PROBLEMES D'OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS ET APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES

J. L. NICOLAS

Cet article expose sur 3 exemples quelques interférences entre les problèmes d'optimisation en nombres entiers et la théorie de l'approximation diophantienne.

INTRODUCTION

La forme générale d'un problème de programmation mathématique (ou optimisation) est la suivante. On cherche à maximiser ou minimiser une fonction de k variables :

$$z = f(x_1, \dots, x_k)$$

Lorsque ces variables sont soumises à des contraintes :

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_k) \leq A_\alpha \quad \text{pour } \alpha \in I$$

Dans les problèmes de programmation (ou optimisation) en nombres entiers, nous imposerons en plus aux variables $x_1, \dots, x_k$, d'être entières.

Nous allons voir que certains problèmes d'approximation diophantiennes peuvent se mettre sous la forme de problèmes d'optimisation en nombres entiers et que, d'autre part, des problèmes d'optimisation en nombres entiers requièrent des résultats et des méthodes d'analyse diophantienne :

I - FRACTIONS CONTINUES.

On désigne par $[x]$ la partie entière de x, et si m est l'entier le plus proche de x, on pose

$$\{x\} = x - m \qquad \text{et} \quad \|x\| = \text{valeur absolue de } \{x\}.$$

A propos des fractions continues, le résultat suivant est souvent cité (cf. par exemple [2], théorème 181) : Les convergents p_n/q_n de x constituent la meilleure approximation rationnelle de x. Plus précisément : pour $q < q_n$, on a :

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \left| \frac{p}{q} - x \right| \quad \text{et} \quad \|q_n x\| < \|q x\|.$$

Autrement dit le dénominateur des convergents de x sont solution pour certaine valeur de Q des problèmes d'optimisation :

$$(1) \begin{cases} q \le Q \\ \min \frac{1}{q} \|q x\| \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} q \le Q \\ \min \|q x\| \end{cases}$$

Réciproquement, le problème 2 est résolu par exemple dans [3], p. 10. La solution est le dénominateur q_n vérifiant $q_n \le Q$.

Toute solution du problème 2 est aussi une solution du problème 1 :

$$q < q_n \quad \text{et} \quad \|q_n x\| < \|q x\| \Rightarrow \frac{1}{q_n} \|q_n x\| < \frac{1}{q} \|q x\|$$

mais le problème 1 a davantage de solutions.

Si $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ sont deux convergents consécutifs, on définit ([3], p. 16) les convergents intermédiaires pour $1 \le r < a_{n+2}$ par :

$$\frac{p_{n+1,\, r}}{q_{n+1,\, r}} = \frac{r\ p_{n+1} + p_n}{r\ q_{n+1} + q_n}$$

Lorsque $r = a_{n+2}$, on trouve $\dfrac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$. Les seules fractions $\dfrac{p}{q}$ de dénominateur $q \le q_{n+1}$ et situées entre $\dfrac{p_n}{q_n}$ et $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ sont les convergents intermédiaires $\dfrac{p_{n+1,\, r}}{q_{n+1,\, r}}$ qui forment une famille monotone en r, croissante si n est pair et décroissante sinon. Les solutions du problème 1 sont donc à prendre parmi les dénominateurs des convergents intermédiaires mais il ne faut pas les prendre tous.

Par exemple, pour $x = \Pi$, on a

$$\frac{p_o}{q_o} = \frac{3}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}$$

Les convergents intermédiaires sont :

$$\frac{7}{2}, \quad \frac{10}{3}, \quad \frac{13}{4}, \quad \frac{17}{5}, \quad \frac{19}{6},$$

et

$$\frac{25}{8}, \quad \frac{47}{15}, \quad \frac{69}{22}, \quad \frac{91}{29}, \quad \frac{113}{36}, \quad \frac{135}{43}, \quad \frac{157}{50}, \quad \dots, \quad \frac{311}{99}.$$

Les fractions $\frac{7}{2}$ et $\frac{10}{3}$ approchent moins bien π que 3 et ne seront pas solution du problème 1. De même $\frac{25}{8}, \dots, \frac{157}{50}$ seront de moins bonnes approximations que $\frac{22}{7}$.

Les convergents intermédiaires sont solution des problèmes 1 bis (lorsque n est pair) et 1 ter (lorsque n est impair)

$$\text{(1 bis)} \quad \begin{cases} q \leq Q \\ \{q\,\alpha\} > 0 \\ \min \|q\,\alpha\| \end{cases} \qquad\qquad \text{(1 ter)} \quad \begin{cases} q \leq Q \\ \{q\,\alpha\} < 0 \\ \min \|q\,\alpha\|' \end{cases}$$

Par exemple $\frac{7}{2}$ est la meilleure approximation par excès de π avec un dénominateur ≤ 2. (Cf [7] et [6], p. 163).

II -

T. L. Saaty a posé le problème suivant : "Etant donné un entier $C > 0$ trouver un entier n et des entiers $x_1, \dots, x_n$ satisfaisant la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$ et maximisant la quantité $\prod_{i=1}^{n} (x_i)^i$.

La solution de ce problème d'optimisation est la suivante : [5]

Soit $\quad a = \frac{\log 2}{\log 3}, \quad b = \frac{3\ a(1-a)}{9\ a(1-a) - 1}$. On a :

$$n = [(C-1)b] \text{ ou } [(C-1)b] + 1$$

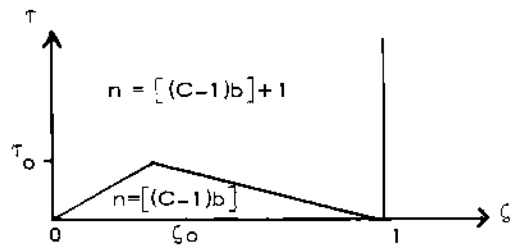
Lorsque n est fixé, on a :

$$x_1 = \dots = x_r = 1 \qquad \text{avec} \quad r = [(3n - C + 1)(1 - a)]$$

$$x_{r+1} = \dots = x_{r+s} = 2 \quad \text{avec} \quad r+s = [(3n - C + 1)a]$$

$$x_{r+s+1} = \dots = x_n = 3$$

Le choix de n est lié au comportement de $\tau = \{(C - 1)b\}$ et $\zeta = \{(C - 1)d\}$ avec $d = \dfrac{a}{9\,a(1 - a) - 1}$ suivant le graphique :



$$\tau_o = \frac{9\,a(1-a) - 2}{9\,a(1-a) - 1}$$

et

$$\zeta_o = \frac{(6\,a-1)(2-3\,a)}{9\,a(1-a) - 1}$$

III - NOMBRES HAUTEMENT COMPOSES.

Rappelons la définition de Ramanujan (cf. [8] et [4]). Un nombre n est hautement composé s'il a plus de diviseurs que les nombres qui le précèdent : Si $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n, on a :

$$n \text{ est h.c.} \Leftrightarrow m < n \Leftrightarrow d(m) < d(n)$$

Si ε est un réel > 0, on sait que $d(n) = o(n^{\varepsilon})$ (cf. [2], chap. 18). La fonction $\dfrac{d(n)}{n^{\varepsilon}}$ a donc un maximum absolu, qu'elle atteint en $n = N_{\varepsilon}$. Ce nombre est hautement composé car on a pour tout m :

$$\frac{d(m)}{m^{\varepsilon}} \le \frac{d(N_{\varepsilon})}{(N_{\varepsilon})^{\varepsilon}} \quad \text{et donc} \quad m < N_{\varepsilon} \Rightarrow d(m) \le \left(\frac{m}{N_{\varepsilon}}\right)^{\varepsilon} d(N_{\varepsilon}) < d(N_{\varepsilon})$$

La décomposition en facteurs premiers de N_{ε} est simple :

Soit $\quad x = 2^{1/\varepsilon}$ et $x_k = (x^{\log(1 + 1/k)})/\log 2$ pour $x_k \ge 2$.

Alors $N_\varepsilon = \prod_p p^{a_p}$ avec $a_p = k \Leftrightarrow x_{k+1} < p \leq x_k$

Ramanujan appelle cette famille de nombres N_ε hautement composés supérieurs.

Dans l'article [4], l'idée est de construire des nombres n_s voisins de N_ε. A partir de là, on peut majorer le nombre $Q(x)$ de nombre hautement composés $\leq X$. On obtient : $Q(X) \leq (\log X)^c$.

Lorsque N_ε est grand, posons pour simplifier l'écriture

$$y = x_2 = x^\theta \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{\log 3/2}{\log 2}$$

Désignons de la façon suivante, les nombres premiers consécutifs entourant x :

$$\ldots\ p_2 < p_1 \leq x < P_1 < P_2 < \ldots$$

Faisons de même pour y :

$$\ldots\ q_2 < q_1 \leq y < Q_1 < Q_2\ \ldots$$

Dans la décomposition en facteurs premiers de N_ε, les nombres premiers P_i, p_i, Q_i, q_i, ont comme exposant 0, 1, 1, 2.

On considère les nombres n_s, pour différentes valeurs de s :

$$n_s = N_\varepsilon \frac{Q_1\, Q_2 \ldots Q_s}{p_1\, p_2 \ldots p_r} \qquad \text{avec} \qquad r = [s\theta]$$

On a :

$$d(n_s) = d(N_\varepsilon)\, \frac{(3/2)^s}{2^r}$$

et

$$\log d(n_s) - \log d(N_\varepsilon) = \{s\,\theta\} \log 2$$

On sait par le théorème de Feldmann, prolongeant les travaux de Baker que $\theta = \dfrac{\log 3/2}{\log 2}$ ne peut pas avoir de trop bonnes approximations rationnelles : il existe C et k tels que :

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^k}$$

pour tous entiers p et q.

Les nombres $\{s\,\theta\}$ sont donc assez bien répartis dans l'intervalle $[0, 1]$ et on peut majorer le nombre de nombres hautement composés situés entre deux nombres n_s consécutifs.

NOMBRES SUPERABONDANTS.

Si l'on remplace la fonction $d(n)$ par $\frac{\sigma(n)}{n}$ où

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

dans la définition des nombres hautement composés, on obtient les nombres superabondants. Les nombres N_ε "supérieurs" deviennent les nombres colossalement abondants (voir [1]).

La décomposition en facteurs premiers de N_ε est

$$N_\varepsilon = \prod_p p^{a_p} \quad \text{avec} \quad a_p = k \Leftrightarrow x_{k+1} < p \le x_k$$

et les x_k sont définis par : $x = x_1$ et pour $k \ge 1$:

$$\frac{\log\left(1 + 1/(x_k^k + x_k^{k-1} + \ldots + x_k)\right)}{\log x_k} = \varepsilon$$

La relation qui lie $y = x_2$ à $x = x_1$ est plus compliquée :

$$\frac{\log\left(1 + 1/(y^2 + y)\right)}{\log y} = \frac{\log(1 + 1/x)}{\log x}$$

On peut écrire $y = x^{\theta(x)}$, mais θ va être une fonction de x. Dans l'étude des nombres n_s, la quantité $\{s\,\theta(x)\}$ interviendra comme précédemment.

Pour les valeurs de x, où $\theta(x)$ n'a pas de bonnes approximations rationnelles, la même théorie marche ; pour les autres valeurs de x, on ne sait pas conclure.

REFERENCES

[1] ERDOS P, NICOLAS J. L. : Répartition des nombres superabondants, Bull. Soc. Math. France, à paraître, (1974).

[2] HARDY G.H, WRIGHT E. M. : An introduction to the theory of numbers, Oxford at the Clarendon Press, 4ème edition, (1960).

[3] LANG S. : Introduction to Diophantine approximations, New-York, Addison Wesley, series in Mathematics, (1966).

[4] NICOLAS J.L. : Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Can. J. Maths, vol. XXIII, p. 116-130, (1971).

[5] NICOLAS J.L. : Sur un problème d'optimisation en nombres entiers de T.L. Saaty, R.A.I.R.O., à paraître.

[6] NIVEN I, ZUCKERMANN S. : An introduction to the theory of numbers, New-York, 3ème édition, John Wiley and sons, (1972).

[7] PERRON O. : Die Lehre von den Kettenbrüchen, New-York, Chelsea.

[8] RAMANUJAN S. : Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc., Ser. 14, p. 347-400, Collected papers p. 78-128, (1915).

Université de Limoges
Département de Mathématiques
U.E.R. des Sciences
87100 - LIMOGES