
Volume 128, Number 6, June 2008 ISSN 0022-314X
ELSEVIER
JOURNAL OF
NUMBER
THEORY
Editor-in-Chief
David Goss
Editorial Board
Avner Ash
Pilar Bayer
Matthias Beck
Michael A. Bennett
Gebhard Böckle
Jean-Benoît Bost
James W. Cogdell
Jean-Louis Colliot-Thélène
Brian Conrad
J. Brian Conrey
Caterina Consani
S.J. Edixhoven
Ronald Graham
John S. Hsia
Tsit Yuen Lam
Wenzhi Luo
Ph. Michel
Yoichi Motohashi
Michael E. Pohst
Carl Pomerance
Dipendra Prasad
Stephen Rallis
Kenneth A. Ribet
Peter Schneider
Christopher Skinner
K. Soundararajan
Harold M. Stark
Dinesh S. Thakur
Robert C. Vaughan
Marie-France Vigneras
Fernando Rodriguez Villegas
D. Wan
D. Zagier
S.-W. Zhang

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
Journal of Number Theory 128 (2008) 1676–1716
JOURNAL OF Number Theory
www.elsevier.com/locate/jnt

Grandes valeurs et nombres champions de la fonction arithmétique de Kalmár

M. Deléglise [a], M.O. Hernane [b], J.-L. Nicolas [a,*]

[a] *Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS, UMR 5208, Institut Camille Jordan, Bât. Jean Braconnier, 21 Avenue Claude Bernard, F-69622 Villeurbanne cedex, France*
[b] *Université des Sciences et de la Technologie, Institut de Mathématiques, BP 32, USTHB, 16123 Bab-Ezzouar, Alger, Algérie*

Reçu le 9 février 2007 ; révisé le 17 juillet 2007

Disponible sur Internet le 19 septembre 2007

Communiqué par Carl Pomerance

Abstract

The Kalmár function $K(n)$ counts the factorizations $n = x_1 x_2 \dots x_r$ with $x_i \geqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Its Dirichlet series is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(n)}{n^s} = \frac{1}{2-\zeta(s)}$ where $\zeta(s)$ denotes the Riemann ζ function. Let $\rho = 1.728\dots$ be the root greater than 1 of the equation $\zeta(s) = 2$. Improving on preceding results of Kalmár, Hille, Erdős, Evans, and Klazar and Luca, we show that there exist two constants C_5 and C_6 such that, for all n, $\log K(n) \leqslant \rho \log n - C_5 (\log n)^{1/\rho} / \log\log n$ holds, while, for infinitely many n's, $\log K(n) \geqslant \rho \log n - C_6 (\log n)^{1/\rho} / \log\log n$.

An integer N is called a K-champion number if $M < N \Rightarrow K(M) < K(N)$. Several properties of K-champion numbers are given, mainly about the size of the exponents and the number of prime factors in the standard factorization into primes of a large enough K-champion number.

The proof of these results is based on the asymptotic formula of $K(n)$ given by Evans, and on the solution of a problem of optimization.

MSC: 11A25; 11N37; 49K10

Keywords: Kalmár's function; Factorisatio numerorum; Highly composite numbers; Champion numbers; Optimization

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : deleglise@math.univ-lyon1.fr (M. Deléglise), mhernane@usthb.dz (M.O. Hernane), jlnicola@in2p3.fr (J.-L. Nicolas).
URLs : http://math.univ-lyon1.fr/~deleglise (M. Deléglise), http://math.univ-lyon1.fr/~nicolas (J.-L. Nicolas).

0022-314X/$ – see front matter © 2007 Elsevier Inc. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.jnt.2007.07.003

1. Introduction

Soit $\tau_r(n)$ le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1 x_2 \dots x_r = n. \tag{1.1}$$

On a

$$\tau_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2, \end{cases} \qquad \tau_1(n) = 1, \qquad \tau_2(n) = \sum_{d|n} 1, \qquad \tau_r(n) = \sum_{d|n} \tau_{r-1}(d).$$

La série génératrice est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s} = \zeta(s)^r$$

où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est la fonction de Riemann.

La fonction de Kalmár ou « factorisatio numerorum » compte le nombre de solutions de (1.1) pour tout r, mais avec la restriction que chaque facteur x_i doit vérifier $x_i \geqslant 2$. Ainsi les factorisations $12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 4 = 3 \times 2 \times 2 = 2 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 = 2 \times 2 \times 3$ donnent $K(12) = 8$. On pose $K(1) = 1$. Pour $n \geqslant 2$, la fonction de Kalmár satisfait

$$K(n) = \sum_{d|n,\, d \geqslant 2} K\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} K\left(\frac{n}{d}\right). \tag{1.2}$$

La série de Dirichlet est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}. \tag{1.3}$$

Elle est reliée aux fonctions τ_r par la formule

$$K(n) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r}. \tag{1.4}$$

La fonction $K(n)$ a été introduite par L. Kalmár en 1931, dans [15] et [16], où il montre que, lorsque $x \to \infty$,

$$\sum_{n \leqslant x} K(n) \sim \frac{-1}{\rho \zeta'(\rho)} x^{\rho} \tag{1.5}$$

($\rho = 1.728\dots$ est la racine positive de $\zeta(\rho) = 2$) et donne une majoration du reste. Ceci a été précisé par Ikehara [14] et H.-K. Hwang [13].

La majoration très simple $K(n) \leqslant n^\rho$ $(n \geqslant 1)$, obtenue dans [3] et [4] a été récemmement améliorée par Klazar et Luca [18] qui ont démontré $K(n) \leqslant n^\rho/2$ $(n \geqslant 2)$, en utilisant l'inégalité $K(nn') \geqslant 2K(n)K(n')$ vraie pour tout (n, n') satisfaisant $2 \leqslant n \leqslant n'$. On trouvera d'autres informations sur la fonction de Kalmár dans [18], paragraphe 5.

Nous nous proposons dans cet article d'étudier les grandes valeurs de la fonction $K(n)$. Ce sujet a déja été abordé par Kalmár [15,16], Erdős [7], Hille [12], Evans [8] (Th. 6 et 7) et Klazar et Luca [18].

Soit f une fonction arithmétique réelle ; appelons f-champion un nombre N tel que $n < N \Rightarrow f(n) < f(N)$. Les nombre τ_2-champions ont été appelés « highly composite » par Ramanujan qui les a étudiés dans sa thèse [26].

La fonction $O(n)$ d'Oppenheim (cf. [1,10,23,25]) a la même définition que celle de Kalmár mais cette fois l'ordre des facteurs ne compte pas ; 12 n'a plus que les factorisations $12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$ et $O(12) = 4$. Ainsi $O(n)$ compte le nombre de *partitions multiplicatives* de n en parts $\geqslant 2$. Les nombres O-champions, appelés « highly factorable » ont été étudiés dans [1] et [17]. A la fin de l'article [1], le problème 5 demande quel est l'ordre maximum de la fonction $K(n)$, et à quoi ressemblent les champions de $K(n)$. Les théorèmes 4–6, apportent des éléments de solutions à ce problème.

Soit $\mathcal{A} \subset \{2, 3, 4, \dots\}$; dans [12] et [7] (cf. aussi [19] et [20]) Hille et Erdős ont généralisé la fonction de Kalmár en définissant la fonction $K_{\mathcal{A}}(n)$ qui compte le nombre de solutions de (1.1) pour tout r avec la restriction que chaque x_i doit appartenir à $\mathcal{A}$.

Dans l'article [11], sont étudiées les grandes valeurs de la fonction $K_{\mathcal{P}}(n)$, où $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ est l'ensemble des nombres premiers, et quelques propriétés des nombres $K_{\mathcal{P}}$-champions. Il est facile de voir que si la décomposition de n en facteurs premiers est $n = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$ alors

$$K_{\mathcal{P}}(n) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}. \tag{1.6}$$

La formule (1.6) ne s'étend pas à la fonction de Kalmár. La formule ci-dessous est due à Mac-Mahon [24], n° 80 (cf. aussi [21], formule (4))

$$K\big(q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}\big) = \sum_{j=1}^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} \prod_{h=1}^{k} \binom{\alpha_h + j - i - 1}{\alpha_h},$$

mais elle ne permet pas d'étudier les grandes valeurs de $K(n)$. Cependant, à partir de (1.4), Evans a donné dans [8] une très jolie formule asymptotique pour $K(q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k})$ lorsque $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ tend vers l'infini. C'est à partir de cette formule asymptotique que nous obtiendrons tous nos résultats.

Soit $\lambda > 1$. L'article de Evans [8] (cf. aussi [9]) considère une fonction $K_\lambda(n)$ plus générale dont la série génératrice est

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda - \zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_\lambda(n)}{n^s}.$$

Lorsque $\lambda = 2$, $K_2(n)$ est la fonction de Kalmár $K(n)$. Les nombres $K_\lambda(n)$ sont les *nombres eulériens généralisés*. Le nombre eulérien $A(n,k)$ qui compte le nombre de permutations de n objets avec k montées est relié aux nombres eulériens généralisés par la formule

$$\sum_{k=0}^{n} A(n,k)\lambda^k = K_\lambda(q_1 q_2 \dots q_n)$$

où $q_1, q_2, \dots, q_n$ sont des nombres premiers distincts (cf. [2]).

Les résultats de cet article pourraient s'étendre en remplaçant $K(n)$ par $K_\lambda(n)$; dans un souci de clarté nous nous sommes limités à $\lambda = 2$.

Dans le paragraphe 2, nous rappelons la formule asymptotique d'Evans, et nous donnons quelques propriétés qui nous seront utiles par la suite.

Dans le paragraphe 3, le théorème 2 donne un encadrement de $K(n)$ à l'aide de la fonction F introduite au §3.1. Le problème d'optimisation (3.11) a été résolu par Evans [8], lemme 6, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. Mais, afin de préciser les comportement de F au voisinage du maximum, nous déterminons la forme quadratique des dérivées secondes, dont le calcul présente, curieusement, des simplifications exceptionnelles.

Au paragraphe 4, le théorème 3 améliore les théorèmes 3.1 et 4.1 de [18] et précise l'ordre maximum du logarithme de la fonction de Kalmár.

Les propriétés des nombres K-champions sont données au paragraphe 5 par les théorèmes 4–7. Une table de ces nombres figure en annexe.

La démonstration des théorèmes 3–7 suit d'assez près la preuve des théorèmes correspondants de [11]. Cependant, le remplacement de la formule exacte (5) pour la fonction $K_{\mathcal{P}}$ par la formule asymptotique de Evans (théorème 1) pour la fonction K complique les démonstrations. Ceci est particulièrement net dans la preuve du théorème 6.

Nous avons plaisir à remercier L. Rifford pour l'aide apportée à la résolution du problème d'optimisation étudié au paragraphe 3, et l'arbitre anonyme pour une lecture très attentive du manuscrit et pour nous avoir donné une preuve plus simple du lemme 2.4

Notations. On utilisera les notations suivantes.

1. Pour toute suite $\underline{x} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant \varpi}$ de réels de longueur ϖ, finie ou infinie, on note $\Omega(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\varpi} x_i$ (lorsque cette somme a un sens) et $\|\underline{x}\| = \sum_{i=1}^{\varpi} |x_i|$. Si $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$ et $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell$, on définit $\underline{x}' = (x_1', x_2', \dots)$ par $x_i' = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$, et $x_i' = 0$ pour $i > k$ et de même $\underline{y}' = (y_1', y_2', \dots)$ par $y_i' = y_i$ pour $i \leqslant \ell$ et $y_i' = 0$ pour $i > \ell$. Par définition on pose $\|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{x}' - \underline{y}'\|$.
2. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites de réels positifs ou nuls telle que $0 \leqslant \Omega(\underline{x}) < +\infty$, $\underline{0} = (0, 0, 0, \dots)$, et $\mathcal{A}^\star = \mathcal{A} \setminus \{\underline{0}\}$.
3. Si $\underline{x} \in \mathcal{A}^\star$ on note $\varpi(\underline{x}) = \sup\{j \in \mathbb{N};\ x_j \neq 0\}$.
4. p_k représente le $k^{\text{ème}}$ nombre premier. Par le théorème des nombres premiers on sait que $p_k \sim k \log k$ lorsque $k \to \infty$.
5. Pour n entier, de décomposition en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, on note

$$\omega(n) = k \quad \text{et} \quad \Omega(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i. \tag{1.7}$$

2. L'estimation de Evans

2.1. *La fonction c*

La fonction $c(\underline{x})$ définie ci-dessous a été introduite par Evans dans [8] lorsque $\underline{x}$ est de longueur ϖ finie. Nous l'étendrons ici aux suites infinies.

Définition 2.1. Soit $\underline{x} \in \mathcal{A}^\star$ et $\varpi = \varpi(\underline{x})$. Il existe un unique $c = c(\underline{x}) > 0$ tel que

$$\prod_{j=1}^{+\varpi}\left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2. \tag{2.1}$$

De plus, pour tout $\lambda > 0$,

$$c(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots) = \lambda c(x_1, x_2, \ldots) \tag{2.2}$$

et

$$\Omega(\underline{x}) \leqslant c(\underline{x}) \leqslant \frac{\Omega(\underline{x})}{\log 2} \leqslant \frac{3\Omega(\underline{x})}{2}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Pour tout $t > 0$ on note

$$H(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^{\varpi} \log\left(1 + \frac{x_j}{t}\right) \leqslant \frac{1}{t}\|\underline{x}\|.$$

La fonction $t \mapsto H(\underline{x}, t)$ décroît de $+\infty$ à 0 lorsque t croît de 0 à $+\infty$. Ceci assure l'existence et l'unicité de c. La propriété (2.2) est immédiate. Prouvons l'encadrement (2.3). Pour $t = \Omega(\underline{x}) = \Omega$,

$$H(\underline{x}, \Omega) = \log \prod_{j=1}^{\varpi}\left(1 + \frac{x_j}{\Omega}\right) \geqslant \log\left(1 + \sum_{j=1}^{\varpi}\frac{x_j}{\Omega}\right) = \log 2.$$

Ceci montre que $c \geqslant \Omega$. La majoration de $c(\underline{x})$ résulte de

$$\log 2 = \sum_{j=1}^{\varpi} \log\left(1 + \frac{x_j}{c}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\varpi}\frac{x_j}{c} = \frac{\Omega}{c}. \qquad \square$$

Remarque. On vérifie immédiatement que si ϖ est fini on a

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_\varpi, 0) = c(x_1, x_2, \ldots, x_\varpi) \tag{2.4}$$

et que la suite infinie $\underline{x}'$ définie par $x'_i = x_i$ pour $i \leqslant \varpi$ et $x'_i = 0$ pour $i > \varpi$ est un élément de $\mathcal{A}$ et $c(\underline{x}') = c(x_1, x_2, \ldots, x_\varpi)$. Notons aussi que c est symétrique en les x_i, et que c'est une fonction croissante de chaque variable x_i. Par convention, on pose $c(\underline{0}) = 0$.

Lemme 2.2. *Soit* $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{A}^\star$, $c = c(\underline{x})$ *et, pour tout* $k \geqslant 1$

$$c_k = c(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots).$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty} c_k = c.$$

Démonstration. La suite (c_k), croissante et majorée par $\Omega(x)/\log 2$ par (2.3) admet une limite $\hat{c}$. Comme $\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{x_i}{t})$ converge uniformément vers $\prod_{i=1}^{+\infty}(1+\frac{x_i}{t})$, sur tout intervalle $[u, +\infty[$, $u > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_i}{\hat{c}}\right) = \lim_{k\to+\infty}\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{x_i}{c_k}\right) = 2 = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_i}{c}\right),$$

et cela donne $\hat{c} = c$. □

Lemme 2.3. *Soit* $\underline{x} \in \mathcal{A}^\star$. *Pour tout entier* $i \geqslant 1$, c *admet une dérivée partielle par rapport à* x_i, *qui est donnée par*

$$\frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{T(\underline{x})}\frac{c(\underline{x})}{c(\underline{x})+x_i}, \quad \text{avec } T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{c(\underline{x})+x_i}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Puisque c est une fonction symétrique de ses arguments on peut supposer $i = 1$. Fixons $x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots$, et supposons les d'abord non tous nuls. Posons $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. L'application $x_1 \mapsto c(\underline{x})$ est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur $[c_0, +\infty[$, avec $c_0 = c(0, x_2, x_3, \ldots) > 0$, car, par définition, x_1 s'explicite en fonction de c par

$$x_1 = \frac{2c}{\Pi} - c \quad \text{avec } \Pi = \prod_{j=2}^{\infty}\left(1+\frac{x_j}{c}\right).$$

La convergence de la série $\sum_{j=2}^{\infty} x_j$ entraine que $\log \Pi = \sum_{j=2}^{\infty}\log(1+\frac{x_j}{c})$ est une fonction dérivable de c sur $[c_0, +\infty[$ et que l'on a

$$\frac{d\Pi}{\Pi\, dc} = -\frac{1}{c}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{x_j}{c+x_j} = -\frac{1}{c}\left(T(\underline{x}) - \frac{x_1}{c+x_1}\right).$$

Il en résulte que $c \mapsto x_1$ est une bijection croissante et continûment dérivable de $[c_0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et que l'on a, puisque $\Pi = \frac{2c}{c+x_1}$,

$$\frac{dx_1}{dc} = \frac{2}{\Pi} - \frac{2c}{\Pi^2}\frac{d\Pi}{dc} - 1 = \frac{2}{\Pi}\left(1+T(\underline{x}) - \frac{x_1}{c+x_1}\right) - 1 = \left(\frac{c+x_1}{c}\right)T(\underline{x}). \tag{2.6}$$

Par le theorème d'inversion c est une fonction continûment dérivable de x_1 et (2.6) implique (2.5).

Si $0 = x_2 = x_3 = \cdots$, la définition (2.1) donne $c(\underline{x}) = x_1$ et le résultat est encore vrai. $\square$

Lemme 2.4. *Soit (γ_i) une suite de réels vérifiant $0 \leqslant \gamma_i < 1$ et $\sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i < +\infty$. Alors*

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \gamma_i.$$

Démonstration. On a $(1-\gamma_1)(1-\gamma_2) = 1-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_1\gamma_2 \geqslant 1-\gamma_1-\gamma_2$, puis, par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^{n}(1-\gamma_i) \geqslant 1-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$, et enfin, par passage à la limite, $\prod_{i=1}^{\infty}(1-\gamma_i) \geqslant 1-\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i$. $\square$

Lemme 2.5. *Pour tout $\underline{x} \in \mathcal{A}^\star$, la quantité $T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{c(\underline{x})+x_i}$ vérifie*

$$\frac{1}{2} \leqslant T(\underline{x}) \leqslant 1.$$

Et chaque dérivée partielle de c vérifie

$$0 \leqslant \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i} \leqslant \frac{1}{T(\underline{x})} \leqslant 2.$$

Démonstration. L'encadrement (2.3) donne la majoration

$$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{c+x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{c} = \frac{\Omega}{c} \leqslant 1.$$

Pour la minoration, notons $\gamma_i = \frac{x_i}{c+x_i}$. Alors, par la définition 2.1 de c,

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-\gamma_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{c}{c+x_i} = \frac{1}{2}.$$

Le lemme 2.4 donne alors

$$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{\infty}(1-\gamma_i) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pour le deuxième point, le lemme 2.3 entraîne

$$\frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{T(\underline{x})} \frac{c(\underline{x})}{c(\underline{x})+x_i} \leqslant \frac{1}{T(\underline{x})} \leqslant 2. \qquad \square$$

Lemme 2.6. *Soit $\underline{x}$ et $\underline{x}' \in \mathcal{A}$. Alors*

$$\left|c(\underline{x}') - c(\underline{x})\right| \leqslant 2\sum_{i=1}^{+\infty}\left|x_i' - x_i\right| = 2\|\underline{x}' - \underline{x}\|.$$

Démonstration.

1. Si $\underline{x}'$ et $\underline{x}$ sont tous deux de même longueur finie k on note

$$G(t) = c\big(\underline{x} + t(\underline{x}' - \underline{x})\big).$$

Alors $c(\underline{x}') - c(\underline{x}) = G(1) - G(0)$. De plus, G est dérivable sur l'intervalle (0, 1), de dérivée

$$G'(t) = \sum_{i=1}^{k} (x_i' - x_i) \frac{\partial c}{\partial x_i}\big(\underline{x} + t(\underline{x}' - \underline{x})\big).$$

Par le théorème des accroissements finis et le lemme 2.5, il vient

$$\big|c(\underline{x}) - c(\underline{x}')\big| = \big|G(1) - G(0)\big| \leqslant \sup_{0<t<1} \big|G'(t)\big| \leqslant 2\sum_{i=1}^{k} \big|x_i' - x_i\big|.$$

2. Revenons maintenant au cas général. Pour tout $k \geqslant 1$, notons

$$c_k = c(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \quad \text{et} \quad c_k' = c\big(x_1', x_2', \ldots, x_k', 0, 0, \ldots\big).$$

Par le premier point, on a $|c_k' - c_k| \leqslant 2\sum_{i=1}^{k} |x_i' - x_i| \leqslant 2\,\|\underline{x}' - \underline{x}\|$. Avec le lemme 2.2 on en déduit

$$|c' - c| = \lim_{k\to\infty} \big|c_k' - c_k\big| \leqslant 2\|\underline{x}' - \underline{x}\|. \qquad \square$$

Lemme 2.7. *Soit $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathcal{A}$. Notons $\Omega = \Omega(\underline{x})$ et $\Omega' = \Omega(\underline{x}')$. Pour la fonction T définie en* (2.5)*, on a la majoration*

$$\big|T(\underline{x}') - T(\underline{x})\big| \leqslant \frac{3}{\max(\Omega, \Omega')} \|\underline{x}' - \underline{x}\|.$$

Démonstration. Notons $c = c(\underline{x})$ et $c' = c(\underline{x}')$ et supposons $\Omega' \geqslant \Omega$. Alors

$$T(\underline{x}') - T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{x_i'}{c' + x_i'} - \frac{x_i}{c + x_i}\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{cx_i' - c'x_i}{(c' + x_i')(c + x_i)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c(x_i' - x_i)}{(c' + x_i')(c + x_i)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(c - c')x_i}{(c' + x_i')(c + x_i)}$$

et, en utilisant le lemme 2.6 et (2.3),

$$\big|T(\underline{x}') - T(\underline{x})\big| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i' - x_i|}{c' + x_i'} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i|c' - c|}{(c' + x_i')(c + x_i)}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i' - x_i|}{\Omega'} + |c' - c| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{\Omega \Omega'}$$
$$= \frac{\|\underline{x}' - \underline{x}\|}{\Omega'} + \frac{|c' - c|}{\Omega'} \leqslant \frac{3}{\Omega'} \|\underline{x}' - \underline{x}\|. \qquad \square$$

2.2. Approximation de $K(n)$

Les définitions suivantes ont été introduites par Evans (cf. [8]).

Définition 2.8. Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{\star k}$ on définit

$$\mathbf{A}(\underline{x}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\Omega(\underline{x})} \prod_{i=1}^{k} \frac{(c(\underline{x}) + x_i)^{x_i}}{\Gamma(x_i + 1)}. \tag{2.7}$$

Définition 2.9. Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{\star k}$ on définit

$$\mathbf{B}(\underline{x}) = \left\{ \frac{1}{2c(\underline{x})} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2c(\underline{x})}{T(\underline{x})}}. \tag{2.8}$$

Du lemme 2.5, il résulte immédiatement le suivant

Lemme 2.10. *Pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{\star k}$, on a*

$$\sqrt{2c(\underline{x})} \leqslant \mathbf{B}(\underline{x}) \leqslant 2\sqrt{c(\underline{x})}. \tag{2.9}$$

On trouvera également dans [8] la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1 *(Evans). Pour tout η, $0 \leqslant \eta < 1/2$, il existe Ω_0 et C_0 tels que, pour tout entier n dont la décomposition en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ satisfait $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \geqslant \Omega_0$, on a, en posant $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$,*

$$K(n) = \sqrt{\pi} \mathbf{A}(\underline{\alpha}) \mathbf{B}(\underline{\alpha}) \big(1 + R(\underline{\alpha})\big) \quad \textit{avec } \big|R(\underline{\alpha})\big| \leqslant C_0 \big(\Omega(\underline{\alpha})\big)^{-\eta}.$$

Remarque. La démonstration d'Evans est effective, et permettrait d'expliciter des valeurs de Ω_0 et C_0 pour une valeur donnée de η. Le calcul est cependant technique et nous ne le ferons pas.

Lemme 2.11. *Il existe deux constantes absolues C_1 et C_2 telles que, pour tout entier $n \geqslant 2$, de décomposition en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$, on ait avec $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$*

$$C_1 \sqrt{\pi}\, \mathbf{A}(\underline{\alpha}) \mathbf{B}(\underline{\alpha}) \leqslant K(n) \leqslant C_2 \sqrt{\pi}\, \mathbf{A}(\underline{\alpha}) \mathbf{B}(\underline{\alpha}). \tag{2.10}$$

Démonstration. Choisissons, par exemple $\eta = 1/4$, et $\varepsilon > 0$ arbitraire ; par le théorème 1 il existe un Ω_1 tel que le rapport $K(n)/(\sqrt{\pi}\, \mathbf{A}(\underline{\alpha}) \mathbf{B}(\underline{\alpha}))$ diffère de 1 de au plus ε, pourvu que $\Omega(n) = \Omega(\underline{\alpha}) \geqslant \Omega_1$. Pour tous les entiers n avec $1 \leqslant \Omega(n) < \Omega_1$, le nombre des valeurs de $\underline{\alpha}$ est fini. $\square$

Nous avons calculé, pour chaque $r \in \{1, 2, \ldots, 20\}$, et pour tous les n tels que $\Omega(n) = r$, le rapport $K(n)/(\sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha}))$. Nous avons vérifié que ce rapport est minimum lorsque $\underline{\alpha} = (r)$, c'est à dire lorsque n est une puissance de nombre premier, $n = p^r$. Il atteint son maximum lorsque $\underline{\alpha} = (1, 1, \ldots, 1)$, c'est à dire lorsque n est un produit de r facteurs premiers distincts. Il est raisonnable de penser que cette propriété est encore vraie pour toutes les valeurs de $r \geqslant 20$. Ceci donne la conjecture suivante :

Conjecture 1. *La valeur optimale de C_2 est $1.084437552\ldots$, atteinte pour $\underline{\alpha} = (1)$, c'est à dire lorsque n est premier. Et la valeur optimale de C_1 est 1, approchée par les entiers sans facteurs carrés, lorsque le nombre de leurs facteurs premiers tend vers l'infini.*

2.3. Les constantes ρ, ρ_k, a et a_k

Les constantes ρ, ρ_k, a, a_k ont été introduites par Hille [12], Evans [8, p. 169] et Klazar et Luca [18]. Dans ce paragraphe nous rappelons et précisons leur comportement.

Définition 2.12. Soit $\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ la fonction de Riemann, et pour tout $k \geqslant 1$, posons $\zeta_k(s) = \prod_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_j^s})^{-1}$.

On définit $\rho = 1.728647238998\ldots$, et pour tout $k \geqslant 1$, $\rho_k > 0$ par

$$\zeta(\rho) = 2, \qquad \zeta_k(\rho_k) = 2. \tag{2.11}$$

Pour $s > 1$, on définit $L(s) = -\log \zeta(s)$, de sorte que

$$L'(s) = -\frac{d}{ds}\big(\log \zeta(s)\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^s - 1},$$

et $L_k(s) = -\log \zeta_k(s)$. On définit $a = 1.100020011\ldots$ et a_k par

$$\frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho} - 1} = L'(\rho) \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_k} - 1} = L_k'(\rho_k). \tag{2.12}$$

Tableau 1 donne la valeur des premiers termes des suites (ρ_k) et (a_k).

Lemme 2.13. *La suite (ρ_k) est croissante et $\lim_{k\to+\infty} \rho_k = \rho$. De plus, lorsque k tend vers l'infini,*

$$\rho - \rho_k \sim \frac{2}{(-\zeta'(\rho))(\rho - 1)k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}} = \frac{1.509\ldots}{k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}}. \tag{2.13}$$

Tableau 1
Quelques valeurs de ρ_k et a_k

k	1	2	3	10	100	1000	∞
ρ_k	1.00000	1.43527	1.56603	1.69972	1.72658	1.72843	1.72864
a_k	1.44269	1.44336	1.36287	1.19244	1.11279	1.10196	1.1000200

Ce lemme est démontré en [18], paragraphe 2. En introduisant l'exponentielle intégrale $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$, il est possible de démontrer, comme dans [11], (3.16)

$$\rho - \rho_k = \frac{2E_1((\rho-1)\log p_k)}{-\zeta'(\rho)} + \frac{\mathcal{O}_u(1)}{k^{\rho-1}(\log k)^u}$$

pour tout $u > 0$.

Lemme 2.14. *Soient a_k et a définis en* (2.12)*. La suite (a_k) est décroissante et, lorsque k tend vers l'infini, on a l'équivalence*

$$a_k - a \sim \frac{a^2}{\rho-1}\frac{1}{(k\log k)^{\rho-1}}.$$

Démonstration. La décroissance de la suite (a_k) résulte de la croissance de (ρ_k) et de (2.12). Lorsque $k \to \infty$, il résulte de (2.12) et de $\lim \rho_k = \rho$ (lemme 2.13) que $\lim a_k = a$ et

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a}{aa_k} \sim \frac{a_k - a}{a^2}. \tag{2.14}$$

Calculons un équivalent de $1/a - 1/a_k$. Les définitions (2.12) donnent

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} = L'(\rho) - L'_k(\rho_k) = L'(\rho) - L'_k(\rho) + L'_k(\rho) - L'_k(\rho_k). \tag{2.15}$$

Estimation de $L'(\rho) - L'_k(\rho)$. On part de

$$L'(\rho) - L'_k(\rho) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^\rho - 1}. \tag{2.16}$$

Les équivalences (cf., par exemple, [5], (3.11.10), (3.11.6) et (3.10.5))

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^\rho - 1} \sim \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\log(i\log i)}{(i\log i)^\rho} \sim \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^\rho(\log i)^{\rho-1}} \sim \int_k^\infty \frac{dt}{t^\rho(\log t)^{\rho-1}}$$
$$\sim \frac{1}{(\rho-1)}\frac{1}{k^{(\rho-1)}(\log k)^{\rho-1}}$$

donnent avec (2.16)

$$L'_k(\rho) - L'(\rho) \sim \frac{1}{(\rho-1)}\frac{1}{k^{(\rho-1)}(\log k)^{\rho-1}}. \tag{2.17}$$

Estimation de $L_k'(\rho) - L_k'(\rho_k)$. La définition de la dérivée et (2.13) donnent

$$L_k'(\rho) - L_k'(\rho_k) \sim (\rho - \rho_k) L_k''(\rho) \sim -\frac{2L_k''(\rho)}{(\rho-1)\zeta'(\rho)} \frac{1}{k^{\rho-1}(\log k)^\rho}$$
$$\sim -\frac{2L''(\rho)}{(\rho-1)\zeta'(\rho)} \frac{1}{k^{\rho-1}(\log k)^\rho}. \tag{2.18}$$

(2.15), (2.17) et (2.18) donnent $1/a - 1/a_k \sim \frac{1}{(\rho-1)(k\log k)^{(\rho-1)}}$, ce qui, avec (2.14), termine la preuve. □

Lemme 2.15. *Il existe une constante positive C_9 telle que, pour tout $k \geqslant 2$, et tout nombre premier p,*

$$\left| \frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^\rho - 1} \right| \leqslant C_9 \frac{\log p}{p^{\rho_2}} \frac{1}{(k\log k)^{\rho - 1}}. \tag{2.19}$$

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto 1/(p^t - 1)$, il existe θ, $\rho_k < \theta < \rho$, tel que

$$\left| \frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^\rho - 1} \right| = \left(\frac{1}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{1}{p^\rho - 1} \right) a_k + \frac{a_k - a}{p^\rho - 1}$$
$$= \frac{p^\theta \log p}{(p^\theta - 1)^2} (\rho - \rho_k) a_k + \frac{a_k - a}{p^\rho - 1}. \tag{2.20}$$

On a $1 < \rho_2 \leqslant \rho_k \leqslant \theta \leqslant \rho \leqslant 2$. La décroissance de $x \mapsto x/(x-1)^2$ donne

$$\frac{p^\theta}{(p^\theta - 1)^2} \leqslant \frac{p^{\rho_2}}{(p^{\rho_2} - 1)^2} \leqslant \frac{C}{p^{\rho_2}}$$

où C ne dépend ni de p ni de k. De même il existe D tel que

$$\frac{1}{p^\rho - 1} \leqslant \frac{1}{p^{\rho_2} - 1} \leqslant \frac{D}{p^{\rho_2}} \leqslant \frac{D\log p}{p^{\rho_2}\log 2} \leqslant \frac{3D\log p}{2p^{\rho_2}}.$$

Et donc, puisque la suite (a_k) est majorée par $3/2$, par (2.20) on a

$$\left| \frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^\rho - 1} \right| \leqslant \frac{3\log p}{2p^{\rho_2}} \big(C(\rho - \rho_k) + D(a_k - a) \big)$$

et l'on conclut en utilisant les lemmes 2.13 et 2.14. □

3. Un problème d'optimisation

3.1. La fonctions F

Définition 3.1. Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$ on définit

$$F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \log\left(1 + \frac{c(\underline{x})}{x_j}\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(x_j \log\left(x_j + c(\underline{x})\right) - x_j \log x_j\right). \tag{3.1}$$

Remarque. La fonction F se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}_+^k$ en posant $0 \log 0 = 0$. Notons que, par (2.4), on a $F(x_1, x_2, \dots, x_k, 0) = F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $F(\underline{0}) = 0$.

Lemme 3.2. *La fonction F est concave dans $\mathbb{R}_+^k$.*

Démonstration. Par (3.1) et (2.5) pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) &= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{c(\underline{x}) + x_j}\right)\frac{\partial c}{\partial x_i}(\underline{x}) + \log\left(c(\underline{x}) + x_i\right) + \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} - \log x_i - 1 \\
&= \frac{c(\underline{x})}{c(\underline{x}) + x_i} + \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} + \log\left(\frac{c(\underline{x}) + x_i}{x_i}\right) - 1 \\
&= \log\left(\frac{c(\underline{x}) + x_i}{x_i}\right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\underline{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\log\left(c(\underline{x}) + x_i\right) - \log(x_i)\right) \\
&= \left(\frac{1}{c(\underline{x}) + x_i}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}(\underline{x}) + 1\right) - \frac{1}{x_i} \\
&= \frac{c(\underline{x})}{(c(\underline{x}) + x_i)^2 T(x)} + \frac{1}{c(\underline{x}) + x_i} - \frac{1}{x_i}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

et, pour $j \neq i$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\log\left(c(\underline{x}) + x_i\right) - \log(x_i)\right) \\
&= \left(\frac{1}{c(\underline{x}) + x_i}\right)\frac{\partial c}{\partial x_j}(\underline{x}) = \frac{c(\underline{x})}{(c(\underline{x}) + x_i)(c(\underline{x}) + x_j)T(x)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

La forme quadratique des dérivées secondes de F s'écrit donc, pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{\star k}$,

$$F''(\underline{x}) \cdot (h_1, h_2, \dots, h_k) = \frac{c(\underline{x})}{T(\underline{x})}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c(\underline{x}) + x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{c(\underline{x}) h_i^2}{x_i(c(\underline{x}) + x_i)}. \tag{3.5}$$

L'inégalité de Cauchy–Schwarz donne

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c(\underline{x}) + x_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i}} \frac{h_i}{\sqrt{x_i(c(\underline{x}) + x_i)}}\right)^2$$
$$\leqslant T(\underline{x}) \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i^2}{x_i(c(\underline{x}) + x_i)},$$

ce qui, avec (3.5), prouve la concavité de F dans l'adhérence $\mathbb{R}_+^k$ de $\mathbb{R}_+^{\star k}$. □

3.2. *Proximité de* $\mathbf{A}(\underline{x})$ *et de* $\exp(F(\underline{x}))$

Le lemme suivant montre que F est une assez bonne approximation de $\log \mathbf{A}$ (cf. définition 2.8).

Lemme 3.3. *Soit* $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$ *; on a*

$$\mathbf{A}(\underline{x}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\bigl(F(\underline{x})\bigr) \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{s(x_i)}, \quad \text{où } s(x_i) = \frac{\Gamma(x_i + 1)}{x_i^{x_i} e^{-x_i}} \tag{3.6}$$

est le terme correctif de la formule de Stirling $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} s(x)$*, de l'ordre de grandeur de* $\sqrt{2\pi x}$*. Plus précisément on a l'encadrement*

$$\sqrt{2\pi x} \leqslant s(x) \leqslant e\sqrt{x}, \quad x \geqslant 1. \tag{3.7}$$

Démonstration. De la définition 2.8, il suit

$$\mathbf{A}(\underline{x}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp\bigl(-\Omega(\underline{x})\bigr) \prod_{j=1}^{k} \frac{(c(\underline{x}) + x_i)^{x_i}}{\Gamma(x_i + 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \prod_{j=1}^{k} \frac{(c(\underline{x}) + x_i)^{x_i}}{x_i^{x_i}} \frac{x_i^{x_i} e^{-x_i}}{\Gamma(x_i + 1)}.$$

La formule (3.7) se réduit à l'encadrement classique de $\Gamma(x+1)$, $x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \leqslant \Gamma(x+1) \leqslant x^x e^{-x} e\sqrt{x}$. □

De la définition de $s(j)$ résulte immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Pour tout* $j \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\frac{s(j+1)}{s(j)} = e\left(\frac{j}{j+1}\right)^j, \tag{3.8}$$

et lorsque j *tend vers l'infini*

$$\frac{s(j+1)}{s(j)} = 1 + \frac{1}{2j} + O\left(\frac{1}{j^2}\right).$$

3.3. Maximisation de F

Pour $k \geqslant 2$, entier, p_k est le $k^{\text{ème}}$ nombre premier. Soit $A > 0$ réel, et $k \geqslant 2$ on considère le domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}_+^{*k}$, défini par

$$x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \cdots + x_k \log p_k \leqslant A. \tag{3.9}$$

Par (3.2) la fonction F définie par (3.1) est croissante par rapport à chaque variable, le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \underline{x} \in \mathcal{D}(A), \\ \max F(\underline{x}) \end{cases} \tag{3.10}$$

a donc même solution que le problème

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + \cdots + x_k \log p_k = A, \\ \max F(x_1, x_2, \ldots, x_k). \end{cases} \tag{3.11}$$

Ce problème a été résolu dans [8], lemme 6, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Le multiplicateur de Lagrange est la constante ρ_k définie en (2.11).

Lemme 3.5. *L'unique solution $\underline{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star, \ldots, x_k^\star)$ du problème* (3.10) *satisfait*

$$x_1^\star \log 2 + x_2^\star \log 3 + \cdots + x_k^\star \log p_k = A, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^\star) = \rho_k \log p_i, \tag{3.13}$$

$$c(\underline{x}^\star) = a_k A, \tag{3.14}$$

$$x_i^\star = \frac{a_k A}{p_i^{\rho_k} - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.15}$$

$$F(\underline{x}^\star) = \rho_k A. \tag{3.16}$$

Lemme 3.6. *Soit $k \geqslant 2$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathcal{D}(A)$ défini par* (3.9)*, $\underline{x}^\star$ défini par* (3.15) *et F définie par* (3.1)*. Alors on a*

$$F(\underline{\alpha}) \leqslant F(\underline{x}^\star) - \frac{1}{4A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left| \alpha_i - x_i^\star \right| \log p_i \right)^2 \tag{3.17}$$

$$\leqslant F(\underline{x}^\star) - \frac{1}{4A \log p_k} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\alpha_i - x_i^\star \right)^2 (\log p_i)^2. \tag{3.18}$$

Démonstration. Définissons $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ par

$$y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad y_{k-1} = \alpha_{k-1}, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i = A. \tag{3.19}$$

Comme $\alpha \in \mathcal{D}(A)$, on a $\alpha_k \leqslant y_k$ et la croissance de F par rapport à chacune des variables (cf. (3.2)) entraine

$$F(\underline{\alpha}) \leqslant F(\underline{y}). \tag{3.20}$$

Posons $h_i = y_i - x_i^\star$. On a par (3.19), (3.15) et (2.12),

$$\sum_{i=1}^k h_i \log p_i = \sum_{i=1}^k y_i \log p_i - \sum_{i=1}^k x_i^\star \log p_i = A - A = 0. \tag{3.21}$$

La formule de Taylor appliquée à F entre les points $\underline{y}$ et $\underline{x}^\star$ donne

$$F(\underline{y}) - F(\underline{x}^\star) = \sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^\star) + \frac{1}{2} F''(\underline{\xi}) \cdot (\underline{h}), \tag{3.22}$$

avec $\underline{\xi} = \theta \underline{y} + (1-\theta)\underline{x}^\star$ et $0 < \theta < 1$. On a donc $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}_+^{\star k}$. Par (3.13) et (3.21) il vient

$$\sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^\star) = \rho_k \sum_{i=1}^k h_i \log p_i = 0. \tag{3.23}$$

(3.21) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz donnent

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^k \frac{h_i}{c(\underline{\xi}) + \xi_i} \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{h_i}{c(\underline{\xi}) + \xi_i} \left(1 - \frac{(c(\underline{\xi}) + \xi_i) \log p_i}{2c(\underline{\xi}) \log p_k} \right) \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{\frac{\xi_i}{c(\underline{\xi}) + \xi_i}} \frac{h_i}{\sqrt{\xi_i (c(\underline{\xi}) + \xi_i)}} \left(1 - \frac{(c(\underline{\xi}) + \xi_i) \log p_i}{2c(\underline{\xi}) \log p_k} \right) \right)^2 \\
&\leqslant T(\underline{\xi}) \left(\sum_{i=1}^k \frac{h_i^2}{\xi_i (c(\underline{\xi}) + \xi_i)} \left(1 - \frac{(c(\underline{\xi}) + \xi_i) \log p_i}{2c(\underline{\xi}) \log p_k} \right)^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Par (2.3), pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$, on a $0 < \xi_i \leqslant \Omega(\underline{\xi}) \leqslant c(\underline{\xi})$. En notant $t_i = \frac{(c(\underline{\xi}) + \xi_i) \log p_i}{2c(\underline{\xi}) \log p_k}$, on a donc $0 < t_i \leqslant 1$, puis $(1 - t_i)^2 \leqslant 1 - t_i$. La majoration (3.24) et (3.5) donnent alors

$$\begin{aligned}
F''(\underline{\xi}) \cdot \underline{h} &\leqslant \sum_{i=1}^k \frac{h_i^2 c(\underline{\xi})}{\xi_i (c(\underline{\xi}) + \xi_i)} \left(1 - \frac{(c(\underline{\xi}) + \xi_i) \log p_i}{2c(\underline{\xi}) \log p_k} - 1 \right) \\
&\leqslant - \sum_{i=1}^k \frac{\log p_i}{\log p_k} \frac{h_i^2}{2\xi_i}.
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy–Schwarz sous la forme

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|h_i|\log p_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\xi_i\log p_i}\,\frac{|h_i|\sqrt{\log p_i}}{\sqrt{\xi_i}}\right)^2\leqslant A\sum_{i=1}^{k}\frac{h_i^2\log p_i}{\xi_i}$$

(car par (3.19) et (3.12), $\sum_{i=1}^{k}\xi_i\log p_i=A$), cela donne

$$F''(\xi)\cdot\underline{h}\leqslant-\frac{1}{2A\log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k}|h_i|\log p_i\right)^2\leqslant-\frac{1}{2A\log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}|h_i|\log p_i\right)^2$$

ce qui avec (3.20), (3.22), (3.23) et (3.19), complète la preuve du lemme 3.6. □

Théorème 2. *Il existe deux constantes C_3 et C_4 telles que, pour tout entier $n\geqslant 2$, avec $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\geqslant 1$ et $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$ on ait*

$$C_3\frac{\exp(F(\underline{\alpha}))}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}}\leqslant K(n)\leqslant C_4\frac{\exp(F(\underline{\alpha}))}{\pi^{k/2}}\leqslant C_4\frac{\exp(\rho_k\log n)}{\pi^{k/2}}. \tag{3.25}$$

Démonstration. On part de l'encadrement donné par (2.10),

$$C_1\sqrt{\pi}\,\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha})\leqslant K(n)\leqslant C_2\sqrt{\pi}\,\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha}).$$

Avec les encadrements de **B**, (2.9), et de c, (2.3), ceci donne

$$C_1\sqrt{2\pi\,\Omega(\underline{\alpha})}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\leqslant K(n)\leqslant C_2\sqrt{6\pi}\sqrt{\Omega(\underline{\alpha})}\mathbf{A}(\underline{\alpha}).$$

On remplace $\mathbf{A}(\underline{\alpha})$ par le second membre de (3.6),

$$\frac{C_1}{2}\sqrt{\pi\,\Omega(\underline{\alpha})}\exp\bigl(F(\underline{\alpha})\bigr)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s(\alpha_j)}\leqslant K(n)$$
$$\leqslant\frac{C_2\sqrt{3\pi}}{2}\sqrt{\Omega(\underline{\alpha})}\exp\bigl(F(\underline{\alpha})\bigr)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s(\alpha_j)}.$$

L'encadrement (3.7) de $s(x)$ donne alors

$$\frac{C_1}{2}\sqrt{\pi\,\Omega(\underline{\alpha})}\frac{1}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}.}\exp\bigl(F(\underline{\alpha})\bigr)\leqslant K(n)$$
$$\leqslant\frac{C_2\sqrt{3\pi}}{2}\sqrt{\frac{\Omega(\underline{\alpha})}{\prod_{i=1}^{k}2\pi\alpha_i}}\exp\bigl(F(\underline{\alpha})\bigr). \tag{3.26}$$

La première inégalité dans (3.25) est obtenue en minorant $\Omega(\underline{\alpha})$ par 1 et en posant $C_3=\frac{C_1\sqrt{\pi}}{2}$. Puisque chacun des entiers $2\alpha_i$ est supérieur ou égal à 2, leur somme $2\Omega(n)$ est majorée par leur produit $\prod_{i=1}^{k}(2\alpha_i)$. On obtient donc la deuxième inégalité de (3.25) en choisissant $C_4=\frac{C_2\sqrt{3\pi}}{2}$.

La dernière inégalité dans (3.25) se réduit à $F(\underline{\alpha}) \leqslant \rho_k \log n$; elle s'obtient en appliquant le lemme 3.5, avec $A = \log n$, ce qui assure l'appartenance de $\underline{\alpha}$ au domaine $\mathcal{D}(A)$. $\square$

4. Grandes valeurs de la fonction K

Théorème 3. *Il existe deux constantes positives C_5 et C_6 telles que :*

1. *Pour tout entier n suffisamment grand on a*

$$\log K(n) \leqslant \rho \log n - C_5 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}. \tag{4.1}$$

2. *Pour tout n suffisamment grand il existe $m \leqslant n$ tel que*

$$\log K(m) \geqslant \rho \log n - C_6 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n} \geqslant \rho \log m - C_6 \frac{(\log m)^{1/\rho}}{\log\log m}. \tag{4.2}$$

Preuve de (4.1). Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Lorsque $k = 1$, on calcule par récurrence avec la formule (1.2), $K(n) = K(q_1^{\alpha_1}) = 2^{\alpha_1 - 1} \leqslant n$ et (4.1) est vérifiée pour tout C_5 et n assez grand.

Nous supposerons maintenant $k \geqslant 2$. On pose $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \leqslant n$. D'après la définition de K on a $K(n) = K(N)$, et $\alpha_1 \log 2 + \alpha_2 \log 3 + \cdots + \alpha_k \log p_k = \log N$. L'encadrement (3.25) donne

$$\log K(n) = \log K(N) \leqslant \rho_k \log N - \frac{k}{2} \log \pi + \log C_4,$$

qui, avec $\log N \leqslant \log n$, donne

$$\begin{aligned}\log K(n) &\leqslant \rho_k \log n - \frac{k}{2} \log \pi + \log C_4 \\ &= \rho \log n - \left[(\rho - \rho_k) \log n + \frac{k}{2} \log \pi - \log C_4 \right].\end{aligned} \tag{4.3}$$

Supposons $n \geqslant 16$ ce qui assure $\log\log n > 1$. Vue (2.13), il existe une constante positive γ_1 telle que $\rho - \rho_k \geqslant \gamma_1 / (k^{\rho-1} (\log k)^\rho)$. Alors

1. Si $2 \leqslant k \leqslant \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n} < \log n$, on a

$$\rho - \rho_k \geqslant \frac{\gamma_1}{k^{\rho-1} (\log k)^\rho} \geqslant \frac{\gamma_1}{\left(\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\right)^{\rho-1} (\log\log n)^\rho} = \gamma_1 \frac{(\log n)^{1/\rho - 1}}{\log\log n}.$$

2. Si $k > \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}$, on a alors

$$\frac{k}{2} \log \pi \geqslant \frac{k}{2} > \frac{1}{2} \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}.$$

Dans les deux cas, le crochet de (4.3) vérifie

$$\begin{aligned}\left[(\rho-\rho_k)\log n+\frac{k}{2}\log\pi-\log C_4\right] &\geqslant \min\left(\gamma_1,\frac{1}{2}\right)\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}-\log C_4\\ &\geqslant C_5\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\end{aligned}$$

pour n assez grand, avec $C_5>0$. Ceci termine la démonstration de (4.1). Avant de démontrer (4.2), rappelons le lemme suivant qu'on trouvera dans [11].

Lemme 4.1. *Soit k un entier positif ; on range les 2^k diviseurs de $n=p_1p_2\dots p_k$ par ordre croissant : $1=d_1<d_2<\dots<d_{2^k}=n$. Alors, pour tout i, $1\leqslant i\leqslant 2^k-1$, on a $d_{i+1}\leqslant 2d_i$.*

Preuve de (4.2). On applique le lemme 3.5 avec $A=\log n$ et

$$k=\left\lfloor \kappa\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\right\rfloor \tag{4.4}$$

où κ est une constante positive satisfaisant

$$\kappa<\rho a^{1/\rho}=1.82\dots \tag{4.5}$$

et a est défini en (2.12). Par le lemme 3.5 le maximum de F est atteint en

$$\underline{x}^\star=\left(x_1^\star,x_2^\star,\dots,x_k^\star\right)\quad\text{avec } x_i^\star=\frac{a_k\log n}{p_i^{\rho_k}-1},\ i=1,2,\dots,k, \tag{4.6}$$

où les a_k sont donnés par (2.12). On rappelle que, par (3.12),

$$\sum_{i=1}^{k}x_i^\star\log p_i=\log n. \tag{4.7}$$

Lorsque $n\to\infty$, on a, en utilisant la décroissance de (a_k) (cf. lemme 2.14), puis (4.4) pour obtenir un équivalent de k,

$$x_1^\star>x_2^\star>\dots>x_k^\star=\frac{a_k\log n}{p_k^{\rho_k}-1}>\frac{a\log n}{p_k^{\rho}}\sim\frac{a\log n}{(k\log k)^{\rho}}\sim\frac{a\rho^\rho}{\kappa^\rho}>1, \tag{4.8}$$

la dernière inégalité provenant de (4.5).

Construction de m. k étant défini par (4.4) et $\underline{x}^\star$ par (4.6) on pose $m_0=\prod_{i=1}^k p_i^{\lfloor x_i^\star\rfloor}$. Par (4.7) on a

$$\frac{n}{p_1p_2\dots p_k}=\prod_{i=1}^{k}p_i^{x_i^\star-1}<m_0\leqslant\prod_{i=1}^{k}p_i^{x_i^\star}=n.$$

Soit d le plus grand diviseur de $p_1 p_2 \dots p_k$ vérifiant $d \leqslant n/m_0 < p_1 p_2 \dots p_k$. On pose $m = m_0 d$. Par définition de d et par le lemme 4.1 on a $n/m_0 < 2d$, et donc

$$1 \leqslant \frac{n}{m} = \frac{n}{m_0 d} < 2. \tag{4.9}$$

On écrit $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\varepsilon_i}$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. On a alors

$$m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \tag{4.10}$$

avec

$$\alpha_i = \lfloor x_i^\star \rfloor + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}. \tag{4.11}$$

Avec (4.8), (4.11) donne

$$1 \leqslant \lfloor x_i^\star \rfloor \leqslant \alpha_i \leqslant \lfloor x_i^\star \rfloor + 1 \leqslant x_i^\star + 1 \leqslant 2x_i^\star, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{4.12}$$

et, par (4.9), (4.7) et (4.10) il vient

$$-\log 2 \leqslant \log \frac{m}{n} = \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i - x_i^\star\right) \log p_i \leqslant 0. \tag{4.13}$$

Fin de la preuve de (4.2). La formule de Taylor et l'expression (3.5) de la forme quadratique dérivée seconde de F donnent

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}) = F(\underline{x}^\star) + \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i - x_i^\star\right) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^\star) + \frac{c(\underline{\xi})}{T(\underline{\xi})} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - x_i^\star}{c(\underline{\xi}) + \xi_i} \right)^2 \\ - \sum_{i=1}^{k} \frac{c(\underline{\xi})(\alpha_i - x_i^\star)^2}{\xi_i (c(\underline{\xi}) + \xi_i)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

avec, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\xi_i = \theta \alpha_i + (1 - \theta) x_i^\star$, $0 < \theta < 1$ et $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Par (4.12) on a

$$\xi_i \geqslant \theta \lfloor x_i^\star \rfloor + (1 - \theta) \lfloor x_i^\star \rfloor = \lfloor x_i^\star \rfloor \geqslant 1. \tag{4.15}$$

Par (4.11), le quatrième terme du second membre de (4.14) satisfait donc

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{c(\underline{\xi})(\alpha_i - x_i^\star)^2}{\xi_i (c(\underline{\xi}) + \xi_i)} \geqslant -\sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i - x_i^\star\right)^2 \geqslant -k. \tag{4.16}$$

Le troisième terme est positif. Le second terme, par (3.13), (4.13) puis le lemme 2.3 satisfait

$$\sum_{i=1}^{k}\bigl(\alpha_i - x_i^\star\bigr)\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^\star) = \rho_k \sum_{i=1}^{k}\bigl(\alpha_i - x_i^\star\bigr)\log p_i = \rho_k \log\frac{m}{n}$$
$$\geqslant -\rho_k \log 2 \geqslant -\rho\log 2. \tag{4.17}$$

De (4.14), (4.16) et (4.17) on déduit

$$F(\underline{\alpha}) \geqslant F(\underline{x}^\star) - \rho\log 2 - k. \tag{4.18}$$

Vue la décomposition en facteurs premiers de m (4.10), l'encadrement (3.25) donne

$$\log K(m) \geqslant F(\underline{\alpha}) - k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i + \log C_3. \tag{4.19}$$

Avec (4.18) cela donne

$$\log K(m) \geqslant F(\underline{x}^\star) - 2k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i + \log C_3 - \rho\log 2. \tag{4.20}$$

Par (3.16) il vient

$$F(\underline{x}^\star) = \rho\log n - (\rho - \rho_k)\log n, \tag{4.21}$$

d'où

$$\log K(m) \geqslant \rho\log n - (\rho - \rho_k)\log n - 2k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i + \log C_3 - \rho\log 2. \tag{4.22}$$

Il reste à montrer que, à part $\rho\log n$, les termes du second membre de (4.22) sont tous des $O(\log(n)^{1/\rho}/\log\log n) = O(k)$. Pour le terme $(\rho - \rho_k)\log n$ cela résulte de l'équivalence (2.13) et de (4.4). Il reste donc à démontrer que $\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i$ est un $O(k)$ c'est-à dire que $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i$ est un $O(1)$ lorsque k tend vers l'infini. Par (4.12),

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\bigl(2x_i^\star\bigr) \leqslant \log 2 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log x_i^\star.$$

Vu le lemme suivant, cela termine la preuve de (4.2) et du théorème 3. $\square$

Lemme 4.2. *Avec le choix de k,* (4.4)*, on a, lorsque n tend vers l'infini*

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log x_i^\star = O(1).$$

Démonstration. Puisque $A = \log n$, la formule (4.6) donne

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log x_i^\star = \log a_k + \log\log n - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\bigl(p_i^{\rho_k} - 1\bigr)$$
$$= \log a_k + \log\log n - \sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_k}{k}\log p_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log\biggl(1 - \frac{1}{p_i^{\rho_k}}\biggr)$$
$$= \log\log n - \frac{\rho_k}{k}\sum_{i=1}^{k}\log p_i + O(1).$$

En utilisant le développement asymptotique de p_k (cf. [22], §57)

$$p_k = k\bigl(\log k + \log\log k + O(1)\bigr)$$

et le théorème des nombres premiers sous la forme $\sum_{p\leqslant x}\log p = x + O(x/\log x)$ (cf. [6], théorème 4.7) on obtient

$$\sum_{i=1}^{k}\log p_i = p_k + O\biggl(\frac{p_k}{\log p_k}\biggr) = k\bigl(\log k + \log\log k + O(1)\bigr).$$

D'où

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log x_i^\star = \log\log n - \rho_k[\log k + \log\log k] + O(1). \tag{4.23}$$

En notant $\log_3 x = \log\log\log x$, il résulte de la définition (4.4) de k que

$$\log k = \frac{1}{\rho}\log\log n - \log_3 n + O(1), \qquad \log\log k = \log_3 n + O(1),$$

et $\rho(\log k + \log\log k) = \log_2 n + O(1)$. Avec (4.23) cela donne

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log x_i^\star = (\rho - \rho_k)(\log k + \log\log k) + O(1) = O(1)$$

car, par l'équivalence (2.13), $(\rho - \rho_k)(\log k + \log\log k)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. $\square$

5. Propriétés des nombres K-champions

Comme la fonction K ne dépend que des exposants de la décomposition en facteurs premiers de n, il est clair que tout nombre K-champion N est de la forme

$$N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{avec } \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 1, \tag{5.1}$$

avec, par (1.7), $k = \omega(N)$. Il résulte de l'inégalité (4.2) du théorème 3 que

$$\limsup_{n\to\infty} K(n) = +\infty,$$

et donc il existe une infinité de nombres K-champions. $K(n)$ est le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$n = d_1 d_2 \dots d_r$$

aux inconnues $d_1, d_2, \dots, d_r$ plus grandes que 1. Chaque telle factorisation de n donne une factorisation non triviale de $2n$, $2n = 2d_1 d_2 \dots d_r$. Comme $2n$ admet aussi la factorisation triviale $2n = (2n)$, on a, pour $n \geqslant 2$, $K(2n) > K(n)$. Il en résulte que si l'on range les nombre K-champions dans l'ordre croissant

$$N_1 = 1 < N_2 = 4 < N_3 = 6 < \cdots < N_i < N_{i+1} < \cdots \tag{5.2}$$

on a

$$N_{i+1} \leqslant 2N_i. \tag{5.3}$$

5.1. Encadrement de $\omega(N)$

Théorème 4.

1. *Soit N un nombre K-champion assez grand. Alors*

$$\log K(N) \geqslant \rho \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \tag{5.4}$$

   où ρ est défini en (2.11) *et C_6 dans le théorème* 3.
2. *De plus, il existe trois constantes positives C_7, C_8 et N_0 telles que, pour tout K-champion $N \geqslant N_0$, on ait*

$$C_7 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \leqslant \omega(N) \leqslant C_8 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}. \tag{5.5}$$

Preuve de (5.4). Pour le premier point, on utilise l'inégalité (4.2) du théorème 3. Il existe $m \leqslant N$ vérifiant $K(m) \geqslant \rho \log N - C_6 (\log N)^{1/\rho} / \log\log N$. Puisque N est un K-champion, on a $K(N) \geqslant K(m)$.

Preuve de (5.5). Posons $k = \omega(N)$. L'inégalité (3.25) donne

$$\begin{aligned}\log K(N) &\leqslant \rho_k \log N - k\frac{\log\pi}{2} + \log C_4 \\ &\leqslant \rho \log N - (\rho - \rho_k)\log N - k\frac{\log\pi}{2} + \log C_4.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Vue (5.4) cela donne, quand $N \to +\infty$,

$$(\rho - \rho_k)\log N \leqslant C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} + \log C_4 \leqslant C_6\bigl(1 + o(1)\bigr)\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}. \tag{5.7}$$

Par l'équivalence (2.13), il existe donc $C > 0$ tel que,

$$k^{\rho-1}(\log k)^{\rho} \geqslant C(\log N)^{1-1/\rho}\log\log N. \tag{5.8}$$

Mais la fonction $y = f(t) = t^{\rho-1}(\log t)^{\rho}$ tend vers l'infini avec t, et est croissante pour $t \geqslant 1$. Sa fonction réciproque satisfait

$$f^{-1}(y) \sim (\rho - 1)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\left(\frac{y}{(\log y)^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \asymp \left(\frac{y}{(\log y)^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \quad (y \to \infty)$$

et (5.8) entraîne

$$k \geqslant f^{-1}\bigl(C(\log N)^{1-\frac{1}{\rho}}\log\log N\bigr) \asymp \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}.$$

Ceci donne la minoration de $k = \omega(N)$ dans (5.5). La comparaison de (5.6) et (5.4) donne aussi

$$k\frac{\log \pi}{2} \leqslant C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} + \log C_4 \ll \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}$$

d'où l'on déduit la majoration de $\omega(N)$ dans (5.5). □

Lemme 5.1. *Soit N un nombre K-champion dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par* (5.1). *On applique le lemme* 3.5 *avec $k = \omega(N)$ et $A = \log N$. Soit $\underline{x}^\star$ défini par* (3.15). *Alors, lorsque $N \to +\infty$, on a*

$$\log p_k \sim \frac{1}{\rho}\log\log N, \quad \textit{où } \rho \textit{ est défini en } (2.11), \tag{5.9}$$

et

$$\sum_{i=1}^{k}\bigl|\alpha_i - x_i^\star\bigr|\log p_i = O\bigl((\log N)^{\delta}\bigr) \quad \textit{avec } \delta = (1 + 1/\rho)/2 = 0.789243\ldots. \tag{5.10}$$

Démonstration. L'inégalité (5.4) du théorème 4 et $\rho \geqslant \rho_k$ (cf. lemme 2.13) donnent

$$\log K(N) \geqslant \rho\log N - C_6\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \geqslant \rho_k\log N - C_6\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}. \tag{5.11}$$

L'équation (3.16) du lemme 3.5 donne $F(\underline{x}^\star) = \rho_k \log N$. Appliquons maintenant le lemme 3.6, avec $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. La majoration (3.17) s'écrit

$$F(\underline{\alpha}) \leqslant \rho_k \log N - \frac{1}{4 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left| \alpha_i - x_i^\star \right| \log p_i \right)^2. \tag{5.12}$$

Par l'encadrement (5.5) du théorème 4, $k = \omega(N)$ tend vers l'infini avec N. En utilisant (3.25), il en résulte que, pour N assez grand,

$$\log K(N) \leqslant F(\underline{\alpha}) + \log C_4 - \frac{k}{2} \log \pi \leqslant F(\underline{\alpha}).$$

Cette inégalité, avec (5.11) et (5.12) donne

$$\frac{1}{4 \log N \, \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left| \alpha_i - x_i^\star \right| \log p_i \right)^2 \leqslant C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N}. \tag{5.13}$$

Par les inégalités (5.5) du théorème 4, $k = \omega(N) \asymp \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N}$, ce qui entraîne, lorsque $N \to +\infty$,

$$\log p_k \sim \log(k \log k) \sim \log k \sim \frac{1}{\rho} \log \log N$$

et cela prouve (5.9). De (5.13) et (5.9) on déduit

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left| \alpha_i - x_i^\star \right| \log p_i = O\big((\log N)^\delta \big) \tag{5.14}$$

avec δ donné par (5.10). Pour prouver que $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - x_i^\star| \log p_i = O((\log N)^\delta)$, ce qui terminera la preuve du lemme, il reste à vérifier que $|(\alpha_k - x_k^\star) \log p_k| = O((\log N)^\delta)$. La définition $A = \log N$ et (3.12) donnent

$$\log N = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^\star \log p_i.$$

Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{k} \big(\alpha_i - x_i^\star \big) \log p_i = 0 \tag{5.15}$$

et donc, avec (5.14), $|(\alpha_k - x_k^\star) \log p_k| \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^\star| \log p_i = O((\log N)^\delta)$. $\square$

5.2. Exposants des petits facteurs premiers

Théorème 5. *Soit N un nombre K-champion dont la décomposition en facteurs premiers est donnée par* (5.1)*, et ρ et a définis en* (2.11) *et* (2.12)*. Lorsque $N \to +\infty$, on a*

$$\Omega(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = b \log N + O\big((\log N)^\delta\big), \tag{5.16}$$

avec δ défini en (5.10)*,*

$$\beta_i = \frac{a}{p_i^\rho - 1} \quad et \quad b = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i = 0.8612985\ldots. \tag{5.17}$$

De plus, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on a uniformément en i,

$$\alpha_i = \beta_i \log N + O\left(\frac{(\log N)^\delta}{\log p_i}\right). \tag{5.18}$$

Démonstration de (5.16). Pour prouver (5.16) il suffit de démontrer la majoration un peu plus forte

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i \log N| + \sum_{i=k+1}^{+\infty} \beta_i \log N = O\big((\log N)^\delta\big). \tag{5.19}$$

On applique le lemme 3.5 avec $k = \omega(N)$ et $A = \log N$. On écrit alors,

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i \log N| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \big|\alpha_i - x_i^\star\big| + \sum_{i=1}^{k} \big|x_i^\star - \beta_i \log N\big|$$

où les $x_i^\star$ sont définis par (3.15). Le lemme 5.1 donne

$$\sum_{i=1}^{k} \big|\alpha_i - x_i^\star\big| \leqslant O\big((\log N)^\delta\big). \tag{5.20}$$

En utilisant le lemme 2.15 (car, par (5.5), $k \geqslant 2$)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \big|x_i^\star - \beta_i \log N\big| &= \log N \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{a_k}{p_i^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p_i^\rho - 1}\right| \\ &\leqslant C_9 \frac{\log N}{(k \log k)^{\rho - 1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_2}} = O\left(\frac{\log N}{k^{\rho-1}}\right).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Par la minoration (5.5) de $\omega(N) = k$, il vient

$$\frac{\log N}{k^{\rho-1}} = O\big((\log N)^{1/\rho} (\log\log N)^{\rho-1}\big) = O\big((\log N)^\delta\big) \tag{5.22}$$

car $1/\rho < \delta$. Il vient ensuite

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \beta_i = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{a}{p_i^\rho - 1} \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2a}{p_i^\rho} \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2a}{i^\rho} \leqslant \int_k^\infty \frac{2a\,dt}{t^\rho} = \frac{2a}{(\rho-1)k^{\rho-1}} \tag{5.23}$$

ce qui, avec (5.21) et (5.22) complète la preuve de (5.19) et (5.16).

Démonstration de (5.18). Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$, on a

$$|\alpha_i - \beta_i \log N| \leqslant \left|\alpha_i - x_i^\star\right| + \left|x_i^\star - \beta_i \log N\right|. \tag{5.24}$$

Par le lemme 5.1 on a

$$\left|\alpha_i - x_i^\star\right| \ll \frac{1}{\log p_i} (\log N)^\delta. \tag{5.25}$$

Les définitions (3.15) et (5.17) de β_i et $x_i^\star$ et le lemme 2.15 donnent, pour tout i,

$$\left|x_i^\star - \beta_i \log N\right| \leqslant C_9 \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_2}} \frac{\log N}{(k \log k)^{\rho-1}} = \frac{1}{\log p_i} O\left(\frac{\log N}{k^{\rho-1}}\right).$$

En utilisant (5.22), il vient

$$\left|x_i^\star - \beta_i \log N\right| \ll \frac{1}{\log p_i} (\log N)^\delta,$$

qui, avec (5.25) et (5.24), termine la preuve de (5.18). □

5.3. Exposants des grands facteurs premiers

Lemme 5.2. *Soit $N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ un K-champion tendant vers l'infini, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, et δ défini par* (5.10).

1. *Soit $a = 1.100020011\ldots$ la constante définie en* (2.12) ; *alors*

$$c(\underline{\alpha}) = a \log N + O\big((\log N)^\delta\big). \tag{5.26}$$

2. *Soit $T_0 = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{p_j^\rho} = 0.62035\ldots$. Alors on a*

$$T(\underline{\alpha}) = T_0 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big). \tag{5.27}$$

3. *Soit $B_0 = \sqrt{\frac{2a}{T_0}} = 1.883\ldots$. Alors on a*

$$\mathbf{B}(\underline{\alpha}) = B_0 \sqrt{\log N}\big(1 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big)\big). \tag{5.28}$$

4.

$$K(N) = B_0 \sqrt{\pi} \sqrt{\log N}\, \mathbf{A}(\underline{\alpha}) \big(1 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big)\big). \tag{5.29}$$

Démonstration de (5.26). Soit $\underline{\beta} = (\beta_i)_{i \geqslant 1}$ où les β_i sont définis en (5.17). L'égalité (2.2), le lemme 2.6 et la majoration (5.19) donnent

$$\begin{aligned}\left|c(\underline{\alpha}) - c(\underline{\beta}) \log N\right| &= \left|c(\underline{\alpha}) - c(\underline{\beta} \log N)\right| \\ &\leqslant 2 \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i \log N| + 2 \sum_{i=k+1}^{+\infty} \beta_i \log N = O\big((\log N)^{\delta}\big).\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $c(\underline{\beta}) = a$. Or, par définition de ρ,

$$2 = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^{\rho}}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i^{\rho}}{p_i^{\rho} - 1} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_i^{\rho} - 1}\right).$$

Par la formule (2.1) qui définit c, cela s'écrit $c(\frac{1}{2^{\rho}-1}, \frac{1}{3^{\rho}-1}, \ldots) = 1$. Puisque $\beta_i = a/(p_i^{\rho} - 1)$, on obtient $c(\underline{\beta}) = a$ en multipliant les deux termes de cette égalité par a (grâce à (2.2)).

Démonstration de (5.27). Par la défintion (5.17), on a $\beta_i/(a + \beta_i) = 1/p_i^{\rho}$. L'estimation (5.18), où le $O((\log N)^{\delta-1})$ est uniforme en i, et (5.26) donnent alors

$$\begin{aligned}T(\underline{\alpha}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{c(\underline{\alpha}) + \alpha_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i \log N(1 + O((\log N)^{\delta-1}))}{(a + \beta_i) \log N(1 + O((\log N)^{\delta-1}))} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\rho}}\big(1 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big)\big) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\rho}} + O\big((\log N)^{\delta-1}\big) \\ &= T_0 - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\rho}} + O\big((\log N)^{\delta-1}\big),\end{aligned}$$

ce qui prouve (5.27), car, par (5.22) et (5.23), on a

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\rho}} = O\left(\frac{1}{k^{\rho-1}}\right) = O\big((\log N)^{\delta-1}\big).$$

Démonstration de (5.28). La formule (5.28) est une conséquence de la définition (2.8) de **B**, de (5.26) et de (5.27).

Démonstration de (5.29). Choisissant $\eta = 1 - \delta$ dans le théorème 1 (théorème de Evans) on obtient

$$K(N) = \sqrt{\pi}\,\mathbf{B}(\underline{\alpha})\mathbf{A}(\underline{\alpha})\big(1 + O\big(\big(\Omega(N)\big)^{\delta-1}\big)\big).$$

On conclut avec (5.28) et (5.16). $\square$

Définition 5.3. Soit $N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ un K-champion tendant vers l'infini, et M un entier dépendant de N, $M = 2^{\alpha'_1} 3^{\alpha'_2} \dots p_{k'}^{\alpha'_k}$, avec $\alpha'_i \geqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k'$. On pose $\underline{\alpha}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{k'})$, et $\mu = \delta - 1/\rho = 0.210\dots$. On dira que M est *voisin* de N si, avec la notation 1,

$$\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\big((\log N)^{\mu}\big) = O\big((\log N)^{\delta - 1/\rho}\big).$$

Lemme 5.4. *Si $M = 2^{\alpha'_1} 3^{\alpha'_2} \dots p_{k'}^{\alpha'_k}$ est un voisin de N, on a*

$$\log M = \log N + O\big((\log N)^{\delta}\big). \tag{5.30}$$

$$\Omega(M) = b \log N + O\big((\log N)^{\delta}\big), \qquad \alpha'_i = \beta_i \log N + O\big((\log N)^{\delta}\big) \quad (1 \leqslant i \leqslant k'). \tag{5.31}$$

Démonstration de (5.30). Posons $k_1 = \max(k, k')$. On a

$$\begin{aligned} |\log M - \log N| &= \left| \sum_{i=1}^{k_1} \big(\alpha'_i - \alpha_i\big) \log p_i \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k_1} \big|\alpha'_i - \alpha_i\big| \log p_i \leqslant \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| \log p_{k_1}. \end{aligned}$$

Par (5.5), $k = \omega(N) = O(\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N})$. Puisque M est voisin de N, on a $0 \leqslant k_1 - k \ll (\log N)^{\mu}$. Par (5.5), on a donc $k_1 = \omega(N) + O((\log N)^{\mu}) = O(\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N})$. Par le théorème des nombres premiers $p_{k_1} \sim k_1 \log k_1 = O((\log N)^{1/\rho})$, et, par hypothèse, $\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O((\log N)^{\delta - 1/\rho})$, d'où (5.30).

Démonstration de (5.31). L'égalité (5.16) et la majoration évidente

$$\big|\Omega(M) - \Omega(N)\big| \leqslant \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\big((\log N)^{\delta}\big)$$

donnent la première égalité dans (5.31). Pour i satisfaisant $i \leqslant \min(k, k')$, l'estimation (5.18) et $|\alpha'_i - \alpha_i| \leqslant \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O((\log N)^{\delta})$ donnent la deuxième égalité. Lorsque $k < i \leqslant k'$, on écrit

$$\big|\alpha'_i - \beta_i \log N\big| \leqslant \alpha'_i + \beta_i \log N \leqslant \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| + \beta_i \log N.$$

On termine en remarquant que $\beta_i = \frac{a}{p_k^{\rho} - 1} \leqslant \frac{2a}{p_k^{\rho}} = O(\frac{1}{(\log N)^{1+o(1)}})$, vu (5.9). $\square$

Le lemme 5.5 ci-dessous étend aux voisins d'un champion les propriétés des nombres K-champions énoncées dans le lemme 5.2.

Lemme 5.5. *Avec les notations de la définition 5.3, soit N un K-champion qui tend vers l'infini et $M = 2^{\alpha'_1 \alpha'_1} 3^{\alpha'_2} \dots p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$ un voisin de N, et $\underline{\alpha}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{k'})$ (ou plus généralement, $\underline{\alpha}' \in \mathbb{R}_+^{\star k'}$ avec $\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O((\log N)^{\mu})$). Soit δ, a, T_0 et B_0 les constantes figurant dans le lemme 5.2. Alors on a*

1. $$c(\underline{\alpha}') = a \log N + O\big((\log N)^{\delta}\big), \tag{5.32}$$

2. $$T(\underline{\alpha}') = T_0 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big), \tag{5.33}$$
3. $$\mathbf{B}(\underline{\alpha}') = B_0\sqrt{\log N}\big(1 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big)\big), \tag{5.34}$$
4. $$K(M) = B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\,\mathbf{A}(\underline{\alpha}')\big(1 + O\big((\log N)^{\delta-1}\big)\big). \tag{5.35}$$

Démonstration de (5.32). Vu (5.26), il suffit de montrer que $|c(\underline{\alpha}') - c(\underline{\alpha})| = O((\log N)^{\delta})$. Le lemme 2.6 et la définition 5.3 donnent

$$\big|c(\underline{\alpha}') - c(\underline{\alpha})\big| \leqslant 2\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\big((\log N)^{\delta}\big).$$

Démonstration de (5.33). Vu (5.27), il suffit de montrer que $|T(\underline{\alpha}') - T(\underline{\alpha})| = O((\log N)^{\delta-1})$. Le lemme 2.7 donne

$$\big|T(\underline{\alpha}') - T(\underline{\alpha})\big| \leqslant 3\frac{\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\|}{\max(\Omega(N), \Omega(M))}.$$

Par (5.16) et (5.31) on a $\Omega(M) \sim \Omega(N) \sim a\log N$, et avec la définition 5.3, on en déduit

$$\big|T(\underline{\alpha}') - T(\underline{\alpha})\big| = O\left(\frac{(\log N)^{\delta}}{\log N}\right) = O\big((\log N)^{\delta-1}\big).$$

Démonstration de (5.34). La formule (5.34) se déduit de la définition (2.8) de **B**, de (5.32) et de (5.33).

Démonstration de (5.35). En choisissant $\eta = 1 - \delta$ dans le théorème 1 on obtient

$$K(M) = \sqrt{\pi}\mathbf{B}(\underline{\alpha}')\mathbf{A}(\underline{\alpha}')\big(1 + O\big(\big(\Omega(M)\big)^{\delta-1}\big)\big).$$

On conclut avec (5.34) et (5.31). □

Lemme 5.6. *Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ un K-champion tendant vers l'infini et $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$. Soit alors $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{\star\ell}$ dépendant de N, tel que $\|\underline{x} - \underline{\alpha}\| = O((\log N)^{\delta})$. Alors, pour tout i tel que $p_i^{\rho} = o((\log N)^{1-\delta})$ on a*

$$\frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i} = \rho\log p_i + O\big(p_i^{\rho}(\log N)^{\delta-1}\big). \tag{5.36}$$

Démonstration. Par (5.17), on a $\beta_i \asymp \frac{1}{p_i^{\rho}}$. Par le lemme 2.6, (5.18), (5.26) et la définition de β_i dans (5.17), il vient

$$\begin{aligned}\frac{c(\underline{x}) + x_i}{x_i} &= \frac{c(\underline{\alpha}) + \alpha_i + O((\log N)^{\delta})}{\alpha_i + O((\log N)^{\delta})}\\ &= \frac{a\log N + \beta_i\log N + O((\log N)^{\delta})}{\beta_i\log N + O((\log N)^{\delta})}\\ &= \frac{(a + \beta_i)(1 + O((\log N)^{\delta-1}))}{\beta_i(1 + O(p_i^{\rho}(\log N)^{\delta-1}))}\end{aligned}$$

$$= p_i^\rho\bigl(1 + O\bigl(p_i^\rho(\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr),$$

et donc, par la formule (3.2),

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = \log\bigl(p_i^\rho\bigl(1 + O\bigl(p_i^\rho(\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr)\bigr) = \rho\log p_i + O\bigl(p_i^\rho(\log N)^{\delta-1}\bigr). \qquad \square$$

Le lemme précédent précise la variation de $F(\underline{\alpha})$ lorsque on multiplie un champion $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}$ par un petit facteur premier. Le lemme suivant précise la variation de $F(\underline{\alpha}')$ lorsque l'on multiplie $M' = 2^{\alpha'_1}3^{\alpha'_2}\dots p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$, voisin d'un champion, par un grand facteur premier.

Lemme 5.7. *Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ un K-champion tendant vers l'infini et $M' = 2^{\alpha'_1}3^{\alpha'_2}\dots p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$ un voisin de N. Soit i un indice tel que $p_i^\rho \gg (\log N)^{1-\delta}$ et $i \leqslant k'+1$. Soit $M'' = M'p_i = 2^{\alpha''_1}3^{\alpha''_2}\dots p_{k''}^{\alpha''_{k''}}$ avec $k'' = \max(i, k')$. En posant $\underline{\alpha}'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_{k''})$ et $\underline{\alpha}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{k'})$. Lorsque $i = k'+1$, on pose $\alpha'_{k'+1} = 0$ et $\underline{\alpha}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{k'}, 0)$. On a alors*

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') = {} & 1 + \log a + \log\log N \\ & - \bigl(\alpha'_i + 1\bigr)\log\bigl(\alpha'_i + 1\bigr) + \alpha'_i\log\alpha'_i + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr) \end{aligned} \tag{5.37}$$

en convenant que $\alpha'_i\log\alpha'_i = 0$ pour $\alpha'_i = 0$.

Démonstration. Commençons par remarquer que M'' est aussi un voisin de M.

1. Il résulte de $p_i^\rho \gg (\log N)^{1-\delta}$, de (5.18) et de la définition 5.3 que l'on a

$$\alpha'_i = O\bigl((\log N)^\delta\bigr). \tag{5.38}$$

Notons $c'' = c(\underline{\alpha}'')$ et $c' = c(\underline{\alpha}')$. Montrons que

$$c'' - c' = \frac{1}{T_0} + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr). \tag{5.39}$$

On considère la fonction $G(t)$ définie par $G(t) = c(\underline{\alpha}' + t(\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}'))$. Elle est dérivable et, par le théorème des accroissements finis, $c'' - c' = G(1) - G(0) = G'(t)$, avec $t \in]0,1[$. Notons $\underline{\gamma} = \underline{\alpha}' + t(\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}')$. Par le lemme 2.3, (5.32), (5.33) et (5.38) il vient

$$\begin{aligned} G'(t) = \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i}(\underline{\gamma}) &= \frac{1}{T(\underline{\gamma})}\frac{c(\underline{\gamma})}{c(\underline{\gamma}) + \alpha'_i + t} \\ &= \frac{1}{T_0 + O((\log N)^{\delta-1})}\frac{a\log N + O((\log N)^\delta)}{a\log N + O((\log N)^\delta)} \\ &= \frac{1}{T_0} + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr) \end{aligned}$$

ce qui démontre (5.39).

2. Ecrivons, par la définition 3.1

$$F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') = \sum_{j=1, j\neq i}^{k''} \alpha'_j \log \frac{c'' + \alpha'_j}{\alpha'_j} - \sum_{j=1, j\neq i}^{k''} \alpha'_j \log \frac{c' + \alpha'_j}{\alpha'_j}$$
$$+ (\alpha'_i + 1) \log\left(\frac{c'' + \alpha'_i + 1}{\alpha'_i + 1}\right) - \alpha'_i \log\left(\frac{c' + \alpha'_i}{\alpha'_i}\right)$$

soit

$$F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') = S_1 + S_2 + \alpha'_i \log \alpha'_i - \left(\alpha'_i + 1\right) \log\left(\alpha'_i + 1\right) \tag{5.40}$$

avec

$$S_1 = \sum_{j=1, j\neq i}^{k''} \alpha'_j \log\left(1 + \frac{c'' - c'}{c' + \alpha'_j}\right) \tag{5.41}$$

et

$$S_2 = \left(\alpha'_i + 1\right) \log\left(c'' + \alpha'_i + 1\right) - \alpha'_i \log\left(c' + \alpha'_i\right). \tag{5.42}$$

Par (5.31) et (5.32), $c' + \alpha'_j \asymp \log N$, ce qui entraîne par (5.39),

$$\log\left(1 + \frac{c'' - c'}{c' + \alpha'_j}\right) = \frac{c'' - c'}{c' + \alpha'_j} + \frac{O(1)}{(\log N)^2} = \frac{1}{T_0} \frac{1}{c' + \alpha'_j} + O\left((\log N)^{\delta - 2}\right).$$

Il en résulte que

$$S_1 = \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha'_j \log \frac{c'' + \alpha'_j}{c' + \alpha'_j}$$
$$= \frac{1}{T_0} \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\alpha'_j}{c' + \alpha'_j} + \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha'_j\right) O\left((\log N)^{\delta - 2}\right).$$

Puis, en utilisant (2.5), (5.33), (5.31) et (5.38)

$$S_1 = \frac{1}{T_0}\left(T(\underline{\alpha}') - \frac{\alpha'_i}{c' + \alpha'_i}\right) + \left(\Omega(M') - \alpha'_i\right) O\left((\log N)^{\delta - 2}\right)$$
$$= 1 + O\left((\log N)^{\delta - 1}\right). \tag{5.43}$$

3. La définition (5.42) de S_2 donne

$$S_2 = \log\bigl(c'' + \alpha'_i + 1\bigr) + \alpha'_i \log \frac{c'' + \alpha'_i + 1}{c' + \alpha'_i}$$
$$= \log\bigl(c'' + \alpha'_i + 1\bigr) + \alpha'_i \log\left(1 + \frac{c'' - c' + 1}{c' + \alpha'_i}\right).$$

Avec (5.32), (5.39) et (5.38) on en déduit

$$S_2 = \log\bigl(a \log N\bigl(1 + O(\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr) + O\bigl((\log N)^{\delta}\bigr) O\bigl((\log N)^{-1}\bigr)$$
$$= \log a + \log\log N + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr).$$

Avec (5.40) et (5.43) on en déduit (5.37). □

Lemme 5.8. *Soit $N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ un K-champion tendant vers l'infini et $M' = 2^{\alpha'_1} 3^{\alpha'_2} \ldots p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$ un voisin de N.*

1. *Soit p_i un nombre premier tel que $p_i = O((\log N)^{\eta})$, avec*

$$O \leqslant \eta < \frac{1-\delta}{\rho} = 0.12192\ldots. \tag{5.44}$$

Soit u petit entier, $u = O((\log\log N))$, et $M'' = p_i^u M'$. Alors, lorsque N tend vers l'infini,

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = p_i^{\rho u}\left(1 + O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\delta-\eta\rho}}\right)\right). \tag{5.45}$$

2. *Si $p_i \gg (\log N)^{(1-\delta)/\rho}$ et $i \leqslant k' + 1$ alors, lorsque $N \to \infty$, on a, en posant $\alpha'_{k'+1} = 0$,*

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = \frac{a \log N}{\alpha'_i + 1}\bigl(1 + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr). \tag{5.46}$$

Démonstration.

1. Posons $\alpha''_j = \alpha'_j$ pour $j \neq i$, $\alpha''_i = \alpha'_i + u$ et $\underline{\alpha}'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \ldots, \alpha''_{k'})$. Comme M'' et M' sont des voisins de N, par (5.35), il vient

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = \frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')}\bigl(1 + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr)$$

et, par (3.6), on a

$$\frac{A(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')} = \exp\bigl(F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}')\bigr)\frac{s(\alpha'_i)}{s(\alpha'_i + u)}. \tag{5.47}$$

Par (5.17) et l'hypothèse $p_i = O((\log N)^{\eta})$ on a

$$\beta_i = \frac{a}{p_i^{\rho} - 1} \geqslant \frac{a}{p_i^{\rho}} \gg \frac{a}{(\log N)^{\eta\rho}}.$$

Par (5.18), (5.44), et la définition 5.3, pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant u$, on a $\alpha_i' + j + 1 \gg (\log N)^{1-\eta\rho}$, puis par le lemme 3.4,

$$\frac{s(\alpha_i'+j)}{s(\alpha_i'+j+1)} = 1 - \frac{1}{2(\alpha_i'+j+1)} + O\left(\left(\frac{1}{\alpha_i'+j+1}\right)^2\right) = 1 + O\left(\frac{1}{(\log N)^{1-\eta\rho}}\right).$$

De $u = O(\log\log N)$ il résulte alors

$$\frac{s(\alpha_i')}{s(\alpha_i'+u)} = \prod_{j=0}^{u-1} \frac{s(\alpha_i'+j)}{s(\alpha_i'+j+1)} = 1 + O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\eta\rho}}\right)$$

quand N tend vers l'infini, et avec (5.47),

$$\frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')} = \exp\bigl(F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}')\bigr)\left(1 + O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\eta\rho}}\right)\right). \tag{5.48}$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $t \in \,]0,1[$, tel que

$$F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') = u\frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i}\bigl(\underline{\alpha}' + t(\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}')\bigr).$$

Puisque $\|\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}'\| = |u| = O(\log\log N)$, on en déduit avec (5.36)

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') &= u\rho\log p_i + O\bigl((\log\log N)p_i^{\rho}(\log N)^{\delta-1}\bigr) \\ &= u\rho\log p_i + O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\delta-\eta\rho}}\right), \end{aligned}$$

puis (5.45), à l'aide de (5.44).

2. Lorsque p_i est grand, on a, comme dans le point 1,

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = \frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')}\bigl(1 + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr)$$

et, par (5.37)

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') = 1 &+ \log a + \log\log N \\ &- \bigl(\alpha_i'+1\bigr)\log\bigl(\alpha_i'+1\bigr) + \alpha_i'\log\alpha_i' + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr). \end{aligned}$$

De cette égalité, et de (5.47) (avec $u = 1$), on déduit en utilisant (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')} &= \frac{a\log N}{\alpha_i'+1} e\left(\frac{\alpha_i'}{\alpha_i'+1}\right)^{\alpha_i'} \frac{s(\alpha_i')}{s(\alpha_i'+1)}\bigl(1 + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr) \\ &= \frac{a\log N}{\alpha_i'+1}\bigl(1 + O\bigl((\log N)^{\delta-1}\bigr)\bigr). \qquad \square \end{aligned}$$

Théorème 6. *Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ un K-champion.*

1. *Pour N suffisament grand, on a $\alpha_k = 1$.*
2. *Pour $j \geqslant 1$, un entier fixé. On désigne par P_j le plus grand nombre premier tel que P_j^j divise N (en particulier $P_1 = p_k$). Lorsque N tend vers l'infini*

$$P_j \sim \left(\frac{a\log N}{j}\right)^{\frac{1}{\rho}} \sim j^{-1/\rho}P_1. \tag{5.49}$$

3. *Lorsque N tend vers l'infini,*

$$\omega(N) \sim \rho a^{1/\rho}\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}. \tag{5.50}$$

Remarque. Le calcul des 761 premiers nombres K-champions laisse penser que le nombres de champions tels que $\alpha_k > 1$ est 111, et que le plus grand d'entre eux est le 390$^{\text{ème}}$ champion

$$N_{390} = 2^{28}3^{10}5^4 7^2 = 485432135516160000.$$

Démonstration du point 1. On suppose $\alpha_k \geqslant 2$ et on pose $M = N\frac{p_{k+1}p_{k+2}}{2p_{k-1}p_k}$. Lorsque N tend vers l'infini, k tend vers l'infini. Pour N suffisament grand on a donc $M < N$, et puisque N est un champion $K(M) < K(N)$. On pose $M^{(0)} = N$, $M^{(1)} = \frac{N}{p_k}$, $M^{(2)} = \frac{N}{p_{k-1}p_k}$, $M^{(3)} = \frac{Np_{k+1}}{p_{k-1}p_k}$, $M^{(4)} = \frac{Np_{k+1}p_{k+2}}{p_{k-1}p_k}$ et $M^{(5)} = M$. Ces nombres sont des voisins de N, et, par (5.5), on a $p_{k-1} > (\log N)^{(1-\delta)/\rho}$ pour N assez grand. En appliquant 5 fois le lemme 5.8, lorsque N tend vers l'infini, on a

$$1 > \frac{K(M)}{K(N)} = \prod_{i=0}^{4}\frac{K(M^{(i+1)})}{K(M^{(i)})} \sim \frac{\alpha_{k-1}\alpha_k}{2^\rho \times 1 \times 1}. \tag{5.51}$$

On a donc pour N assez grand $(\alpha_{k-1}\alpha_k)/2^\rho \lesssim 1$, et, a fortiori,

$$\alpha_k^2 \leqslant \alpha_{k-1}\alpha_k \lesssim 2^\rho = 3.314.$$

Puisque α_k est un entier, il est plus petit que 2, il y a contradiction.

Démonstration de (5.49). Soit i, dépendant de N, le plus grand indice tel que $\alpha_i \geqslant j$. Cet entier i est caractérisé par $\alpha_i \geqslant j > \alpha_{i+1}$. Notons $j' = \alpha_i$ et $j'' = \alpha_{i+1}$. D'après (5.18), il existe une constante C telle que $j > \alpha_{i+1} \geqslant \beta_{i+1}\log N - C(\log N)^\delta \geqslant \frac{a}{p_{i+1}^\delta}\log N - C(\log N)^\delta$. Cela implique $p_{i+1} \gg (\log N)^{(1-\delta)/\rho}$, et donc aussi $p_i \gg (\log N)^{(1-\delta)/\rho}$.

Le nombre $\log 3/\log 2$ étant irrationnel, si l'on ordonne l'ensemble des $2^u 3^v$ en une suite croissante (x_n), on a $\lim x_{n+1}/x_n = 1$. En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que, pour tout champion $N \geqslant N_\varepsilon$, il existe des entiers $u', v', u'', v'' \geqslant 0$ avec

$$(1-\varepsilon)p_i \leqslant 2^{u'}3^{v'} < p_i < p_{i+1} < 2^{u''}3^{v''} < p_{i+1}(1+\varepsilon) < p_i(1+2\varepsilon). \tag{5.52}$$

De l'encadrement ci-dessus, de $p_i \leqslant p_k$ et de (5.9) il résulte que

$$u', v', u'', v'' = O(\log\log N). \tag{5.53}$$

Soit

$$M' = N2^{u'}3^{v'}/p_i < N \quad \text{et} \quad M'' = N\frac{p_{i+1}}{2^{u''}3^{v''}} < N. \tag{5.54}$$

La majoration (5.53), avec (5.18) entraîne que, pour N assez grand, $u'' < \alpha_1$ et $v'' < \alpha_2$. Ainsi M' et M'' sont entiers. Comme N est un K-champion on a $K(M') < K(N)$ et $K(M'') < K(N)$. Par le lemme 5.8 on a, comme en (5.51)

$$\frac{K(M')}{K(N)} \sim \frac{2^{\rho u'}3^{\rho v'}j'}{a\log N} \quad \text{et} \quad \frac{K(M'')}{K(N)} \sim \frac{a\log N}{2^{\rho u''}3^{\rho v''}(j''+1)}.$$

Et donc, puisque $2^{u'}3^{v'} \geqslant (1-\varepsilon)p_i$,

$$(1-\varepsilon)^\rho p_i^\rho \frac{j'}{a\log N} \lesssim \frac{K(M')}{K(N)} < 1$$

soit

$$P_j = p_i \lesssim \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{a\log N}{j'}\right)^{\frac{1}{\rho}} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{a\log N}{j}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

De même, la majoration $K(M'')/K(N) < 1$ avec $2^{u''}3^{v''} \leqslant p_i(1+2\varepsilon)$ donne

$$P_j = p_i \gtrsim \frac{1}{(1+2\varepsilon)}\left(\frac{a\log N}{j''+1}\right)^{\frac{1}{\rho}} \geqslant \frac{1}{(1+2\varepsilon)}\left(\frac{a\log N}{j}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Démonstration de (5.50). Choisissant $j = 1$ dans (5.49) on obtient

$$p_k = P_1 \sim (a\log N)^{1/\rho},$$

puis, par le théorème des nombres premiers, $k\log k \sim (a\log N)^{1/\rho}$ et $\log k \sim \frac{1}{\rho}\log\log N$ et cela donne (5.50). □

Remarque. En utilisant les résultats connus sur les approximations diophantiennes de $\log 3/\log 2$ (cf. [27]), on peut rendre plus précises les inégalités (5.52) et obtenir un terme de reste pour les formules (5.49) et (5.50).

5.4. Estimation de $Q(X)$

Soit $Q(X)$ le nombre de K-champions au plus égaux à X. Par les propriétés (5.1) et (5.3), nous avons, comme en [11], paragraphe 6.4

$$\log X \ll Q(X) \leqslant \exp\left(\left(1+o(1)\right)\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\log X}{\log\log X}}\right)$$

et l'on peut montrer

Théorème 7.

1. *Pour X assez grand, on a*

$$Q(X) \geqslant (\log X)^{1.07}.$$

2. *Lorsque X tend vers l'infini*

$$\log Q(X) = O\left((\log X)^{\delta/2}\right)$$

où $\delta = 0.788\ldots$ a été défini en (5.10).

Démonstration de 1. La preuve est très voisine de celle de la proposition 7.1 de [11]. Soit N un nombre K-champion assez grand et $\eta = 3/40 = 0.075$. Notons que cela entraine $1-\delta-\eta\rho = 0.0811\ldots > \eta + 0.006$. On montre d'abord que le nombre K-champion N' suivant N vérifie

$$N' \leqslant N\left(1+\frac{2\eta\log\log N}{(\log N)^{\eta}}\right) \tag{5.55}$$

ce qui, comme dans [11], entraîne le point 1. Pour prouver (5.55) on observe que, pour N assez grand, il existe deux nombres premiers consécutifs p_r et p_{r+1} vérifiant (cf. [11])

$$(\log N)^{\eta} \leqslant p_r < p_r + 2 \leqslant p_{r+1} < 2(\log N)^{\eta} \tag{5.56}$$

et

$$p_r < p_r + 2 \leqslant p_{r+1} \leqslant p_r + 2\eta\log\log N. \tag{5.57}$$

On pose $M = \frac{p_{r+1}}{p_r}N$; on s'assure par (5.18) que l'exposant α_r de p_r dans N tend vers l'infini, et que N/p_r et M sont des voisins de N, puis, par l'égalité (5.45) du lemme 5.8

$$\frac{K(M)}{K(N)} = \left(\frac{p_{r+1}}{p_r}\right)^{\rho}\left(1+O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\delta-\eta\rho}}\right)\right) = \left(\frac{p_{r+1}}{p_r}\right)^{\rho}\left(1+\frac{O(1)}{(\log N)^{\eta+0.006}}\right). \tag{5.58}$$

Mais par (5.56),

$$\left(\frac{p_{r+1}}{p_r}\right)^{\rho} \geqslant \left(1+\frac{2}{p_r}\right)^{\rho} \geqslant \left(1+\frac{1}{(\log N)^{\eta}}\right)^{\rho} \geqslant 1+\frac{\rho}{(\log N)^{\eta}}$$

ce qui, avec (5.58), montre que $K(M) > K(N)$. Cela implique $N' \leqslant M$ et, par (5.57),

$$N' \leqslant M = N\frac{p_{r+1}}{p_r} \leqslant N\left(1 + \frac{2\eta \log\log N}{p_r}\right)$$

qui, avec (5.56), démontre (5.55).

Démonstration de 2. Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, et J un entier. On pose

$$T_J = T_J(N) = \sum_{i=J+1}^{k} \alpha_i.$$

Il résulte de (5.19) que $\sum_{i=J+1}^{k} |\alpha_i - \beta_i \log N| = O((\log N)^\delta)$, et cela implique

$$T_J = \sum_{i=J+1}^{k} \beta_i \log N + O\big((\log N)^\delta\big) = \left(\sum_{i=J+1}^{k} \frac{a}{p_i^\rho - 1}\right)\log N + O\big((\log N)^\delta\big).$$

Mais on a

$$\sum_{i=J+1}^{k} \frac{a}{p_i^\rho - 1} \leqslant \sum_{i=J+1}^{k} \frac{2a}{p_i^\rho} \leqslant \sum_{i=J+1}^{k} \frac{2a}{i^\rho} \leqslant \int_J^\infty \frac{2a\,dt}{t^\rho} = \frac{2a}{(\rho-1)J^{\rho-1}}$$

ce qui entraîne

$$T_J = O\left(\frac{\log N}{J^{\rho-1}}\right) + O\big((\log N)^\delta\big). \tag{5.59}$$

On choisit

$$J = \big\lfloor (\log X)^\gamma \big\rfloor$$

avec

$$\gamma = \frac{1-\delta}{\rho-1} = \frac{1}{2\rho} = 0.289\dots.$$

Alors, pour tous les nombres K-champions $N \leqslant X$, on a par (5.59)

$$T_J(N) = O\big((\log X)^\delta\big).$$

La preuve du point 2 se termine alors comme dans [11]. $\square$

Tableau 2
Table des 40 premiers K-champions

i	N_i	$K(N_i)$	$\underline{\alpha}_i$	$K(N_i)$
1	1	1	[]	1
2	4	2	[2]	2
3	6	3	[1, 1]	3
4	8	4	[3]	2^2
5	12	8	[2, 1]	2^3
6	24	20	[3, 1]	$2^2 \times 5$
7	36	26	[2, 2]	2×13
8	48	48	[4, 1]	$2^4 \times 3$
9	72	76	[3, 2]	$2^2 \times 19$
10	96	112	[5, 1]	$2^4 \times 7$
11	120	132	[3, 1, 1]	$2^2 \times 3 \times 11$
12	144	208	[4, 2]	$2^4 \times 13$
13	192	256	[6, 1]	2^8
14	240	368	[4, 1, 1]	$2^4 \times 23$
15	288	544	[5, 2]	$2^5 \times 17$
16	360	604	[3, 2, 1]	$2^2 \times 151$
17	432	768	[4, 3]	$2^8 \times 3$
18	480	976	[5, 1, 1]	$2^4 \times 61$
19	576	1376	[6, 2]	$2^5 \times 43$
20	720	1888	[4, 2, 1]	$2^5 \times 59$
21	864	2208	[5, 3]	$2^5 \times 3 \times 23$
22	960	2496	[6, 1, 1]	$2^6 \times 3 \times 13$
23	1152	3392	[7, 2]	$2^6 \times 53$
24	1440	5536	[5, 2, 1]	$2^5 \times 173$
25	1728	6080	[6, 3]	$2^6 \times 5 \times 19$
26	1920	6208	[7, 1, 1]	$2^6 \times 97$
27	2160	7968	[4, 3, 1]	$2^5 \times 3 \times 83$
28	2304	8192	[8, 2]	2^{13}
29	2880	15488	[6, 2, 1]	$2^7 \times 11^2$
30	3456	16192	[7, 3]	$2^6 \times 11 \times 23$
31	4320	25440	[5, 3, 1]	$2^5 \times 3 \times 53$
32	5760	41792	[7, 2, 1]	$2^6 \times 653$
33	6912	41984	[8, 3]	$2^{10} \times 41$
34	8640	76864	[6, 3, 1]	$2^6 \times 1201$
35	11520	109568	[8, 2, 1]	$2^{10} \times 107$
36	17280	222528	[7, 3, 1]	$2^6 \times 3 \times 19 \times 61$
37	23040	280576	[9, 2, 1]	$2^{11} \times 137$
38	25920	331776	[6, 4, 1]	$2^{12} \times 3^4$
39	30240	333984	[5, 3, 1, 1]	$2^5 \times 3 \times 7^2 \times 71$
40	34560	622592	[8, 3, 1]	$2^{15} \times 19$

5.5. *Table des champions*

Nous avons vu (5.1) que les nombres K-champions sont de la forme

$$N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{avec } \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \geqslant 1.$$

Pour énumérer tous les K champions inférieurs à X on construit, par « backtracking » tous les nombres N de cette forme jusqu'à X. Le bactracking n'énumère pas ces nombres par ordre croissant. Chaque fois qu'un tel N est obtenu, la valeur $K(N)$ est calculée en utilisant la formule (1.6) et le couple $(N, K(N))$ est mémorisé. Une fois cette construction terminée, on range ces couples par valeurs croissantes de N, et on élimine ceux qui ne sont pas champions. Nous avons calculé tous les champions jusqu'à $X = 557940830126698960967415390$. Nous avons obtenu 340884 nombres de la forme (5.1). Parmi ceux-ci 761 sont des champions. Tableau 2 donne les 40 premiers champions.[1]

6. Problèmes ouverts

1. Prouver la conjecture 1, ou, au moins, donner une valeur effective aux constantes C_1 et C_2 des inégalités (2.10).
2. Existe-t-il une constante C telle que, lorsque le nombre K-champion N tend vers l'infini, on ait

$$\log K(N) = \rho \log N - \bigl(C + o(1)\bigr) \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \text{ ?}$$

3. Est il possible de montrer que le plus grand nombre K-champion dont les exposants dans la décomposition en facteurs premiers sont tous supérieurs à 1 est

$$N_{390} = 2^{28} 3^{10} 5^4 7^2 = 485432135516160000 \text{ ?}$$

4. Dans [26], Ramanujan appelle *superior highly composite* un nombre N pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $M \geqslant 1$ on ait $\frac{\tau(M)}{M^\varepsilon} \leqslant \frac{\tau(N)}{N^\varepsilon}$, où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n. Peut on généraliser cette notion à la fonction K ?
5. Peut-on améliorer l'encadrement de $Q(X)$ donné par le théorème 7 ?
6. Peut on améliorer l'algorithme de calcul des nombres K-champions présenté en §5.5 ? Une forme effective du reste dans l'égalité (5.18) du théorème 5 permettrait de restreindre les candidats à un sous-ensemble de l'ensemble des N satisfaisant (5.1).
7. P. Erdős a posé le problème suivant : dans la formule (1.5) on restreint la somme aux $f(x)$ plus grandes valeurs de $K(n)$, pour $1 \leqslant n \leqslant x$. Quelle est la valeur minimale de $f(x)$ telle que la somme soit encore équivalente au second membre de (1.5) ?

Références

[1] E.R. Canfield, P. Erdős, C. Pomerance, On a problem of Oppenheim concerning "Factorisatio Numerorum", J. Number Theory 17 (1983) 1–28.
[2] L. Carlitz, Extended Bernoulli and Eulerian numbers, Duke Math. J. 31 (1964) 667–689.
[3] B. Chor, P. Lemke, Z. Mador, On the number of ordered factorizations of natural numbers, Discrete Math. 214 (2000) 123–133.
[4] D. Coppersmith, M. Lewenstein, Constructive bounds on ordered factorizations, SIAM J. Discrete Math. 19 (2005) 301–303.
[5] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris, 1968.
[6] W.J. Ellison, M. Mendès-France, Les nombres premiers, Publications de l'Institut de mathématiques de l'université de Nancago, Hermann, Paris, 1975.

[1] On trouvera une table plus complète sur les sites internet de M. Deléglise ou J.-L. Nicolas.

[7] P. Erdős, On some asymptotic formulas in the theory of "factorisatio numerorum", Ann. of Math. 42 (1941) 989–993. Corrections to two of my papers, Ann. of Math. 44 (1943) 647–651.

[8] R. Evans, An asymptotic formula for extended Eulerian numbers, Duke Math. J. (1974) 161–175.

[9] E. Grosswald, Verallgemeinerte Eulersche Zahlen, Math. Z. 140 (1974) 173–177.

[10] V.C. Harris, M.V. Subbarao, On product partitions of integers, Canad. Math. Bull. 34 (1991) 474–479.

[11] M.-O. Hernane, J.-L. Nicolas, Grandes valeurs du nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers, à paraître dans The Ramanujan J. 14 (2) (October 2007).

[12] E. Hille, A problem in "Factorisatio Numerorum", Acta Arith. 2 (1937) 134–144.

[13] H.K. Hwang, Distribution of the number of factors in random ordered factorisations of integers, J. Number Theory 81 (2000) 61–92.

[14] S. Ikehara, On Kalmár's problem in "Factorisatio Numerorum", Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 21 (1939) 208–219; II 23 (1941) 767–774.

[15] L. Kalmár, A "Factorisatio Numerorum problémájáról", Mathematikai és Fizikai Lapok. 38 (1931) 1–15.

[16] L. Kalmár, Über die mittlere Azahl der Produktdarstellungen der Zahlen (Erste Mitteilung), Acta Litterarum ac Scientiarum, Szeged. 5 (1931) 95–107.

[17] J.K. Kim, On highly factorable numbers, J. Number Theory 72 (1998) 76–91.

[18] M. Klazar, F. Luca, On the maximal order of numbers in the "Factorisatio numerorum" problem, J. Number Theory 124 (2) (2007) 470–490.

[19] A. Knopfmacher, J. Knopfmacher, R. Warlimont, "Factorisatio Numerorum" in arithmetical semi-groups, Acta Arith. 61 (1992) 327–336.

[20] A. Knopfmacher, J. Knopfmacher, R. Warlimont, Ordered factorisations for integers and arithmetical semi-groups, in: Advanced in Number Theory, Kingston, Ontario, 1991, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993, pp. 151–165; Acta Arith. 61 (1992) 327–336.

[21] A. Knopfmacher, M.E. Mays, A survey of factorisation counting functions, Int. J. Number Theory 1 (4) (2005) 563–581.

[22] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, second ed., Chelsea, New York, 1953.

[23] P.A. Mac-Mahon, Dirichlet's series and the theory of partitions, Proc. London Math. Soc. (2) 22 (1923) 404–411; Percy Alexander Mac-Mahon Collected Papers, vol. 1, MIT Press, 1978, pp. 966–973.

[24] P.A. Mac-Mahon, Memoir on the theory of the compositions of numbers, Philos. Trans. Roy. Soc. London. (1) 184 (1893) 835–901, Percy Alexander Mac-Mahon Collected Papers, vol. 1, pp. 620–686.

[25] A. Oppenheim, On an arithmetic function, J. London Math. Soc. 1 (1926) 205–211; II (1927) 123–130.

[26] S. Ramanujan, Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Serie 2 14 (1915) 347–409; Collected papers, Cambridge Univ. Press, 1927, pp. 78–129.

[27] G. Rhin, Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité, in: Séminaire de Th. des nombres D.P.P., 1985–86, in: Progress. in Math., vol. 71, Birkhäuser, 1987, pp. 155–164.