Centre de Recherches Mathématiques
CRM Proceedings and Lecture Notes
Volume 46, 2008

Parité des valeurs de la fonction de partition $p(n)$ et anatomie des entiers

Jean-Louis Nicolas

Abstract. Let $p(n)$ denote the number of partitions of n, and for $i = 0$ (resp. 1), $A_i(x)$ denote the number of $n \leq x$ such that $p(n)$ is even (resp. odd). In this paper, it is proved that for every $K > 0$, $A_1(x) \gg_K \sqrt{x}(\log\log x)^K/\log x$ holds for x large enough. This estimation slightly improves a preceding result of the author who got the above lower bound for some large constant K. For even values, it is proved that $A_0(x) \geq 0.28\sqrt{x\log\log x}$ holds for $x > e$.

Let $\Delta^k(q) = q^k\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24k} = \sum_{n=k}^{\infty}\tau_k(n)q^n$ and $B_k(x) = \mathrm{Card}\{n \leq x, \tau_k(n) \text{ is odd}\}$. There is a simple way to get a lower bound for $A_0(x)$ (resp. $A_1(x)$) if we know an upper (resp. lower) bound of $B_k(x)$. Further, it has been proved that if $\tau_k(n)$ is odd, the number of primes occurring with exponent 1 in the factorization of n into primes is bounded. A classical argument of Hardy and Ramanujan allows to show that there are not too many such n's, yielding an upper bound for $B_k(x)$.

1. Introduction

Soit $p(n)$ le nombre de partitions de n, c'est-à-dire le nombre de façons d'écrire $n = n_1+n_2+\cdots+n_r$ avec $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ (*cf.* [2, chap. 19]). On pose $p(0) = 1$, et on définit

$$A_i(x) = \sum_{\substack{0\leq n\leq x\\ p(n)\equiv i \pmod 2}} 1, \quad i \in \{0,1\}. \tag{1.1}$$

Dans l'article [8] où l'on trouvera un historique des travaux concernant la parité de $p(n)$, il est démontré qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$A_1(x) \gg \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^K}{\log x} \tag{1.2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 11P83, 11F33.
Recherche partiellement financée par le CNRS.
Cet article doit beaucoup aux discussions et aux échanges de courriels avec J.-P. Serre. J'ai plaisir à le remercier vivement ici pour m'avoir fait profiter de sa grande connaissance des formes modulaires et en particulier pour la proposition 3.3 qui lui est due. J'ai également plaisir à remercier A. Sárközy qui m'a introduit dans le sujet et l'arbitre anonyme pour ses remarques pertinentes.
This is the final form of the paper.

et les minorations effectives suivantes sont données

$$x \geq 7 \Longrightarrow A_1(x) \geq 4.57\frac{\sqrt{x}}{\log x} \tag{1.3}$$

et

$$x \geq 10 \Longrightarrow A_0(x) \geq 1.05\sqrt{x}. \tag{1.4}$$

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes :

Théorème 1.1. *Pour tout nombre réel positif K, on a*

$$A_1(x) \gg_K \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^K}{\log x}.$$

Théorème 1.2. *On a pour tout $x \geq e$,*

$$A_0(x) \geq 0.28\sqrt{x}\sqrt{\log\log x} \tag{i}$$

et, lorsque $x \to \infty$,

$$A_0(x) \gtrsim \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x}\sqrt{\log\log x}. \tag{ii}$$

Soit

$$\Delta(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n \tag{1.5}$$

où τ est la fonction de Ramanujan. Soit k un entier positif. On écrit

$$\Delta^k(q) = \sum_{n=k}^{\infty}\tau_k(n)q^n \tag{1.6}$$

et l'on a

$$n \not\equiv k \pmod 8 \Longrightarrow \tau_k(n) \equiv 0 \pmod 2. \tag{1.7}$$

Définissons pour x réel positif

$$B_k(x) = \mathrm{Card}\,\{n \leq x, \tau_k(n) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)\}. \tag{1.8}$$

L'identité d'Euler (*cf.* [2, Th. 353]) s'écrit

$$f(q) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(q^{n(3n-1)/2} + q^{n(3n+1)/2}). \tag{1.9}$$

La série génératrice de $p(n)$ est, par (1.9), (*cf.* [2, 19.3])

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^m} = \frac{1}{f(q)}. \tag{1.10}$$

Soit d un entier pair et

$$k = \frac{2^d-1}{3} \in \mathbb{N}; \tag{1.11}$$

par (1.10), il vient

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n\right)f(q)^{2^d} = f(q)^{3k}, \tag{1.12}$$

et le coefficient de q^n dans $f(q)^{3k}$ est congru modulo 2 au coefficient de q^{8n+k} dans $\Delta^k(q)$. En comparant la lacunarité des deux membres de (1.12), par un raisonnement déjà donné par Serre dans [9], on démontre dans [8, les formules (5.6) et (6.1)],

$$A_1(x) \geq \frac{B_k(8x+k)}{\sqrt{8x/(3\times 2^d)}(1+\sqrt{3\times 2^d/(2x)})} \tag{1.13}$$

et,

$$A_0(x) \geq \frac{2x/3(1-\sqrt{6\times 2^d/x}) - B_k(8x+k)}{\sqrt{8x/(3\times 2^d)}(1+\sqrt{3\times 2^d/(2x)})}. \tag{1.14}$$

Les inégalités (1.13) et (1.14) constituent la première étape de la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2. La deuxième étape, exposée dans la partie 3, rappelle la théorie des formes modulaires modulo 2 dans le but de majorer et minorer $B_k(x)$; en particulier, on montre que $B_k(x) \leq \Pi'_N(x)$, le nombre d'entiers $n \leq x$ dont le nombre de facteurs premiers p tels que p^2 ne divise pas n n'excède pas $N = \lfloor (k+1)/4 \rfloor$. L'étude de $\Pi'_N(x)$ est l'objet de la partie 2, et les démonstrations des théorèmes 1.1 et 1.2 seront données dans les deux dernières parties.

La constante 0.28 du théorème 1.2 pourrait être rapprochée de $\sqrt{2}/2$ par des calculs plus techniques. Nous avons essayé de présenter une minoration effective de $A_0(x)$ de la façon la plus simple possible.

2. Anatomie des entiers

2.1. $\pi_\nu(x)$. On désigne par $\pi_\nu(x)$ le nombre d'entiers $n \leq x$ qui sont produits de ν facteurs premiers distincts. Lorsque $\nu = 1$, $\pi_1(x)$ est égal à $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$, le nombre de nombres premiers au plus égaux à x.

Lemme 2.1. *Pour $x \geq 2$ et $\nu \geq 1$, on a*

$$\pi_\nu(x) \leq 1.26\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}. \tag{2.1}$$

DÉMONSTRATION. Ce lemme est démontré de façon très élégante par Hardy et Ramanujan (*cf.* [1, Lemma A]) sous la forme

$$\pi_\nu(x) \leq K\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x + C)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \quad x \geq 2 \tag{2.2}$$

où K, B, C, H sont des constantes vérifiant

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 \leq K\frac{x}{\log x}, \quad x \geq 2 \tag{2.3}$$

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} < H\log x, \quad x \geq 2 \tag{2.4}$$

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} < \log\log x + B, \quad x \geq 2 \tag{2.5}$$

$$C > B + H. \tag{2.6}$$

Les inégalités (3.6), (3.24) et (3.20) de Rosser et Schoenfeld [11] donnent

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 \leq 1.25506\frac{x}{\log x}, \quad x > 1$$

donc $K = 1.26$ convient dans (2.3) et (2.2),

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} < \log x, \quad x > 1$$

donc $H = 1$ convient dans (2.4), et

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} < \log\log x + 0.2615 + \frac{1}{\log^2 5} < 0.65, \quad x \ge 5$$

qui, jointe au calcul de $\sum_{p \le x} 1/p$ pour $x = 2$ et $x = 3$, montre que l'on peut prendre dans (2.5)

$$B = 0.867 > -\log\log 2 + \tfrac{1}{2} > -\log\log 3 + \tfrac{5}{6}$$

et dans (2.6) et (2.2), $C = 1.87$. □

2.2. Nombres quadratiquement saturés. On dit que n est quadratiquement saturé (en anglais *squarefull*) si $n = 1$ ou si, pour tout p premier, la valuation p-adique $v_p(n)$ satisfait $v_p(n) \ge 2$. Soit $\mathcal{S} = \{1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \ldots\}$ l'ensemble des nombres quadratiquement saturés. La fonction caractéristique χ de l'ensemble $\mathcal{S}$ est multiplicative et l'on a (*cf.* [4, 14.4], [6, 7.1])

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\right)$$
$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s} - p^s}\right) = \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}$$

où ζ désigne la fonction de Riemann. On en déduit avec MAPLE :

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{1}{n} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1.94359\ldots \tag{2.7}$$

et

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{\log n}{n} = -\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}\right)\right]_{s=1} = 3.02927\ldots. \tag{2.8}$$

Tout entier n quadratiquement saturé s'écrit de façon unique $n = a^2 b^3$ avec b sans facteurs carrés ; pour tout $x \ge 0$, on a donc, en désignant par μ la fonction de Möbius,

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \in \mathcal{S}}} 1 &= \sum_{b \le x^{1/3}} |\mu(b)| \sum_{a \le \sqrt{x/b^3}} 1 \le \sum_{b \le x^{1/3}} |\mu(b)| \sqrt{x/b^3} \\ &\le \sqrt{x} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{|\mu(b)|}{b^{3/2}} = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \sqrt{x} = 2.17325\ldots\sqrt{x} \le 2.18\sqrt{x} \end{aligned} \tag{2.9}$$

et, par l'intégrale de Stieltjes,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n > x \\ n \in \mathcal{S}}} \frac{1}{n} &= \int_{x^-}^{+\infty} \frac{d[S(t)]}{t} = -\frac{S(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}\, dt \\ &\le \int^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}\, dt \le \int^{+\infty} \frac{2.18}{t^{3/2}}\, dt = \frac{4.36}{\sqrt{x}} \times \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3. $\pi'_\nu(x)$. Posons

$$\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1, \quad \omega'(n) = \sum_{\substack{p \mid n \\ v_p(n) = 1}} 1. \tag{2.11}$$

On définit, pour $\nu \ge 0$ et x réel

$$\pi'_\nu(x) = \sum_{\substack{n \le x \\ \omega'(n) = \nu}} 1. \tag{2.12}$$

Lemme 2.2. *Pour $x \ge 2$, on a*

$$\pi'_0(x) \le 2.18\sqrt{x} \tag{2.13}$$

et, pour $\nu \ge 1$,

$$\pi'_\nu(x) \le \frac{2.46x}{\log x}\left(1 + \frac{3.11}{\log x}\right) \frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + 4.36 x^{3/4}. \tag{2.14}$$

DÉMONSTRATION. Tout entier positif n s'écrit de façon unique $n = ab$, avec a sans facteurs carrés, b quadratiquement saturé et $(a, b) = 1$; de plus, on a $\nu = \omega'(n) = \omega(a)$.

Lorsque $\nu = 0$, a est égal à 1 et, pour tout $x \ge 0$, on a par (2.9)

$$\pi'_0(x) = \sum_{\substack{b \le x \\ b \in \mathcal{S}}} 1 = S(x) \le 2.18\sqrt{x}$$

ce qui démontre (2.13).

Supposons maintenant $\nu \ge 1$. Lorsque $2 \le x < 4$, la valeur de $\pi'_\nu(x)$ est 1 ou 2 tandis que le membre de droite de (2.14) est au moins égal à $4.36 \times 2^{3/4} > 2$; ainsi, (2.14) est démontrée et l'on peut supposer $x \ge 4$. On a, avec les notations des paragraphes 2.1 et 2.2,

$$\begin{aligned} \pi'_\nu(x) &= \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \le x}} \sum_{\substack{\mu(a) \ne 0, \omega(a) = \nu \\ ab \le x, (a,b) = 1}} 1 \le \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \le x}} \sum_{\substack{\mu(a) \ne 0, \omega(a) = \nu \\ a \le x/b}} 1 \\ &= \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \le x}} \pi_\nu\left(\frac{x}{b}\right) = T_1 + T_2 \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$T_1 = \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \le \sqrt{x}}} \pi_\nu\left(\frac{x}{b}\right) \quad \text{et} \quad T_2 = \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ \sqrt{x} < b \le x}} \pi_\nu\left(\frac{x}{b}\right). \tag{2.16}$$

2.3.1. *Majoration de T_1.* Pour $x \ge 4$ et $b \le \sqrt{x}$, on a $x/b \ge \sqrt{x} \ge 2$ et l'on peut appliquer le lemme 2.1 :

$$\begin{aligned} T_1 &\le \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \le \sqrt{x}}} \frac{1.26x}{b \log x/b} \frac{(\log\log x/b + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\ &\le \frac{1.26x}{\log x} \frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \sum_{\substack{b \in \mathcal{S} \\ b \le \sqrt{x}}} \frac{1}{b(1 - \log b/\log x)}. \end{aligned}$$

Or, pour $0 \le t \le \frac{1}{2}$, $1/(1-t) \le 1 + 2t$; et (2.7) et (2.8) entraînent

$$\sum_{\substack{b\in\mathcal{S}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{1}{b(1-\log b/\log x)} \le \sum_{\substack{b\in\mathcal{S}\\ b\le\sqrt{x}}} \frac{1}{b} + \frac{2\log b}{b\log x} \le 1.95 + \frac{6.06}{\log x} \le 1.95\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)$$

et ainsi

$$T_1 \le \frac{2.46x}{\log x}\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\frac{(\log\log x + 1.87)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}. \tag{2.17}$$

2.3.2. *Majoration de* T_2. Pour majorer T_2 on utilise la borne banale $\pi_\nu(x) \le x$. On a ainsi par (2.10)

$$T_2 \le \sum_{\substack{b\in\mathcal{S}\\ b>\sqrt{x}}} \frac{x}{b} \le x\frac{4.36}{x^{1/4}} = 4.36x^{3/4}$$

ce qui, avec (2.15) et (2.17), complète le preuve du lemme 2.2. □

2.4. $\Pi'_\nu(x)$. Pour $\nu \ge 0$, définissons

$$\Pi'_\nu(x) = \pi'_0(x) + \pi'_1(x) + \dots + \pi'_\nu(x) = \sum_{\substack{n\le x\\ 0\le\omega'(n)\le\nu}} 1. \tag{2.18}$$

Lemme 2.3. *Soit ν un nombre entier, $\nu \ge 5$, et α un nombre réel, $0 < \alpha < 1$. Posons $Y = Y(x) = \log\log x + 1.87$. On suppose que x est tel que*

$$\frac{\nu-1}{Y} \le \alpha < 1, \tag{2.19}$$

ce qui implique $x \ge \exp(\exp(2.13)) = 4513.67\dots$. Alors,

$$\Pi'_\nu(x) \le \frac{3.19x}{(1-\alpha)(\log x)^{Q(\alpha)}}\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\left(1+0.69\frac{(2Y+3)\log x}{x^{1/4}}\right) \tag{2.20}$$

où

$$Q(\alpha) = 1 - \alpha + \alpha\log\alpha; \tag{2.21}$$

lorsque α varie de 0 à 1, $Q(\alpha)$ décroit de 1 à 0. De plus, si $x \ge x_0 = e^{100}$,

$$\Pi'_\nu(x) \le \frac{3.29x}{(1-\alpha)(\log x)^{Q(\alpha)}}. \tag{2.22}$$

DÉMONSTRATION. Le lemme 2.2 entraîne

$$\Pi'_\nu(x) \le \frac{2.46x}{\log x}\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\sum_{n=1}^{\nu}\frac{Y^{n-1}}{(n-1)!} + 2.18(2\nu+1)x^{3/4}. \tag{2.23}$$

Maintenant, par la formule de Stirling sous la forme

$$(\nu-1)! \ge \left(\frac{\nu-1}{e}\right)^{\nu-1}\sqrt{2\pi(\nu-1)} \ge \left(\frac{\nu-1}{e}\right)^{\nu-1}\sqrt{8\pi},$$

par la croissance de la fonction $t \mapsto (e/t)^t$ sur l'intervalle $[0,1]$ et par (2.19), la somme figurant dans le terme principal de (2.23) se majore :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\nu}\frac{Y^{n-1}}{(n-1)!} &\le \frac{Y^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\left(1+\frac{\nu-1}{Y}+\frac{(\nu-1)^2}{Y^2}+\dots+\frac{(\nu-1)^{\nu-1}}{Y^{\nu-1}}\right)\\ &\le \frac{Y^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{1}{1-(\nu-1)/Y} \le \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\frac{eY}{\nu-1}\right)^{\nu-1} 1/1-(\nu-1)Y\\ &\le \frac{1}{\sqrt{8\pi}(1-\alpha)}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha Y} = \frac{(\log x)^{\alpha(1-\log\alpha)}}{\sqrt{8\pi}(1-\alpha)}\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{1.87\alpha}\\ &\le \frac{e^{1.87}}{\sqrt{8\pi}}\frac{(\log x)^{\alpha(1-\log\alpha)}}{(1-\alpha)} = 1.29422\dots\frac{(\log x)^{\alpha(1-\log\alpha)}}{(1-\alpha)}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

On majore ensuite le terme de reste de (2.23) à l'aide de l'inégalité $\nu \le Y + 1$ déduite de (2.19) ; et (2.20) résulte de (2.23) et de (2.24).

Pour démontrer (2.22), on observe que les fonctions $t \mapsto \log t/t^{1/8}$ et $t \mapsto \log\log t/t^{1/8}$ sont décroissantes pour $t \ge 2981 > e^8$; ainsi, pour $x \ge x_0 = e^{100}$, on a

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{3.11}{\log x}\right)\left(1+0.69\frac{(2Y(x)+3)\log x}{x^{1/4}}\right)\\ &\qquad\le \left(1+\frac{3.11}{\log x_0}\right)\left(1+0.69\frac{(2Y(x_0)+3)\log x_0}{x_0^{1/4}}\right) < 1.0312 < \frac{3.29}{3.19}\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.3. □

2.5. Minoration de $\pi_\nu(x)$. Soit $\mathcal{P}^{(1)} = \{q_1 < q_2 < \cdots\}$ un ensemble de nombres premiers. On dit que $\mathcal{P}^{(1)}$ a pour densité δ_1 si, en notant p_n le n-ième nombre premier, $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = \delta_1$.

Landau a montré que, pour ν fixé, la fonction $\pi_\nu(x)$ définie en 2.1 vérifiait (*cf.* [7, §56])

$$\pi_\nu(x) \sim \frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \quad x \to \infty; \tag{2.25}$$

on trouvera une autre démonstrations dans [2, chap. XXII] ; la meilleure méthode est sans doute celle de Selberg-Delange (*cf.* [20, II.6]), cependant, elle ne se généralise pas si l'on ne compte dans $\pi_\nu(x)$ que les nombres dont les facteurs premiers appartiennent à un ensemble $\mathcal{P}^{(1)}$ ayant une densité.

La preuve de Landau est basée sur la formule

$$(\nu+1)\pi_{\nu+1}(x) = \sum_{p\le x/2}\pi_\nu\left(\frac{x}{p}\right) - g_{\nu+1}(x), \quad \nu \ge 1, \tag{2.26}$$

où $g_{\nu+1}(x)$ compte le nombre d'entiers $n \le x$ qui s'écrivent $n = p_1^2p_2p_3,\dots,p_\nu$ avec $p_1, p_2, p_3, \dots, p_\nu$ distincts (en particulier, $g_2(x) = \pi(\sqrt{x})$)

Ensuite, Landau montre que $g_{\nu+1}(x)$ est négligeable, et que l'on peut estimer par récurrence la somme de (2.26) par un calcul astucieux mais technique :

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x/2}\pi_\nu\Big(\frac{x}{p}\Big)&\sim\int_2^{x/2}\frac{\pi_\nu(x/u)}{\log u}\mathrm{d}u\\ &= x\int_2^{x/2}\frac{\pi_\nu(t)}{\log x-\log t}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\sim\frac{x}{(\nu-1)!}\int_2^{x/2}\frac{(\log\log t)^{\nu-1}\mathrm{d}t}{t\log t(\log x-\log t)}\\ &\sim\frac{(\nu+1)}{\nu!}\frac{x(\log\log x)^\nu}{\log x}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Soient $\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)}$ des ensembles de nombres premiers de densités non nulles $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_\nu$. On désigne par $\pi_\nu(\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)};x)$ le nombre d'entiers $n\le x$ qui s'écrivent sous la forme $n=p^{(1)}p^{(2)},\dots,p^{(\nu)}$ avec, pour $1\le i\le\nu$, $p^{(i)}\in\mathcal{P}^{(i)}$ et $p^{(1)},p^{(2)},\dots,p^{(\nu)}$ distincts.

La méthode de Landau peut s'étendre pour estimer $\pi_\nu(\mathcal{P}^{(1)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)};x)$. Cependant, la forme de la relation (2.26) va dépendre des ensembles $\mathcal{P}^{(i)}$. Par exemple, si les ensembles $\mathcal{P}^{(i)}$ ont deux à deux une intersection vide, cette relation devient

$$\sum_{\substack{p\le x/2\\ p\in\mathcal{P}^{(\nu+1)}}}\pi_\nu\Big(\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)};\frac{x}{p}\Big)=\pi_{\nu+1}(\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu+1)};x)$$

et l'on obtient

$$\pi_\nu(\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)};x)\sim\nu\delta_1\delta_2,\dots,\delta_\nu\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{\nu-1}.$$

Dans le cas général, la relation (2.26) devient

$$\sum_{\substack{p\le x/2\\ p\in\mathcal{P}^{(\nu+1)}}}\pi_\nu\Big(\mathcal{P}^{(1)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)};\frac{x}{p}\Big)\le(\nu+1)\pi_{\nu+1}(\mathcal{P}^{(1)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu+1)};x)+g_{\nu+1}(x)$$

qui, par les calculs (2.27), donnent, pour ν fixé, la minoration

$$\pi_\nu(\mathcal{P}^{(1)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)};x)\gtrsim\frac{\delta_1\delta_2,\dots,\delta_\nu}{(\nu-1)!}\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{\nu-1},\quad x\to\infty.\tag{2.28}$$

Notons que, lorsque les ensembles $\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(\nu)}$ sont tous égaux, les deux membres de (2.28) sont équivalents.

3. Formes modulaires

3.1. Formes modulaires sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C};\Im(z)>0\}$ le demi-plan de Poincaré. Une forme modulaire de poids k (où k est un entier positif pair) est une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$F(z)=c_0+c_1q+\dots+c_nq^n+\cdots\tag{3.1}$$

avec

$$q=e^{2i\pi z},\quad |q|=e^{-2\pi\Im(z)}\tag{3.2}$$

convergeant pour $|q|<1$, c'est-à-dire $z\in\mathcal{H}$, et vérifiant pour tout $z\in\mathcal{H}$

$$F\Big(-\frac{1}{z}\Big)=z^kF(z).\tag{3.3}$$

Les résultats exposés dans cette partie sont démontrés dans [12, chap. VII].

3.2. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_k$. La somme de deux formes modulaires de poids k est une forme modulaire de poids k et le produit par une constante d'une forme modulaire de poids k est une forme modulaire de même poids. Ainsi, l'ensemble des formes modulaires de poids k constitue un espace vectoriel $\mathcal{M}_k$.

Le produit d'une forme de poids k par une forme de poids k' est une forme de poids $k+k'$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_k$ est de dimension finie

$$\dim\mathcal{M}_k=\begin{cases}1+\lfloor\frac{k}{12}\rfloor & \text{si } k\equiv 0 \pmod 4\\ 1+\lfloor\frac{(k-3)}{12}\rfloor & \text{si } k\equiv 2 \pmod 4).\end{cases}\tag{3.4}$$

3.3. Les séries d'Eisenstein. Définissons les nombres de Bernoulli par

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^\infty\frac{b_n}{n!}x^n.$$

On a : $b_0=1$, $b_1=-\frac{1}{2}$, $b_{2j+1}=0$ pour $j\ge1$ et

$$b_2=\frac{1}{6},\ b_4=-\frac{1}{30},\ b_6=\frac{1}{42},\ b_8=-\frac{1}{30},\ b_{10}=\frac{5}{66},\ b_{12}=-\frac{691}{2730},\ b_{14}=\frac{7}{6},\dots.$$

On pose maintenant $\sigma_j(n)=\sum_{d|n}d^j$ et, pour k pair, $k\ge4$, on introduit la série d'Eisenstein d'indice k :

$$E_k=1-\frac{2k}{b_k}\sum_{n=1}^\infty\sigma_{k-1}(n)q^n.\tag{3.5}$$

On a en particulier

$$E_4=1+240\sum_{n=1}^\infty\sigma_3(n)q^n\quad\text{et}\quad E_6=1-504\sum_{n=1}^\infty\sigma_5(n)q^n.\tag{3.6}$$

La série d'Eisenstein d'indice k est une forme modulaire de poids k et pour tout couple de nombres entiers $\alpha\ge0$ et $\beta\ge0$ vérifiant $4\alpha+6\beta=k$, $E_4^\alpha E_6^\beta$ est une forme modulaire de poids k.

3.4. Formes paraboliques. On dit que la forme modulaire (3.1) est parabolique si le coefficient constant c_0 est nul. La fonction Δ à coefficients entiers définie par (1.5) est modulaire de poids 12, parabolique, et l'on a

$$\Delta=\frac{E_4^3-E_6^2}{1728}=\sum_{n=1}^\infty\tau(n)q^n=q-24q^2+252q^3+\cdots.\tag{3.7}$$

3.5. Une base de $\mathcal{M}_k$ à coefficients entiers. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_k$ des formes modulaires de poids k dont la dimension est donnée par (3.4) a pour base, lorsque $k\equiv0 \pmod 4)$

$$E_4^{k/4-3j}\Delta^j=q^j+(60k-744j)q^{j+1}+\cdots,\quad 0\le j\le\frac{k}{12}$$

et lorsque $k\equiv2 \pmod 4)$,

$$E_6E_4^{(k-6)/4-3j}\Delta^j=q^j+(60k-744j-864)q^{j+1}+\cdots,\quad 0\le j\le\frac{k-6}{12}.$$

Suivant que k est congru à 0 ou à 2 modulo 4, toute forme modulaire de poids k s'écrit donc avec des composantes complexes λ_j

$$F = \sum_{0 \le j \le k/12} \lambda_j E_4^{k/4-3j} \Delta^j \quad \text{ou} \quad \sum_{0 \le j \le (k-6)/12} \lambda_j E_6 E_4^{(k-6)/4-3j} \Delta^j. \tag{3.8}$$

3.6. Les opérateurs de Hecke. Soit p un nombre premier. L'opérateur de Hecke T_p transforme la forme modulaire (3.1) de poids k en la forme de même poids

$$T_p \mid F = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(n) q^n \tag{3.9}$$

où

$$\gamma(n) = \begin{cases} c(pn) & \text{si } p \text{ ne divise pas } n \\ c(pn) + p^{k-1} c(\frac{n}{p}) & \text{si } p \text{ divise } n. \end{cases} \tag{3.10}$$

L'opérateur T_p est un endomorphisme de $\mathcal{M}_k$. Enfin, les opérateurs T_p commutent entre eux.

3.7. Formes modulaires modulo 2. Il résulte de la forme de la base décrite au paragraphe 3.5 que, si dans (3.8), les λ_j sont entiers, les coefficients de la forme F sont entiers et réciproquement.

Soit p un nombre premier et $n \mapsto \widetilde{n}$ l'application canonique de $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$. À la série $F = \sum_{n \ge 0} c_n q^n \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$, associons la série $\widetilde{F} = \sum_{n \ge 0} \widetilde{c_n} q^n \in \mathbb{F}_p[\![q]\!]$. Nous désignerons par $\widetilde{\mathcal{M}_k}$ l'ensemble des $\widetilde{F}$ lorsque F parcourt l'ensemble des formes modulaires de poids k à coefficients entiers.

Lorsque $p = 2$ ou 3, il résulte de (3.6) que $\widetilde{E_4} = \widetilde{E_6} = 1$ et les éléments de $\widetilde{\mathcal{M}_k}$, suivant que k est congru à 0 ou à 2 modulo 4, sont de la forme

$$f = \sum_{0 \le j \le k/12} \lambda_j \widetilde{\Delta^j} \quad \text{ou} \quad \sum_{0 \le j \le (k-6)/12} \lambda_j \widetilde{\Delta^j}, \quad \lambda_j \in \mathbb{F}_p. \tag{3.11}$$

Lorsque $p \ge 5$, l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}_k}$ est décrit dans [17, 18] ou [13]. À partir de maintenant, nous nous restreignons au cas des formes modulaires modulo 2.

Vue la définition (1.6), nous posons

$$f_k = \widetilde{\Delta^k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(k)} q^n \text{ avec } c_n^{(k)} \in \{0,1\} \quad \text{et} \quad c_n^{(k)} \equiv \tau_k(n) \pmod 2. \tag{3.12}$$

Par l'identité de Jacobi (*cf.* [2, Th. 357]), on sait que (*cf.* [8, prop. 1])

$$f_1 = \sum_{m=1}^{\infty} q^{(2m+1)^2}. \tag{3.13}$$

Il résulte de (3.12) et (3.13) que

$$n \not\equiv k \pmod 8 \Longrightarrow c_n^{(k)} = 0 \tag{3.14}$$

3.8. Les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_7$. Par (3.11) et (3.12), le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{M}}$ des formes modulaires modulo 2 est engendré par $f_1, f_2, f_3, \ldots$. Comme $f_{2k} = \sum_{n \ge k} c_n^{(k)} q^{2n}$, les formes f_k d'indice k pair ne sont pas très intéressantes et, plutôt que $\widetilde{\mathcal{M}}$, nous étudierons le sous-espace $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ engendré par $f_1, f_3, f_5, \ldots$.

Compte tenu de (3.14), il sera commode d'écrire

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_7 \tag{3.15}$$

où, pour $i \in \{1,3,5,7\}$, $\mathcal{F}_i$ est engendré par $f_i, f_{i+8}, f_{i+16}, \ldots$.

3.9. Les opérateurs de Hecke modulo 2. Soit F une forme modulaire de poids j à coefficients entiers et p un nombre premier. Par les formules (3.9) et (3.10), $T_p \mid F$ est aussi une forme de poids j à coefficients entiers. Il en résulte que l'opérateur T_p agit sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ et transforme la forme $f = \widetilde{F} = \sum_{m \ge 0} c_m q^m \in \mathbb{F}_2[\![q]\!]$ en la forme $T_p \mid f = \sum_{n \ge 0} \widetilde{\gamma_n} q^n \in \mathbb{F}_2[\![q]\!]$.

Le cas $p = 2$ a peu d'intérêt : si k est pair, $T_2 \mid f_k = f_{k/2}$, tandis que, si k est impair, $T_2 \mid f_k = 0$. Nous supposerons donc $p \ge 3$. La formule (3.10) devient

$$\gamma(n) = \begin{cases} c(pn) & \text{si } p \text{ ne divise pas } n, \\ c(pn) + c(\frac{n}{p}) & \text{si } p \text{ divise } n. \end{cases} \tag{3.16}$$

En considérant les formes de poids $12k$ à coefficients entiers, par (3.8), on voit que

$$T_p \mid f_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j f_j, \quad \mu_j \in \{0,1\}. \tag{3.17}$$

Supposons maintenant k impair. Les formules (3.14) et (3.16) entraînent que, dans (3.17),

$$j \not\equiv pk \pmod 8 \Longrightarrow \mu_j = 0. \tag{3.18}$$

En d'autres termes, pour $i \in \{1,3,5,7\}$, l'opérateur de Hecke T_p est une application linéaire de $\mathcal{F}_i$ dans $\mathcal{F}_j$ avec $j \equiv ip \pmod 8$.

3.10. Nilpotence des opérateurs de Hecke modulo 2. Une des propriétés essentielles des opérateurs de Hecke modulo 2 est qu'ils sont nilpotents (*cf.* [14, 3, 5, 19, 10]). Cela implique que, dans (3.17), le coefficient μ_k est nul. Par (3.17) et (3.18), on a donc pour tout p premier, $p \ge 3$, et tout k impair positif,

$$T_p \mid f_k = \sum_{\substack{j \equiv pk \pmod 8 \\ 1 \le j \le k-2}} \mu_j f_j. \tag{3.19}$$

Soit $\mathcal{F}^{(k)}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $f_1, f_3, f_5, \ldots, f_k$. L'opérateur T_p est une application linéaire de $\mathcal{F}^{(k)}$ dans $\mathcal{F}^{(k-2)}$:

$$T_p : \mathcal{F}^{(k)} \to \mathcal{F}^{(k-2)}. \tag{3.20}$$

3.11. L'indice de nilpotence g_k. Soit j un nombre entier vérifiant $j \geq (k+1)/2$ et une suite de nombres premiers impairs pas forcément distincts $p_1, p_2, \dots, p_j$. Il suit de (3.20) que, pour tout $f \in \mathcal{F}^{(k)}$, $T_{p_1}T_{p_2}, \dots, T_{p_j} \mid f = 0$. Par définition, l'indice de nilpotence d'une forme modulaire modulo 2, $f \in \widetilde{\mathcal{M}}$, est le plus petit nombre $g = g(f)$ tel que, pour toute suite de nombres premiers impairs $p_1, p_2, \dots, p_g$, on ait $T_{p_1}T_{p_2}, \dots, T_{p_g} \mid f = 0$. Nous désignerons par $g_k = g(f_k)$ l'indice de nilpotence de $f_k = \widetilde{\Delta}^k$. On a donc

$$g_k \leq \frac{k+1}{2}. \tag{3.21}$$

3.12. Calcul de g_k pour $k \leq 11$. L'indice de nilpotence g_1 de f_1 est égal à 1, car $T_p \mid f_1 = 0$ pour tout p ; cela peut se voir par un calcul direct à partir de (3.13) et (3.16), ou bien cela résulte de (3.20). Pour tout $f \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $f \notin \{0, f_1\}$, on a

$$g(f) \geq 2. \tag{3.22}$$

En effet, si $f \notin \{0, f_1\}$ on peut écrire $f = \lambda f_1 + f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r}$ avec $\lambda = 0$ ou 1, $r \geq 1$ et $1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_r$; lorsque p est un facteur premier de k_1, par (3.16), le coefficient γ_1 de $T_p \mid (f - \lambda f_1)$ vaut 1 et ainsi, $T_p \mid f = T_p \mid (f - \lambda f_1) \neq 0$.

Enfin, pour $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ (les k_i étant impairs), il est facile de voir que

$$g(f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r}) \leq \max(g_{k_1}, g_{k_2}, \dots, g_{k_r}). \tag{3.23}$$

Proposition 3.1. *Pour k impair, $k \leq 11$, on a*

$k =$	1	3	5	7	9	11
$g_k =$	1	2	2	3	3	4

DÉMONSTRATION. Nous venons de voir que $g_1 = 1$. Lorsque $k = 3$ ou 5, $\tau_k(n)$ est impair si et seulement si n est de la forme

$$n = p^{4m+1}a^2 \tag{3.24}$$

avec p premier, $p \equiv k \pmod 8$, a impair non multiple de p et m entier non nul (*cf.* [15, 16, §6.7] ou [8, §4]).

La valeur de g_3 résulte de (3.21) et (3.22).

Soit p un nombre premier impair. Il résulte de (3.20) que $T_p \mid f_5 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$ avec $\lambda_1, \lambda_3 \in \{0, 1\}$. Le calcul par (3.16) des coefficients de q et q^3 dans $T_p \mid f_5$ et (3.24) donnent $\lambda_3 \equiv \tau_5(3p) \pmod 2 = 0$ et $\lambda_1 \equiv \tau_5(p) \pmod 2 = 1$ si et seulement si $p \equiv 5 \pmod 8$. En conséquence,

$$T_p \mid f_5 = \begin{cases} f_1 & \text{si } p \equiv 5 \pmod 8, \\ 0 & \text{si } p \not\equiv 5 \pmod 8, \end{cases} \tag{3.25}$$

d'où l'on déduit la valeur de g_5.

Soit p un nombre premier impair. Il résulte de (3.20) que $T_p \mid f_7 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 + \lambda_5 f_5$ avec $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5 \in \{0, 1\}$ et, par (3.23), $g(T_p \mid f_7) \leq 2$ et donc $g_7 \leq 3$. Ensuite, par (3.19), $T_3T_5 \mid f_7 = \lambda_1 f_1$; le développement

$$f_7 = q^7 + q^{15} + q^{23} + q^{39} + q^{55} + q^{63} + q^{71} + q^{87} + q^{95} + \cdots$$

permet de calculer le coefficient de q dans $T_3T_5 \mid f_7$ et ainsi d'obtenir $\lambda_1 = 1$ et la valeur de g_7.

Par (3.13), il vient

$$f_1^9 = f_1^8 f_1 = \sum_{u=0}^{\infty} q^{8(2u+1)^2} \sum_{v=0}^{\infty} q^{(2v+1)^2} = \sum_{u,v} q^{8(2u+1)^2 + (2v+1)^2}.$$

Ainsi, $\tau_9(n)$ est congru modulo 2 au nombre de solutions $s(n)$ de l'équation diophantienne $8x^2 + y^2 = n$ avec x, y impairs. Si $p \equiv 7 \pmod 8$, par (3.19), $T_p \mid f_9 = \lambda_7 f_7$. Mais comme $\tau_9(7p) \equiv s(7p) \pmod 2 = 0$, $\lambda_7 = 0$ et $T_p \mid f_9 = 0$. Si $p \equiv 1, 3, 5 \pmod 8$, par (3.19), $T_p \mid f_9 = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3 + \lambda_5 f_5$, et par (3.23), $g(T_p \mid f_9) \leq 2$. Ainsi $g_9 \leq 3$. Ensuite, on montre que $T_3T_3 \mid f_9 = f_1$, ce qui nous donne la valeur de g_9.

La majoration $g_{11} \leq 4$ se prouve comme celle de g_7 ; et à partir du développement de

$$f_{11} = q^{11} + q^{19} + q^{27} + q^{51} + q^{67} + \cdots$$

on calcule $T_3T_3T_3 \mid f_{11} = f_1$, ce qui fournit la valeur de g_{11}. □

3.13. Minoration de g_k. Soit $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}$, $\Omega(k) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$, le nombre de facteurs premiers de k comptés avec multiplicité, $\omega(k)$ et $\omega'(k)$ définis par (2.11), τ_k par (1.6) et $g_k = g(f_k)$ l'indice de nilpotence défini en 3.11.

Proposition 3.2. *Pour tout k impair, on a*

$$g_k \geq \Omega(k) + 1 \tag{3.26}$$

et

$$\tau_k(n) \textit{ est impair} \implies \omega'(n) \leq g_k - 1. \tag{3.27}$$

DÉMONSTRATION. Par (3.16), la série $T_{p_1}^{\alpha_1} T_{p_2}^{\alpha_2}, \dots, T_{p_r}^{\alpha_r} \mid f_k$ a un coefficient constant égal à 1 et n'est donc pas nulle, ce qui prouve (3.26).

Pour démontrer (3.27), supposons $\tau_k(n)$ impair. Si les facteurs premiers de n affectés de l'exposant 1 sont $p_1, p_2, \dots, p_{\omega'(n)}$, le produit $m = p_1 p_2, \dots, p_{\omega'(n)}$ est premier avec n/m et la formule (3.16) entraîne que le coefficient de $q^{n/m}$ dans la série $T_m \mid f_k$ vaut 1, ce qui implique $\omega'(n) < g_k$, par définition de g_k. □

3.14. Majoration de g_k. La majoration (3.21) peut être améliorée :

Proposition 3.3 (J.-P. Serre). *Pour tout k impair, on a*

$$g_k \leq \frac{k+5}{4}. \tag{3.28}$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 3.1, (3.28) est vérifié pour $k \leq 11$. Supposons $k \geq 13$ et supposons (3.28) vraie jusqu'à $k-2$. Posons $j = \lfloor (k+5)/4 \rfloor \geq 4$. Nous devons montrer que pour toute suite de nombres premiers impairs $p_1, p_2, \dots, p_j$, la relation $T_{p_1}T_{p_2}, \dots, T_{p_j} \mid f_k = 0$ est satisfaite. Comme $j \geq 4$ ou bien il existe i_1, $1 \leq i_1 \leq j$ tel que $kp_{i_1} \not\equiv k - 2 \pmod 8$ ou bien tous les p_i vérifient la congruence $kp_i \equiv k - 2 \pmod 8$.

Dans le premier cas, quitte à réordonner les nombres premiers, on peut supposer $i_1 = j$. Par (3.19), $T_{p_j} \mid f_k \in \mathcal{F}^{(k-4)}$ et, par l'hypothèse de récurrence et (3.23), $T_{p_1}T_{p_2}, \dots, T_{p_{j-1}} \mid (T_{p_j} \mid f_k) = 0$.

Dans le deuxième cas, $p_1 p_2 \equiv 1 \pmod 8$ et, par (3.19), $T_{p_1}T_{p_2} \mid f_k \in \mathcal{F}^{k-8}$ ce qui entraîne comme précédemment que

$$T_{p_1}T_{p_2}, \dots, T_{p_j} \mid f_k = T_{p_3}T_{p_4}, \dots, T_{p_j} \mid (T_{p_1}T_{p_2} \mid f_k) = 0. \qquad \square$$

3.15. Minoration de $B_k(x)$. Supposons k impair et $k \geq 3$. Par (3.22), on a $g_k \geq 2$. Par définition de g_k (*cf.* 3.11), il existe $g_k - 1$ nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_{g_k - 1}$ tels que $\varphi = T_{p_1} T_{p_2} \ldots T_{p_{g_k-1}} \mid f_k \neq 0$ et $T_p \mid \varphi = 0$ pour tout p premier. On a donc $g(\varphi) = 1$ et, par (3.22), $\varphi = f_1$. En fait, avec les notations de 2.5, il existe (*cf.* [15, 16, §6.6]) des ensembles de nombres premiers $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \ldots, \mathcal{P}^{(g_k-1)}$ ayant des densités positives $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g_k-1}$ tels que, pour $p_i \in \mathcal{P}^{(i)}$, $1 \leq i \leq g_k - 1$, on ait $T_{p_1} T_{p_2}, \ldots, T_{p_{g_k-1}} \mid f_k = f_1$. Cela implique, par (3.16) et (3.13), que pour $n = a^2 p_1 p_2, \ldots, p_{g_k-1}$ où a est un nombre impair non multiple de $p_1, p_2, \ldots, p_{g_k-1}$, $\tau_k(n)$ est impair. Ainsi, par (2.28), $B_k(x)$ défini par (1.8) vérifie

$$B_k(x) \gg \frac{x}{\log x} (\log\log x)^{g_k - 2}. \tag{3.29}$$

3.16. Majoration de $B_k(8x+k)$.

Lemme 3.4. *Soit α et x deux nombres réels vérifiant*

$$0 < \alpha < 1, \quad \log\log(8x) \geq \frac{4}{\alpha} - 1.87 \quad \textit{et} \quad x \geq x_0 = e^{100}. \tag{3.30}$$

On définit d pair par

$$3\alpha(\log\log(8x) + 1.87) + 4 < 2^d \leq 12\alpha(\log\log(8x) + 1.87) + 16. \tag{3.31}$$

Par (3.30), 2^d *est au moins égal à* 64 *et* $k = k(x, \alpha) = (2^d - 1)/3$ *vérifie*

$$21 \leq k \leq 4\alpha(\log\log(8x) + 1.87) + 5 < 4\alpha(\log\log(8x+k) + 1.87) + 5. \tag{3.32}$$

Alors, avec la définition (1.8),

$$B_k(8x+k) \leq \frac{26.4}{1-\alpha} \frac{x}{(\log(8x))^{Q(\alpha)}} \tag{3.33}$$

où $Q(\alpha)$ a été défini en (2.21).

Démonstration. La proposition 3.3, l'implication (3.27) et la définition (2.18) entraînent $B_k(x) \leq \Pi'_N(x)$ avec

$$N = \left\lfloor \frac{k+1}{4} \right\rfloor = \frac{k-1}{4} \tag{3.34}$$

car $k = (2^d - 1)/3 \equiv 1 \pmod 4$. Les hypothèses (3.30) et (3.32) montrent que l'on peut appliquer le lemme 2.3 à $\Pi'_N(8x+k)$

$$B_k(8x+k) \leq \Pi'_N(8x+k) \leq 8 \times 3.29 \left(1 + \frac{k}{x}\right) \frac{x}{(\log(8x))^{Q(\alpha)}}. \tag{3.35}$$

Par (3.32), pour $x \geq x_0 = e^{100}$,

$$\frac{k}{x} \leq \frac{4\log\log(8x) + 12.48}{x} \leq \frac{4\log\log(8x_0) + 12.48}{x_0} \leq \frac{26.4}{26.32} - 1$$

ce qui démontre (3.33).

4. Démonstration du théorème 1.1

Supposons K entier positif ; fixons $d = 2^{K+2}$ et $k = (2^d - 1)/3$. On a

$$2^d - 1 = 2^{2^{K+2}} - 1 = (2-1)(2+1)(2^2+1), \ldots, (2^{2^{K+1}} + 1)$$

et comme les nombres de Fermat $(2+1), (2^2+1), \ldots, (2^{2^{K+1}} + 1)$ sont premiers entre eux deux à deux (*cf.* [2, Th. 16]), $\Omega(2^d - 1) \geq K + 2$ et $\Omega(k) \geq K + 1$.

Par (1.13), il vient

$$A_1(x) \geq \frac{B_k(8x+k)}{\sqrt{8x/(3 \times 2^d)}(1 + \sqrt{(3 \times 2^d)/2x})} \gg B_k(x)/\sqrt{x}$$

et, par (3.29) et (3.26), on a

$$\frac{B_k(x)}{\sqrt{x}} \gg \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{g_k - 2}}{\log x} \geq \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^{\Omega(k)-1}}{\log x} \geq \frac{\sqrt{x}(\log\log x)^K}{\log x}$$

ce qui achève la preuve du théorème 1.1. □

5. Démonstration du théorème 1.2

5.1. Minoration de $A_0(x)$.

Proposition 5.1. *Soit α et x deux nombres réels vérifiant* (3.30). *Alors, $A_0(x)$ défini par* (1.1) *vérifie*

$$A_0(x) \geq \sqrt{\frac{9\alpha x \log\log x}{8}} \left(\frac{1 - 2\varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)}\right) \left(\frac{2}{3} - \frac{26.5}{(1-\alpha)(\log(8x))^{Q(\alpha)}}\right) \tag{5.1}$$

avec $Q(\alpha)$ défini en (2.21) *et*

$$\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{36\log\log(8x) + 116}{2x}} \leq 2.3 \times 10^{-21}. \tag{5.2}$$

Démonstration. Pour tout d pair, $d \geq 0$ et tout $x \geq 1$, la formule (1.14) donne

$$A_0(x) \geq \sqrt{\frac{3 \times 2^d}{8}} \sqrt{x} \left(\frac{1 - 2\beta(x)}{1 + \beta(x)}\right) \left(\frac{2}{3} - \frac{B_k(8x+k)}{x(1 - 2\beta(x))}\right) \tag{5.3}$$

avec $k = (2^d - 1)/3$, $\beta(x) = \sqrt{3 \times 2^d/(2x)}$ et $B_k(x)$ défini en (1.8).

On choisit d par (3.31) en fonction de α et x ; pour $\alpha < 1$ et $x \geq x_0 = e^{100}$,

$$\beta(x) \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon(x_0) \leq 2.3 \times 10^{-21}. \tag{5.4}$$

Par le lemme 3.4, il s'ensuit que

$$\frac{B_k(8x+k)}{x(1 - 2\beta(x))} \leq \frac{26.4/(1 - 4.6 \times 10^{-21})}{(1-\alpha)(\log(8x))^{Q(\alpha)}} \leq \frac{26.5}{(1-\alpha)(\log(8x))^{Q(\alpha)}}$$

et (5.1) découle de (5.3) et (3.31).

5.2. Démonstration du théorème 1.2 (ii). En faisant tendre x vers l'infini dans (5.1), on obtient pour tout $\alpha < 1$

$$\varliminf \frac{A_0(x)}{\sqrt{x \log\log x}} \geq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9\alpha}{8}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

ce qui prouve (ii).

5.3. Démonstration du théorème 1.2 (i). On choisit $\alpha = 0.253$ et $x \geq x_1 = \exp(1150000)$. Les inégalités (3.30) sont vérifiées et la proposition 5.1 donne

$$A_0(x) \geq \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{x\log\log x}\left(\frac{1-2\varepsilon(x_1)}{1+\varepsilon(x_1)}\right)\left(1-\frac{39.75}{(1-\alpha)(\log(8x_1))^{Q(\alpha)}}\right)$$
$$\geq 0.283\sqrt{x\log\log x}.$$

Pour $10 \leq x < x_1$, le résultat (1.4) donne $A_0(x) \geq 1.05\sqrt{x}$. Il en découle

$$A_0(x) \geq 1.05\sqrt{x} \geq \frac{1.05}{\sqrt{\log\log x_1}}\sqrt{\log\log x} \geq 0.281\sqrt{x\log\log x}.$$

Pour $e < x \leq 10$, comme $p(2) = 2$ est pair, $A_0(x) \geq 1$, et $\sqrt{x\log\log x} \leq \sqrt{10\log\log 10} < 1$, ce qui montre que (i) est encore vraie. □

Références

1. G. H. Hardy et S. Ramanujan, *The normal number of prime factors of a number n*, Quarterly J. of Math. **48** (1917), 76–92 ; Collected papers of S. Ramanujan, 262–275.
2. G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4th ed., Oxford, at the Clarendon Press, 1964.
3. K. Hatada, *Eigenvalues of Hecke operators on* SL(2, $\mathbb{Z}$), Math. Ann. **239** (1979), 75–96.
4. A. Ivić, *The Riemann zeta-function*, The theory of the Riemann Zeta-Function With Applications, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
5. N. Jochnowitz, *Congruences between systems of eigenvalues of modular forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 269–285.
6. E. Krätzel, *Lattice points*, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 33, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
7. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.* I, 2nd ed, Chelsea, New-York, 1953.
8. J.-L. Nicolas, *Valeurs impaires de la fonction de partition p(n)*, Int. J. Number Theory **2** (2006), n° 4, 469–487.
9. J.-L. Nicolas, I. Ruzsa et A. Sárközy, *On the parity of additive representation function*, J. Number Theory **73** (1998), n° 2, 292–317 (avec un appendice de J.-P. Serre).
10. K. Ono, *The web of modularity : arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 102. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences (Washington, DC), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
11. J. B. Rosser et L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois. J. Math. **6** (1962), 64–94.
12. J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Paris, 1970.
13. ———, *Congruences et formes modulaires*, Séminaire Bourbaki, 24e année (1971/1972), Exp. **416**, Lecture Notes in Math., vol. 317, Springer, Berlin, 1973, p. 319–338.
14. ———, *Valeurs propres des opérateurs de Hecke modulo ℓ*, Astérisque **24-25** (1975), 109–117.
15. ———, *Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, 16e année (1974/75), Théorie des nombres, Fasc. 1, Exp. **20**, Secrétariat Mathématique, Paris, 1975.
16. ———, *Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques*, Enseign. Math. **22**, 1976, 227–260.
17. H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On ℓ-adic representations and congruences for coefficients of modular forms*, Modular Functions of One Variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), Lecture Notes in Math., vol. 350, Springer, Berlin, 1973, p. 1–55.
18. ———, *On ℓ-adic representations and congruences for coefficients of modular forms. II.*, Modular Functions of One Variable, V (Proc. 2nd Internat. Conf., Univ. Bonn, 1976), Lecture Notes in Math., vol. 601, Springer, Berlin, 1977, p. 63–90.

19. J. Tate, *The non-existence of certain Galois extensions of* $\mathbb{Q}$ *unramified outside* 2, Contemp. Math. **174** (1994), 153–156.
20. G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours Spec. 1, Soc. Math. France, Paris, 1995 ; English transl., Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 46, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Institut Camille Jordan, UMR 5208, Bâtiment Doyen Jean Braconnier, Université Claude Bernard (Lyon 1), 21 Avenue Claude Bernard, F-69622 Villeurbanne, France.

E-mail address: jlnicola@in2p3.fr