aussi p_i tendent vers l'infini avec N et, par le théorème des nombres premiers, p_{i+1}/p_i tend vers 1. Le nombre $\frac{\log 3}{\log 2}$ étant irrationnel, si l'on ordonne les nombres de la forme $2^u 3^v$ (u, v entiers, $u, v \geq 0$) en une suite croissante $(x_n)_{n\geq 1}$, on a $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ (cf. [32]). En conséquence, à tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, on peut associer N_ε tel que, pour $N \geq N_\varepsilon$, il existe des entiers u, v, u', v' satisfaisant

$$(1-\varepsilon)p_i < 2^u 3^v < p_i < p_{i+1} < 2^{u'} 3^{v'} < p_{i+1}(1+\varepsilon) < p_i(1+2\varepsilon). \tag{6.22}$$

Comme $i \leq k$, de (6.22) et (6.10) on déduit

$$u, v, u', v' = \mathcal{O}(\log\log N). \tag{6.23}$$

On considère alors les deux nombres

$$M = \frac{N 2^u 3^v}{p_i} < N \quad \text{et} \quad M' = \frac{N p_{i+1}}{2^{u'} 3^{v'}} < N. \tag{6.24}$$

Par (1.18), (1.7) et (6.21), il vient en posant $\Omega = \Omega(N)$

$$\begin{aligned} 1 > \frac{h(M)}{h(N)} &= \frac{\alpha_i(\Omega+1)\cdots(\Omega+u+v-1)}{(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_1+u)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_2+v)} \\ &\geq \frac{j\Omega^{u+v-1}}{(\alpha_1+u)^u(\alpha_2+v)^v}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Par (6.23) et le théorème 2, on a

$$\begin{aligned} (\alpha_1+u)^u &= \alpha_1^u \exp\left(u \log\left(1+\frac{u}{\alpha_1}\right)\right) \leq \alpha_1^u \exp\left(\frac{u^2}{\alpha_1}\right) \\ &= \left(\frac{a\log N}{2^\lambda}\right)^u \left(1+\mathcal{O}\left(\frac{u}{(\log N)^{1-c}}\right)\right) \sim \left(\frac{a\log N}{2^\lambda}\right)^u \end{aligned}$$

et, similairement, $(\alpha_2+v)^v \sim (\frac{a\log N}{3^\lambda})^v$ et $\Omega^{u+v-1} \sim (a\log N)^{u+v-1}$. La relation (6.25) entraîne alors $1 \gtrsim \frac{j(2^u 3^v)^\lambda}{a\log N}$, c'est-à-dire $2^u 3^v \lesssim (\frac{a\log N}{j})^{1/\lambda}$, ce qui, avec (6.22) donne

$$P_j = p_i \lesssim \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{a\log N}{j}\right)^{1/\lambda}. \tag{6.26}$$

On procède de même pour M' défini en (6.24) : on a

$$\begin{aligned} 1 > \frac{h(M')}{h(N)} &= \frac{(\alpha_1-u'+1)\cdots(\alpha_1+1)\alpha_1(\alpha_2-v'+1)\cdots(\alpha_2+1)\alpha_2}{(1+\alpha_{i+1})\Omega(\Omega-1)\cdots(\Omega-u'-v'+2)} \\ &\geq \frac{(\alpha_1-u')^{u'}(\alpha_2-v')^{v'}}{j\Omega^{u'+v'-1}} \sim \frac{a\log N}{j(2^{u'}3^{v'})^\lambda} \end{aligned}$$

qui, avec (6.22) donne

$$P_j = p_i \gtrsim \frac{1}{1+2\varepsilon}\left(\frac{a\log N}{j}\right)^{1/\lambda}. \tag{6.27}$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, (6.26) et (6.27) prouvent (6.16). En utilisant (3.8), on a $k \sim \frac{p_k}{\log p_k} = \frac{P_1}{\log P_1}$ et ainsi, (6.17) découle de (6.16) avec $j = 1$. □

Remarque 4 Le résultat (6.16) du théorème 3 peut s'exprimer en d'autres termes : pour chaque j fixé, la proportion $\frac{\pi(P_j)-\pi(P_{j+1})}{\pi(P_1)}$ d'exposants exactement égaux à j dans la décomposition en facteurs premiers d'un nombre h-champion satisfait

$$\frac{\pi(P_j)-\pi(P_{j+1})}{\pi(P_1)} \sim \frac{1}{j^{1/\lambda}} - \frac{1}{(j+1)^{1/\lambda}} = \int_j^{j+1} \frac{dt}{\lambda t^{1+1/\lambda}}.$$

Pour les nombres *highly factorable*, qui sont les champions pour la fonction d'Oppenheim, la conjecture énoncée dans [2] et prouvée dans [20] donne pour cette proportion la valeur asymptotique $1/(j(j+1)) = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \int_j^{j+1} \frac{dt}{t^2}$.

Si l'on remplace dans (6.24) p_i et p_{i+1} par des produits de nombres premiers consécutifs, en utilisant le résultat de [32] et le théorème des nombres premiers dans des petits intervalles, il est possible d'améliorer (6.16) en $P_j = (\frac{a \log N}{j})^{1/\lambda}(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{(\log N)^{\beta}})$ avec $\beta > 0$.

6.4 Estimation de $Q(X)$

Soit $Q(X)$ le nombre de nombres h-champions inférieurs à X. Il résulte de (6.3) que $Q(X) \gg \log X$. D'autre part, les nombres h-champions sont de la forme (6.1), et, par [11] ou [27], on a

$$Q(X) \leq \exp\left((1+o(1))\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\log X}{\log\log X}}\right).$$

A l'aide des résultats précédents, nous pouvons montrer

Proposition 7 *Il existe un nombre réel positif* δ ($\delta = 0.059$ *convient*) *tel que, pour* X *assez grand*

$$\text{(i)} \quad Q(X) \geq (\log X)^{1+\delta}.$$

Pour X *assez grand, on a*

$$\text{(ii)} \quad \log Q(X) = \mathcal{O}((\log X)^{c/2})$$

où c *a été défini en* (6.6).

Démonstration Soit N un nombre h-champion assez grand. Nous allons montrer que le nombre h-champion N' suivant N satisfait

$$N' \leq N\left(1 + \frac{2\eta \log\log N}{(\log N)^{\eta}}\right) \tag{6.28}$$

où η est un nombre réel positif à préciser. En effet, par le théorème des nombres premiers, entre $(\log N)^{\eta}$ et $2(\log N)^{\eta}$, il y a un nombre de nombres premiers équivalent à $\frac{(\log N)^\eta}{\eta \log\log N}$ et donc, si N est assez grand, il existe deux nombres premiers consécutifs p_r et p_{r+1} satisfaisant

$$(\log N)^\eta \le p_r < p_r + 2 \le p_{r+1} < 2(\log N)^\eta \tag{6.29}$$

et

$$p_r < p_r + 2 \le p_{r+1} \le p_r + 2\eta \log\log N. \tag{6.30}$$

Par le théorème des accroissements finis et (6.29), on a

$$p_r^{-\lambda} - p_{r+1}^{-\lambda} \ge \lambda \frac{p_{r+1} - p_r}{p_{r+1}^{\lambda+1}} \ge \frac{2\lambda}{(2(\log N)^\eta)^{\lambda+1}} = \frac{\lambda 2^{-\lambda}}{(\log N)^{\eta(\lambda+1)}} \tag{6.31}$$

et, si l'on choisit

$$\eta < \frac{1-c}{\lambda+1} = \frac{\lambda - 1}{2\lambda(\lambda+1)} = 0.0594\ldots, \tag{6.32}$$

il résulte de (6.31) et du théorème 2(i) que, dans (6.1), on a

$$\alpha_r - \alpha_{r+1} \ge 2^{-\lambda} a\lambda (\log N)^{1-\eta(\lambda+1)} + \mathcal{O}(\log N)^c \ge 2 \tag{6.33}$$

pour N assez grand.

Considérons le nombre

$$M = \frac{p_{r+1}}{p_r} N > N.$$

Par (1.7) et (6.33), on a

$$h(M) = \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1} + 1} h(N) > h(N)$$

et, par (6.2), (6.30) et (6.29), le nombre h-champion N' suivant N vérifie

$$N < N' \le M \le N\left(\frac{p_r + 2\eta \log\log N}{p_r}\right) \le N\left(1 + \frac{2\eta \log\log N}{(\log N)^\eta}\right) \tag{6.34}$$

ce qui établit (6.28).

Soit N_i le i-ème nombre h-champion. Pour prouver (i), écrivons les nombres h-champions entre $\sqrt{X}/2$ et X :

$$N_u < \frac{\sqrt{X}}{2} \le N_{u+1} < N_{u+2} < \cdots < N_{u+v} < X \le N_{u+v+1}.$$

En choisissant $\delta < \eta$, par (6.34), on aura pour X assez grand

$$\frac{N_{u+i+1}}{N_{u+i}} \le 1 + \frac{2\eta \log\log(\sqrt{X}/2)}{(\log(\sqrt{X}/2))^\eta} \le 1 + \frac{1}{2}(\log X)^{-\delta}, \quad 1 \le i \le v$$

et, par (6.3), $\frac{X}{\sqrt{X}} < \frac{N_{u+v+1}}{2N_u} \le \frac{N_{u+v+1}}{N_{u+1}} \le (1 + \frac{1}{2}(\log X)^{-\delta})^v$ qui donne $Q(X) \ge v \ge \frac{\frac{1}{2}\log X}{\log(1+\frac{1}{2}(\log X)^{-\delta})} \ge (\log X)^{1+\delta}$ et démontre (i).

Avant de démontrer (ii), établissons le lemme suivant

Lemme 3 *Le nombre de solutions $\nu(n,k)$ de l'inéquation diophantienne*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \le n, \quad x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k \ge 0, \textit{ et } x_i \in \mathbb{N} \tag{6.35}$$

satisfait pour tout k

$$\nu(n,k) = \mathcal{O}\left(\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)\right). \tag{6.36}$$

Démonstration Le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$, $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k \ge 0$, est le nombre de partitions de m en au plus k parts (cf. [4, p. 105]) et est majoré par $p(m)$, le nombre total de partitions de m. Comme $p(m)$ est une fonction croissante de m, le nombre $\nu(n,k)$ de solutions de (6.35) satisfait $\nu(n,k) - 1 \le p(1) + p(2) + \cdots + p(n) \le np(n)$ et (6.36) résulte de la formule classique de Hardy et Ramanujan (cf. [12]) $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})$. □

Démonstration de la proposition 7(ii) Soit X assez grand et N un nombre h-champion inférieur à X. On pose $A = \log N$; pour $1 \le i \le k$, on définit x_i^* par (4.6) et α_i par (6.1).

Soit J un nombre entier, $J \ge 3$; on a, par (3.3), $\lambda_J \ge \lambda_3 > 1$. On s'intéresse à la somme

$$T_J = T_J(N) = \sum_{i=J+1}^{k} \alpha_i. \tag{6.37}$$

Si $J \ge k$, on a $T_J = 0$ et si $J < k$, on a par (6.11), (6.10), (6.15) et (4.6)

$$\begin{aligned} T_J &\le \sum_{i=J+1}^{k-1} \alpha_i \log p_i + \alpha_k \log p_k \\ &\le \sum_{i=J+1}^{k-1} x_i^* \log p_i + \mathcal{O}((\log N)^c) \\ &= a_k \log N \sum_{i=J+1}^{k-1} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} + \mathcal{O}((\log N)^c). \end{aligned} \tag{6.38}$$

Maintenant, on a par (3.3), (3.1), (1.8), (3.12) et la proposition 2

$$\sum_{i=J+1}^{k-1} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} \le \sum_{i=J+1}^{\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_J}} = P_J'(\lambda_J) - P'(\lambda_J) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{J^{\lambda_J - 1}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{J^{\lambda - 1}}\right)$$

et (6.38) entraîne

$$T_J = \mathcal{O}\left(\frac{\log N}{J^{\lambda-1}}\right) + \mathcal{O}((\log N)^c). \tag{6.39}$$

Fixons

$$J = \lfloor (\log X)^\gamma \rfloor$$

avec, par (6.6) et (1.10),

$$\gamma = \frac{1-c}{\lambda - 1} = \frac{1}{2\lambda} = 0.357\ldots. \tag{6.40}$$

Pour chaque nombre h-champion $N \le X$, la somme $T_J(N)$ satisfait par (6.39)

$$T_J(N) = \alpha_{J+1} + \alpha_{J+2} + \cdots + \alpha_k = \mathcal{O}((\log X)^c)$$

et, par le lemme 3, le nombre de choix possibles pour $\alpha_{J+1}, \alpha_{J+2}, \ldots, \alpha_k$ est

$$\exp(\mathcal{O}((\log X)^{c/2})). \tag{6.41}$$

Ensuite, par (6.1) et le théorème 2(i), en notant que $\frac{a}{2^\lambda} < 0.219 < \frac{1}{2}$, on a

$$\alpha_J \le \alpha_{J-1} \le \cdots \le \alpha_2 \le \alpha_1 \le \frac{\log X}{2}$$

et le nombre de choix possibles pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_J$ est majoré par

$$\left(1 + \frac{\log X}{2}\right)^J \le (\log X)^{(\log X)^\gamma} = \exp((\log X)^\gamma \log\log X). \tag{6.42}$$

On déduit alors de (6.41) et (6.42) que $Q(X) \le \exp((\log X)^\gamma \log\log X + \mathcal{O}((\log X)^{c/2}))$ et comme, par (6.40), on a $\gamma < c/2$, cela prouve (ii). $\square$

6.5 Table des nombres h-champions

La méthode utilisée par M. Deléglise pour construire la table des nombres h-champions (cf. [5]) consiste à déterminer par backtracking tous les nombres entiers de la forme (6.1) et inférieurs à une borne donnée X. Ensuite, à l'aide de la fonction h, les non champions sont éliminés par (1.18). A l'aide de MAPLE, pour $X = \prod_{i=1}^{22} p_i = 3.2 \cdot 10^{30}$, ont été trouvés 814236 nombres de la forme (6.1) et, parmi eux, 785 nombres h-champions; le plus grand est $N_{785} = 2^{24} \cdot 3^{14} \cdot 5^6 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

7 Problèmes ouverts

1. Existe-t-il une constante C telle que, lorsque le nombre h-champion N tend vers l'infini, on ait

$$\log h(N) = \lambda \log N - (C + o(1)) \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}\ ? \tag{7.1}$$

Par la proposition 6(i) et le théorème 1(i), on a $C_1 \le C \le C_2$.

2. Est il possible de montrer que tous les nombres h-champion dont les exposants dans la décomposition en facteurs premiers sont supérieurs ou égaux à 2 sont les cinq nombres tabulés dans la remarque 3 ? La démonstration de (6.15) est effective, mais le calcul d'une borne pour sa validité serait pénible.

3. Dans son article [26], S. Ramanujan appelle *superior highly composite* un nombre N pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $M \geq 1$ on ait $\frac{\tau(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{\tau(N)}{N^\varepsilon}$, où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n. Nous n'avons pas réussi à généraliser cette notion à la fonction h. En fait, pour $\rho < \lambda$, il résulte de la proposition 6(i) que $\overline{\lim}(\log h(n) - \rho \log n) = +\infty$ tandis que pour $\rho \geq \lambda$, par le théorème 1(i), la fonction $\log h(n) - \rho \log n$ atteint son maximum en $n = 1$. On peut définir un nombre h-superchampion N s'il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $M \geq 1$ on ait

$$\log h(M) - \rho \log^2 M \leq \log h(N) - \rho \log^2 N. \tag{7.2}$$

Il est facile de voir qu'un tel nombre N est h-champion, mais ses propriétés sont moins simples que celles des nombres *superior highly composite* de Ramanujan.

4. Nous avons montré (proposition 7) que $Q(X) \geq (\log X)^{1+\delta}$ pour X assez grand. Existe-t-il une constante $\gamma > 0$ telle que $Q(X) \leq (\log X)^\gamma$? Pour $X \leq 10^{30}$, la quantité $\frac{\log Q(X)}{\log \log X}$ n'excède pas 1.573 tandis que, si l'on admet que le théorème 2(i) est vraie pour $c = 0$, la proposition 7(i) donnerait $Q(X) \geq (\log X)^{1.41}$.

5. Nous avons donné en 6.5 un algorithme de calcul des nombres h-champion. Peut on l'améliorer ? En particulier, peut on donner une forme effective au théorème 2 de façon à restreindre les nombres candidats à un sous-ensemble de l'ensemble des nombres satisfaisant (6.1)?

6. P. Erdős a posé le problème suivant : dans la formule (1.12), on restreint la somme aux $f(x)$ plus grandes valeurs de $h(n)$ pour $1 \leq n \leq x$. Quelle est la valeur minimale de $f(x)$ telle que la somme soit encore égale au second membre de (1.12) ?

Remerciements Une partie des travaux exposés dans cet article a été développée par le deuxième auteur lors d'un séjour à l'Université du Witwatersrand de Johannesburg en avril 1992. Nous avons donc plaisir à remercier A. et J. Knopfmacher, et R. Warlimont pour les discussions et échanges sur ce sujet ainsi que P. Erdős, très intéressé par les grandes valeurs de la fonction h. Nous avons plaisir également à remercier M. Deléglise pour son aide, notamment dans la construction de la table des nombres h-champion, L. Rifford pour ses remarques sur les problèmes d'optimisation et l'arbitre qui nous a signalé une erreur dans le développement asymptotique (3.18).

References

1. Abramowitz, M., Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York (1965)
2. Canfield, E.R., Erdős, P., Pomerance, C.: On a problem of Oppenheim concerning "Factorisatio Numerorum". J. Number Theory **17**, 1–28 (1983)
3. Cohen, H.: High precision computation of Hardy-Littlewood constants. Prepublication, http://www.math.u-bordeaux.fr/~cohen/
4. Comtet, L.: Analyse combinatoire, tome I. Presses Universitaires de France (1970)
5. Deléglise, M.: Table des nombres h-champions. http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis

6. Duras, J.-L., Nicolas, J.-L., Robin, G.: Grandes valeurs de la fonction $d_k(n)$. In: Urbanowicz, J., Győry, K., Iwaniec, H. (eds.) Number Theory in Progress, Proceedings de la conférence de Zakopane, Pologne, 1997, pp. 743–770. Walter de Gruyter (1997)
7. Dussart, P.: The kth prime is greater than $k(\log k + \log\log k - 1)$ for $k \geq 2$. Math. Comput. **68**, 411–415 (1999)
8. Ellison, W.J., Mendès-France, M.: Les nombres premiers. Publications de l'Institut de mathématique de l'université de Nancago, vol. IX. Hermann, Paris (1975)
9. Erdős, P.: On some asymptotic formulas in the theory of the "factorisatio numerorum". Ann. Math. **42**, 989–993 (1941); corrections to two of my papers, Ann. Math. **44**, 647–651 (1943)
10. Evans, R.: An asymptotic formula for extended Eulerian numbers. Duke Math. J. **41**, 161–175 (1974)
11. Hardy, G.H., Ramanujan, S.: Asymptotic formulæ for the distribution of integers of various types. Proc. Lond. Math. Soc. **16**(2), 112–132 (1917) and Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Press, 245–261
12. Hardy, G.H., Ramanujan, S.: Asymptotic formulæ in combinatory analysis. Proc. Lond. Math. Soc. **17**(2), 75–115 (1918) and Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Press, 276–309
13. Hardy, G.H., Wright, E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers, 4th edn. Clarendon Press, Oxford (1964)
14. Harris, V.C., Subbarao, M.V.: On product partitions of integers. Can. Math. Bull. **34**, 474–479 (1991)
15. Hernane, M.-O.: Thèse de doctorat d'Etat de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédienne (Alger) (2005)
16. Hille, E.: A problem in "Factorisatio Numerorum". Acta Arith. **2**, 134–144 (1937)
17. Ikehara, S.: On Kalmár's problem in "Factorisatio Numerorum". Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. **21**, 208–219 (1939); II **23**, 767–774 (1941)
18. Kalmár, L.: A "Factorisatio Numerorum" problémájáról. Math. Fiz. Lapok **38**, 1–15 (1931)
19. Kalmár, L.: Über die mittlere Anzahl der Produktdarstellungen der Zahlen(Erste Mitteilung). Acta Litt. Sci. Szeged **5**, 95–107 (1931)
20. Kim, J.K.: On highly factorable numbers. J. Number Theory **72**, 76–91 (1998)
21. Knopfmacher, A., Knopfmacher, J., Warlimont, R.: "Factorisatio Numerorum" in arithmetical semigroups. Acta Arith. **61**, 327–336 (1992)
22. Knopfmacher, A., Knopfmacher, J., Warlimont, R.: Ordered factorizations for integers and arithmetical semigroups. In: Advances in Number Theory (Kingston, Ontario, 1991), pp. 151–165. Oxford Sci. Publ. Oxford Univ. Press, New York (1993)
23. MacMahon, P.A.: Dirichlet's series and the theory of partitions. Proc. Lond. Math. Soc. **22**(2), 404–411 (1923). Percy Alexander MacMahon Collected Papers, vol. 1, pp. 966–973. MIT Press (1978)
24. Nicolas, J.-L.: On highly composite numbers. In: Andrews, G.E., Askey, R.A., Berndt, B.C., Ramanathan, K.G., Rankin, R.A. (eds.) Ramanujan Revisited, pp. 216–244. Academic, New York (1988)
25. Oppenheim, A.: On an arithmetic function. J. Lond. Math. Soc. **1**, 205–211 (1926); II **2**, 123–130 (1927)
26. Ramanujan, S.: Highly composite numbers. Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2 **14**, 347–409 (1915). Collected papers, pp. 78–128. Cambridge University Press (1927)
27. Richmond: Asymptotic results for partitions (I) and the distribution of certain integers. J. Number Theory **8**, 372–389 (1976)
28. Riesel, H.: Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Birkhäuser, Basel (1985)
29. Robin, G.: Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(N)$, nombre de diviseurs premiers de N. Acta Arith. **42**, 367–389 (1983)
30. Rosser, J.B., Schoenfeld, L.: Approximate formulas for some functions of prime numbers. Ill. J. Math. **6**, 64–94 (1962)
31. Szekeres, G., Turán, P.: Über das zweite Hauptproblem der "Factorisatio Numerorum". Acta Litt. Sci. Szeged **6**, 143–154 (1933)
32. Tijdeman, R.: On the maximal distance between integers composed of small primes. Compos. Math. **28**, 159–162 (1974)
33. Warlimont, R.: Factorisatio Numerorum with contraints. J. Number Theory **45**, 186–199 (1993)