SUR DES TRAVAUX NON PUBLIES DE S. RAMANUJAN

G. ROBIN

décembre 1990

I - INTRODUCTION.

1. **La vie de Ramanujan.**
2. **Papiers retrouvés de Ramanujan.**

---

1. La vie de Ramanujan.

Srinivasa Ramanujan est né le 22-12-1887 à Erode près de Kumbakonam au sud de Madras aux Indes. Sa famille était assez pauvre, mais il put bénéficier d'une bourse d'études jusqu'en 1905. Dès qu'on lui parla mathématique il s'y intéressa. A 12 ans il lit un livre de trigonométrie, à 16 ans il vérifie les 6 000 formules d'un livre destiné aux étudiants de Cambridge pour s'exercer en vue de leur examen (Carr - "Synopsis of pure mathematics").

Jusqu'à son séjour en Angleterre et même après, construire de nouvelles formules fut pour lui un jeu dans lequel il était imbattable. Certaines d'entre-elles ne furent d'ailleurs démontrées que bien après sa mort.

Il dut quitter le collège en 1905 car il ne put obtenir de bourse, principalement à cause de ses faiblesses dans la langue anglaise ce qui d'ailleurs étonna les personnes qu'il rencontra plus tard car il s'exprimait très bien dans cette langue.

La période 1905-1910 est peu connue. On sait cependant qu'il a été étudier à Madras mais qu'il ne fut pas reçu à ses examens car il négligeait tout en dehors des mathématiques.

Il se maria en 1909 à l'âge de 21 ans et réussit à trouver du travail en 1912 comme employé au port de Madras grâce au mathématicien Ramachandra Rao.

C'est en 1911 qu'il fit sa première publication "Some properties of Bernouilli's numbers" dans le "Journal of the Indian Mathematical Society ".

Il essaya de prendre contact avec des mathématiciens anglais mais les deux premiers auxquels il s'adressa ne purrent rien déchiffrer parmi la multitude de formules et de théorèmes-la plupart sans démonstration- annoncés par Ramanujan. C'est Hardy, Professeur à Trinity College de Cambridge, à la suite d'une lettre de Ramanujan du 16 janvier 1913, qui se rendit compte que l'auteur de tout cela ne pouvait être qu'un mathématicien génial.

A peu près au même moment, Ramanujan réussit à avoir une bourse anglaise qui lui permit de quitter son emploi et de se concentrer sur ce qu'il aimait le plus. Hardy, de son côté, obtint la possibilité de faire venir Ramanujan en Angleterre et ce dernier y débarqua le 17 mars 1914. Il y resta 5 années, les deux dernières années assez malade. Il retourna aux Indes le 27 février 1919 et mourut le 26 avril 1920 à Madras.

La dernière lettre reçue par Hardy (20 janvier 1920) contient des résultats sur les fonctions "Mock" théta, une de ces plus profondes découvertes.

On trouvera dans [RAM 2] et [HAR 2] des détails plus importants sur la vie de Ramanujan.

Indiquons ici quelques formules typiques parmi les 120 envoyées par Ramanujan à Hardy avant sa venue en Angleterre.

- Pour les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\dots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\dots)}$$

où 1, 3, 6, 10... sont les sommes successives des premiers nombres entiers.

- Sur la sommation de séries

$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 - 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi}$$

- Sur les transformations de séries et d'intégrales

$$1 - \frac{x^2\,3!}{(1!\,2!)^3} + \frac{x^4\,6!}{(2!\,4!)^3} - \frac{x^6\,9!}{(3!\,6!)^3} + \dots$$
$$= \left\{1 + \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right\}\left\{1 - \frac{x}{(1!)^3} + \frac{x^2}{(2!)^3} + \dots\right\}$$

- Sur l'approximation dans le calcul d'intégrale ou de somme de série

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^x}{x!}\,\theta = \frac{e^x}{2}$$

avec

$$\theta = \frac{1}{3} + \frac{4}{135(x+k)} \quad \text{et} \quad \frac{8}{45} \le k \le \frac{2}{21}$$

- Sur les fractions continues.

$$\frac{4}{x+}\;\frac{1^2}{2x+}\;\frac{3^2}{2x+}\;\frac{5^2}{2x+}\;\dots = \left(\frac{\Gamma((x+1)/4)}{\Gamma((x+3)/4)}\right)^2$$

$$\frac{1}{1-}\ \frac{e^{-\pi}}{1+}\ \frac{e^{-2\pi}}{1-}\ \frac{e^{-3\pi}}{1+}\ \cdots = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{\pi}}.$$

2. Sur certains papiers retrouvés de Ramanujan.

Dans un article de 1915, [RAM 1], de 62 pages, Ramanujan étudie la fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de l'entier n et plus particulièrement les grandes valeurs de cette fonction. Compte tenu de difficultés financières du journal, le travail de Ramanujan n'avait pas été publié dans son intégralité. La partie non publiée a, semble-t-il, été égarée et n'a été retrouvée et publiée que dernièrement dans [RAM 2], pages 280-312.

Ce document est la recopie des notes de Ramanujan ; la liaison n'est pas parfaite avec l'article publié en 1915, et les paragraphes 52 et 58 sont incomplets. Le travail de Ramanujan est partagé en une vingtaine de paragraphes, où il fait l'étude de quelques fonctions arithmétiques.

Les paragraphes 52 à 57 traitent des grandes valeurs de fonctions suivantes :

$$Q_2(n) = \frac{1}{4} \operatorname{card} \{(x, y) ; n = x^2 + y^2\}$$

$$\overline{Q_2}(n) = \frac{1}{4} \operatorname{card} \{(x, y) ; n = x^2 + xy + y^2\}$$

$$d_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \ldots d_k = n} 1$$

Ramanujan adapte à ces fonctions les méthodes qu'il a définies lors de son étude de $d(n)$. Ceci nécessite l'introduction des fonctions qui comptent le nombre de diviseurs dans les progressions arithmétiques.

Les paragraphes 58 à 71 sont consacrés à l'étude de la fonction somme des diviseurs et plus généralement, pour $s \in \mathbb{R}$, de la fonction

$$\sigma_s(n) = \sum_{d \mid n} d^s.$$

Ne connaissant que l'étude de Ramanujan publiée en 1915 sur la fonction nombre de diviseurs, P. Erdös et L. Alaoglu , ([ALA]), ont publié en 1944 un article portant sur les grandes valeurs de la fonction $\sigma_1(n)$, point de départ d'une suite de contributions de P. Erdös, J.L. Nicolas et G. Robin, sur des questions voisines, [ERD], [NIC 1], [NIC 2], [ROB 1]. Les résultats obtenus par ces auteurs et par Ramanujan dans les papiers que l'on étudie actuellement concordent et se complétent.

Dans les paragraphes 72 à 74, Ramanujan traite des fonctions Q_4, Q_6, Q_8 où les fonctions Q_k sont définies par

$$Q_k(n) = \frac{1}{2k} \operatorname{card} \{ (x_1, x_2, ..., x_k) \ ; \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = n \}.$$

Pour cela, il utilise les fonctions sommes des diviseurs dans les progressions arithmétiques, fonctions aussi étudiées par G. Robin, dans [ROB3].

La présentation qui suit des travaux de Ramanujan a été exposée au cours de 6 séances de séminaire à Limoges au cours de l'année 1990-1991. S'adressant à un public assez large, nous avons détaillé toutes les fonctions utilisées par Ramanujan (ch. II et III), et rappelé les méthodes de théorie analytique des nombres utiles aux calculs effectués par Ramanujan (ch.IV).

II - SOMMES DE CARRES.

1. **Somme de 2 carrés.**
2. **Somme de 4 carrés.**
3. **Somme de s carrés pour s pair $s \geq 6$.**
4. **Somme de 3 carrés.**
5. **Sommes de s carrés pour s impair $s \geq 5$.**

---

1. Somme de 2 carrés (cf. [HAR1]).

C'est Euler, en 1749, qui le premier a montré que n est somme de 2 carrés si et seulement si $n = 2^m a^2 b$, b étant soumis à la condition : $p \mid b$ alors $p \equiv 1 \pmod 4$. Sa méthode utilisait les deux remarques suivantes :

(i) Si $p \mid a^2 + b^2$, p premier, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ alors $p = c^2 + d^2$,

(ii) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$.

Jacobi, en 1847, a montré que le nombre de façons de représenter n comme somme de 2 carrés est

$$(1) \qquad r_2(n) = 4 \sum_{d \mid n} \chi(d),$$

χ étant le caractère non principal modulo 4, défini par $\chi(n) = 0$ si n est pair, $\chi(n) = 1$ si $n \equiv 1 \pmod 4$, $\chi(n) = -1$ si $n \equiv 3 \pmod 4$.
Pour cela il utilisait les formules

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} \Big)^2 &= \Big(1 + 2 \sum_{n \geq 1} q^{m^2}\Big)^2 \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1+q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} - \dots \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1+q^2} - \frac{4q^6}{1-q^3} + \frac{4q^{10}}{1+q^4} - \dots \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} r_2(n)\, q^n. \end{aligned}$$

Lorentz a retrouvé la valeur de $r_2(n)$, en prouvant, en 1874, la formule

$$(3) \qquad \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2 + n^2} = 1 + 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(4m+1)n} - q^{(4m+3)n}.$$

Jacobi a aussi montré que l'ordre moyen de $r_2(n)$ est π soit

$$(4) \qquad \sum_{n \leq N} r(n) \sim \pi N,$$

formule précisée par la suite par l'étude du problème dit "du cercle de Gauss",

$$(5) \qquad \sum_{n \leq N} r(n) = \pi N + E(N).$$

La conjecture $E(N) = O(N^{1/4+c})$, $c > 0$, n'est pas encore démontrée ; Littlewood et Walfisz ont montré que $E(N) = O(N^{27/82+c})$ et Hardy et Landau que $E(N) = \Omega(N^{1/4})$. Ramanujan, en 1920, a montré que l'ordre maximum de $\log r_2(n)$ est

$$\log 2 \log n \ / \ \log\log n.$$

2. Somme de 4 carrés.

Lagrange, en 1770, a montré que tout entier est somme de 4 carrés et Jacobi, en 1829, que le nombre $r_4(n)$ de façons de représenter n comme somme de 4 carrés est

$$(6) \qquad \begin{aligned} r_4(n) &= 8\,\sigma(n) \text{ si } n \text{ est impair,} \\ r_4(n) &= 24\,\sigma(m) \text{ si } n = 2^k m \text{ et } m \text{ impair,} \end{aligned}$$

avec

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d.$$

Pour cela, il démontra les formules

$$(7) \qquad \begin{aligned} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\Big)^4 &= 1 + \sum_{n \geq 1} r_4(n)\, q^n \\ &= 1 + 8\Big(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \ldots\Big) \\ &= 1 + 8 \sum_{p \text{ impair}} \sigma(p)\,(q^p + 3q^{2p} + 3q^{8p} + \ldots). \end{aligned}$$

Dans [HAR1] on peut trouver deux démonstration du théorème sur les quatre carrés, dont une utilisant les quaternions.

La formule (7) de Jacobi reléve de la théorie des fonctions elliptiques et n'est pas évidente. Une démonstration élémentaire peut être obtenue à partir de (2), (cf. [HAR 1] p. 311 et [HAR 2]). On peut trouver dans [LAN] une démonstration élémentaire de (6) à partir de (1).

Landau a calculé l'ordre moyen de $r_4(n)$ soit $\pi^2 n$, c'est-à-dire

$$(8)\qquad \sum_{n \le N} r_4(n) = \frac{1}{2}\pi^2 N^2 + O(N^{1+\varepsilon}).$$

3. Sommes de s carrés, s pair, s ≥ 6.

Jacobi a démontré, en 1829, les deux formules

$$(9)\qquad r_6(n) = 16 \sum_{d \mid n} \chi\left(\frac{n}{d}\right) d^2 - 4 \sum_{d \mid n} \chi(d)\ d^2$$

$$(10)\qquad r_8(n) = 16(-1)^n \sum_{d \mid n} (-1)^d\ d^3 ,$$

χ étant le caractère défini au §1.

Ces formules sont obtenues à partir des relations

$$(11)\qquad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^6 = 16\left(\frac{1^2 x}{1+x^2} + \frac{2^2 x^2}{1+x^4} + \dots\right) - 4\left(\frac{1^2 x}{1-x} - \frac{3^2 x^3}{1-x^3} + \frac{5^2 x^5}{1-x^5} - \dots\right)$$

$$(12)\qquad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^8 = 1 + 16\left(\frac{1^3 x}{1+x} + \frac{2^3 x^2}{1-x^2} + \frac{3^3 x^3}{1+x^3} + \dots\right).$$

On pourra en trouver une preuve dans [HAR 2].

Glaisher en 1907 a ensuite calculé r_{2a} pour $a = 5..9$, par exemple

$$(13)\qquad r_{10}(n) = \frac{4}{5}\left(\sum \chi(d) d^4 + 16 \sum \chi(n \mid d) d^4 + 2 \sum_{a^2+b^2=n} (a+ib)^4\right)$$

$$(14)\qquad r_{12}(n) = -8 \sum (-1)^{d+n \mid d} d^5.$$

Ramanujan a donné, en 1916, une expression de r_{2a} pour $a = 10..12$.

La formule de Ramanujan, pour r_{24}, (cf. [HAR 2] ch. 9 et ch. 10), fait intervenir la célèbre fonction $\tau(n)$.

$$(15)\qquad r_{24}(n) = \frac{16}{691} \sigma^*_{11}(n) + \frac{128}{691} \{(-1)^{n-1}\, 259\, \tau(n) - 512\, \tau(n/2)\}$$

avec

(16) $$\sigma^*_{11}(n) = \sigma_{11}(n) \quad \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$= \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ pair}}} d^{11} - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ impair}}} d^{11} \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

et où $\tau(n)$ est définie par

(17) $$\sum \tau(n)\, x^n = x \prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^{24}.$$

Mordell a démontré que $\tau(n)$ est multiplicative. La conjecture de Ramanujan $\tau(n) = O(n^{11/2+\varepsilon})$ a été prouvée par Deligne.

Comme $\sigma^*_{11}(n)$ est d'ordre n^{11}, le comportement de $r_{24}(n)$ est essentiellement celui de $\sigma^*_{11}(n)$.

4. Somme de 3 carrés. (cf. [LAN] p. 151).

Legendre, en 1798, obtint le résultat :
n est somme de 3 carrés ssi

$$n = 4^a m \quad \text{avec} \quad m \not\equiv 7 \pmod 8),$$

Gauss détermina $r_3(n)$ en 1801. Dirichlet en 1840, puis Eisenstein en 1847, ont précisé le résultat en utilisant le nombre de classes de formes binaires.

(18) $$r_3(n) = 24 \sum_{s=1}^{[m/4]} \left(\frac{s}{m}\right) \quad \text{si } m \equiv 1 \pmod 4)$$

$$r_3(n) = 8 \sum_{s=1}^{[m/2]} \left(\frac{s}{m}\right) \quad \text{si } m \equiv 3 \pmod 4).$$

La preuve du théorème de Legendre utilise les formes binaires, les formes ternaires et leurs réductions.
En 1860, Kronecker écrit

(19) $$r_3(n) = 24\, f(n) - 12\, g(n),$$

formule dans laquelle $f(n)$ désigne le nombre de classes de formes binaires $ax^2 + bxy + cy^2$ de discriminant $-n$ et $g(n)$ le nombre de classes des mêmes formes binaires, mais avec a ou c impair, (voir définition §1, ch.III).

L'ordre moyen de $r_3(n)$ est $2\pi\, n^{1/2}$ comme l'a prouvé Landau en 1912, soit

(20) $$\sum_{n \leq N} r_3(n) = \frac{4}{3} \pi N^{3/2}.$$

5. Sommes de s carrés pour s impair $s \geq 5$, (cf. [DIC] p. 263 et p. 305).

Eisenstein en 1847, puis en 1850, établit des formules pour r_5 et r_7. On suppose que m est sans facteurs carrés. Posons

$$s = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \left(\frac{k}{m}\right) k$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{(m-1)/2} (-1)^k \left(\frac{k}{m}\right) k$$

alors

(21) $r_5(m) = -80s, -80\sigma, -112s, 80\sigma$ selon que m est congru à 1, 3, 5, 7 (mod 8).

De même

(22) $$r_7(m) = -16 \times 37 \sum_{k=1}^{m/2} \left(\frac{k}{m}\right) k^2 \quad \text{si} \quad m \equiv 7 \pmod 8$$

$$= 8 \times 35 \left\{ \frac{1}{3} m^2 \sum_{k=1}^{m/2} \left(\frac{k}{m}\right) - 2 \sum_{k=1}^{m/2} \left(\frac{k}{m}\right) k^2 \right\} \quad \text{si} \quad m \equiv 3 \pmod 8$$

$$= 28 \sum_{\substack{k<m \\ k \text{ impair}}} (-1)^{(k-1)/2} \left(\frac{k}{m}\right) k(2m-k) \quad \text{si} \quad m \equiv 1 \pmod 8.$$

III - REPRESENTATION D'UN ENTIER PAR UNE FORME QUADRATIQUE BINAIRE DEFINIE POSITIVE.

---

1. Principaux résultats, [FLA], [GAU].

Réduction des formes binaires

On considére ici les formes, à coefficients entiers

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, définies positives.

Deux formes f et g de même discriminant Δ seront dite proprement équivalentes ssi il existe $M = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ telle que dét $M = 1$ et $f(xr + ys, xt + yu) = g(x, y)$.

Définition : une forme $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ est primitive ssi $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$.

Définition : une forme $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ est réduite si

$$|b| \leq a \leq c$$

et $b \geq 0$ si a est égal à $|b|$ où à c

Théorème 1

(i) Chaque classe d'équivalence contient une et une seule forme réduite,

(ii) Le nombre de classes $H(\Delta)$ est fini,

(iii) Le nombre de classes de formes primitives $h(\Delta)$ est fini ,

(iv) $H(\Delta) = \sum_{\substack{g^2 \mid \Delta \\ \Delta g^{-2} \text{ discriminant}}} h(\Delta g^{-2})$.

Théorème 2

Soit Δ un discriminant négatif, n un entier premier à Δ et $f_1, f_2, ..., f_{h(\Delta)}$, les formes réduites.

Le nombre $\psi(n)$ de façons d'écrire n à l'aide d'une de ces formes, c'est à dire

$$\psi(n) := \text{card}\,\{(x, y, i)\ ,\ 1 \le i \le h(\Delta)\ )\ /\ n = f_i(x, y)\}$$

est

$$\psi(n) = \omega \sum_{d \mid n} \left(\frac{\Delta}{d}\right)$$

avec $\omega = 2$ si $\Delta < -4$, $\omega = 4$ pour $\Delta = -4$ et $\omega = 6$ pour $\Delta = -3$.

Définition : Le symbole de Kronecker $\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ est défini comme suit pour $\Delta \equiv 0,1 \pmod 4$ et $d \in \mathbb{Z}$.

- $\left(\frac{\Delta}{d}\right) = \left(\frac{\Delta}{-d}\right)$ signe (Δ)
- Si d est positif et impair, $\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ est le symbole de Jacobi
- $\left(\frac{\Delta}{mn}\right) = \left(\frac{\Delta}{m}\right)\left(\frac{\Delta}{n}\right)$
- $\left(\frac{\Delta}{2}\right) = 1$ si $\Delta \equiv 1 \pmod 8$
  $= -1$ si $\Delta \equiv 5 \pmod 8$.

Corollaire : Un nombre premier impair p ne divisant pas Δ (non carré parfait) est représentable par une forme de discriminant Δ ssi

Δ est un carré modulo p

2. Nombre de façons d'écrire n sous la forme $n = x^2 + y^2$.

$x^2 + y^2$ est une forme binaire de discriminant -4 et $h(-4) = 1$. Le théorème 2 donne pour tout n impair

$$r_2(n) = \psi(n) = 4 \sum_{k \mid n} \left(\frac{-4}{k}\right) = 4 \sum_{k \mid n} \left(\frac{-1}{k}\right)$$

soit

$$\psi(n) = 4\,(d_1(n) - d_3(n))$$

c'est à dire $\psi(n)$ vaut 4 fois le nombre de diviseurs $\equiv 1 \pmod 4$ - 4 fois le nombre de diviseurs de $n \equiv 3 \pmod 4$.

On remarque ensuite que pour tout n, $\psi(2n) = \psi(n)$ puisque si $n = x^2 + y^2$, $2n = (x + y)^2 + (x - y)^2$ et que si $2n = z^2 + u^2$ alors $n = \left(\frac{z + u}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - u}{2}\right)^2$.

Pour tout n, on peut donc écrire $\psi(n) = 4\,(d_1(n) - d_3(n))$, les diviseurs pairs n'intervenant pas.

Ecrivons

$$n = 2^{\alpha} \prod_{p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4)} p^s \prod_{q\equiv 3(\mathrm{mod} 4)} q^t .$$

Il est aisé de voir que si pour tout q, l'exposant t est pair,

$$\psi(n) = \psi\Big(\prod_{p\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)} p^s\Big) = 4\,d\Big(\prod_{p\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)} p^s\Big) = 4 \prod_{p\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)} (s+1)$$

sinon $\psi(n) = 0$.

Les nombres premiers représentables par $x^2 + y^2$ sont donc avec 2 les nombres congrus à 1 modulo 4.

3. Nombre de façons d'écrire n sous la forme $n = x^2 + 2y^2$.

$x^2 + 2y^2$ est une forme binaire de discriminant -8 et h (-8) = 1 donc pour tout n impair

$$\psi(n) = 2 \sum_{k \mid n} \left(\frac{-8}{k}\right) = 2 \sum \left(\frac{-1}{k}\right)\left(\frac{2}{k}\right).$$

$\left(\frac{-1}{k}\right)$ et $\left(\frac{2}{k}\right)$ sont de même signe si $k \equiv 1$ ou 3 (mod 8) et de signes contraires si $k \equiv 5$ ou 7 (mod 8), donc $\psi(n)$ vaut 2 fois le nombre de diviseurs $\equiv 1$ ou 3 - 2 fois le nombre de diviseurs $\equiv 5$ ou 7 (mod 8)).

On remarque que (i) $\psi(2n) = \psi(n)$ pour tout n,

(ii) si $m = q^{\alpha} m'$ avec $q \equiv 5$ ou 7 et si $\delta \mid m'$ alors $\delta, \delta q, \dots \delta q^{\alpha}$ sont diviseurs et que si $\left(\frac{-8}{v}\right) = \pm 1$, $\left(\frac{-8}{vq}\right) = \mp 1$. Donc, si α est impair, la contribution de tous les diviseurs est nulle.

Ainsi si

$$n = 2^{\alpha} \prod_{p\equiv 1,3(\mathrm{mod} 8)} p^s \prod_{q\equiv 5,7(\mathrm{mod} 8)} q^t ,$$

et si tous les exposants t sont pairs

$$\psi(n) = \psi\Big(\prod_{p\equiv 1 \text{ ou } 3(\mathrm{mod}\ 8)} p^s\Big) = 4\,d\Big(\prod_{p\equiv 1 \text{ ou } 3(\mathrm{mod} 8)} p^s\Big) = 4 \prod_{p\equiv 1 \text{ ou } 3(\mathrm{mod} 8)} (s+1),$$

sinon $\psi(n) = 0$

Les nombres premiers représentables par $x^2 + 2y^2$ sont avec 2 les nombres premiers congrus à 1 ou 3 modulo 8.

4. Nombre de façons d'écrire n sous la forme $n = x^2 + xy + y^2$.

La forme $x^2 + xy + y^2$ est une forme binaire de discriminant -3 et $h(-3) = 1$. Pour tout $n \not\equiv 0 \pmod 3$, on a donc

$$\psi(n) = 6 \sum_{k \mid n} \left(\frac{-3}{k}\right).$$

Si $k = 2^{\alpha} k'$, k' impair on a
$$\left(\frac{-3}{k}\right) = \left(-\frac{3}{2^{\alpha}}\right)\left(-\frac{3}{k'}\right) = \left(-\frac{3}{2^{\alpha}}\right)\left(\frac{k'}{3}\right) = (-1)^{\alpha}\left(\frac{k'}{3}\right) \text{ puisque } -3 \equiv 5 \pmod 8.$$

Ecrivons $n = 2^a n'$ avec n' impair. Pour $k \mid n'$ la contribution des diviseurs $k, 2k, .., 2^a k$ est

$$6\left(\frac{k}{3}\right)(1 - 1 + \dots\dots) = 0 \text{ si } a \text{ est impair}$$
$$= 6\left(\frac{k}{3}\right) \text{ si } a \text{ est pair.}$$

Ainsi, si a est impair, $\psi(n) = 0$ et si a est pair, $\psi(n) = 6$ fois le nombre de diviseurs congrus à 1 modulo 3 -6 fois le nombre de diviseurs congrus à 2 modulo 3.
On remarque que $\psi(3n) = \psi(n)$.

Finalement si

$$n = 3^{\beta} \prod_{p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)} p^s \prod_{q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)} q^t,$$

on a

$$\psi(n) = \psi(\prod p^s) = 6\, d(\prod p^s) = 6 \prod_{p \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)} (s + 1)$$

si tous les t sont pairs, 0 sinon.

Les nombres premiers représentables par $x^2 + xy + y^2$ sont avec 3 les nombres premiers congrus à 1 modulo 3.

5. Nombre de façons d'écrire n sous la forme $n = x^2 + 3y^2$.

Ici le discriminant est -12 et $h(-12) = 1$. Donc, si n est premier avec 6, on a :

$$\psi(n) = 2 \sum_{k \mid n} \left(-\frac{12}{k}\right) = 2 \sum_{k \mid n} \left(\frac{k}{3}\right).$$

On a $3 = 0^2 + 3 \cdot (+1)^2$ et par suite $\psi(3^b n) = \psi(n)$ pour toute puissance b.

Si n, non divisible par 3, est représentable alors $n \equiv 1 \pmod 3$. Par suite 2n n'est pas représentable mais 4n est représentable et chaque représentation de n donnera 3 représentations de 4n. En effet $(2x, 2y)$; $(x + 3y , x - y)$; $(x + 3y , y - x)$ représentent 4n.

Par suite
$$\begin{aligned}\psi(2^a m) &= \psi(m) \text{ si } a = 0\\ &= 3\psi(m) \text{ si } a \text{ est pair} \geq 2\\ &= 0 \text{ si } a \text{ est impair}\end{aligned}$$
ou encore
$$\begin{aligned}\psi(2^a m) &= 2\,E(m) \text{ si } a = 0\\ &= 6\,E(m) \text{ si } a \text{ est pair} \geq 2\\ &= 0 \text{ si } a \text{ impair}\end{aligned}$$
où E(m) est le nombre de diviseur $\equiv 1 \pmod 3$ - le nombre de diviseurs $\equiv 2 \pmod 3$.

$$\text{Finalement, } n = 2^a 3^b \prod_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)} p^s \prod_{\substack{q \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)\\ q \neq 2}} q^t,$$

est représentable ssi tous les exposants t ainsi que a sont pairs ,
$$\begin{aligned}\text{et } \psi(n) &= 2 \prod_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)} (s+1) \text{ si } a = 0\\ &= 6 \prod_{p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)} (s+1) \text{ si } a \text{ pair} \geq 2\end{aligned}$$

6. Nombre de façons d'écrire n à l'aide d'une forme binaire de discriminant -15.

- 15 est le premier discriminant dont le nombre de classes est 2. Il y a donc deux formes primitives réduites
$$\begin{aligned}f_0 &= x^2 + xy + 4y^2\\ f_1 &= 2x^2 + xy + 2y^2.\end{aligned}$$
4 est représentable par f_0 et non par f_1 ce qui prouve que f_0 et f_1 ne sont pas équivalentes.

Un nombre premier p, distinct de 3 et 5, est représentable ssi $\left(\frac{-15}{p}\right) = 1$ soit $\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{5}\right) = 1$. Par suite p est représentable par f_0 ssi p est un carré modulo 3 et 5 et par f_1 ssi p n'est carré ni modulo 3, ni modulo 5.

L'homorphisme de Gauss $\omega_{15} : \{f_0 , f_1\} \to E_{15} / E_{15}^2$ est défini par:

$$f_0 \to \dot{1} \text{ et } f_1 \to \dot{2}.$$

Pour n premier avec 3 et 5, on a

$$\psi(n) = 2 \sum_{k \mid n} \left(\frac{-15}{k}\right) = 2 \sum_{k \mid n} \left(\frac{k}{3}\right)\left(\frac{k}{5}\right),$$

soit $\psi(n) = 2$ fois le nombre de diviseurs $\equiv 1, 2, 4$ ou $8 \pmod{15}$ - 2 fois le nombre de diviseurs $\equiv -1, -2, -4$ ou $-8 \pmod{15}$.

Si n n'est pas divisible par 3 ou 5, n est représentable par f_0 ssi

$$n = \prod_{p \equiv 1 \text{ ou } 4 \,(\mathrm{mod} 15)} p^s \prod_{q \equiv 2 \text{ ou } 8 \,(\mathrm{mod}\ 15)} q^t \prod_{r \equiv -1, -2, -4, -8 \,(\mathrm{mod}\ 15)} r^u$$

avec tous les exposants u et la somme des exposants t est paire, (ce qui entraîne $n \equiv 1$ ou $4 \pmod{15}$) et alors $\psi(n) = 2\Pi(s+1)\ \Pi(t+1)$.

Si n n'est pas divisible par 3 ou 5, n est représentable par f_1 ssi les exposants u sont pairs, et si la somme des exposants t est impaire, (n est donc congru à 2 ou 3 (mod 15)) et

$$\psi(n) = 2\,\Pi(s+1)\ \Pi(t+1).$$

3 et 5 sont représentables par f_1, 5 par $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ et 3 par $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

Par suite 15 est représentable par f_0, soit par $(1, -2)$ et $(-1, 2)$.

Plus généralement $3^a 5^b$ est représentable par f_0 si $a + b$ est pair, par f_1 sinon et le nombre de représentations est toujours de 2.

Finalement, écrivons

$$n = 3^a 5^b \prod_{p \equiv 1 \text{ ou } 4 \,(\mathrm{mod} 15)} p^s \prod_{q \equiv 2 \text{ ou } 8 \,(\mathrm{mod}\ 15)} q^t \prod_{r \equiv -1, -2, -4, -8 \,(\mathrm{mod}\ 15)} r^u.$$

S'il existe un u impair, n n'est représentable par aucune des 2 formes.

Si tous les exposants u sont pairs et si $\sum t + a + b$ est pair, alors n est représentable par f_0, sinon n est représentable par f_1, et

$$\psi(n) = 2\Pi(s+1)\,\Pi(t+1).$$

Ainsi (i) $3.5^2.19.2^3.23.29^2$ est représentable par f_1 puisque $29 \equiv -1 \pmod{15}$ est d'exposant 2 ; $a + b + \sum t = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$ et $\psi(n) = 2d(19).d(2^3 . 23) = 32$.

(ii) Les nombres premiers représentables par f_0 sont ceux qui sont congrus à 1 ou 4 modulo 15 ; ceux qui sont représentables par f_1 sont, avec 3 et 5, les premiers congrus à 2 ou 8 modulo 15.

7. Nombre de façons d'écrire n à l'aide d'une forme quadratique binaire de discriminant -20 et irréductibles dans $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$.

$h(-20) = 2$ et les 2 formes réduites sont $f_0 = x^2 + 5y^2$ et $f_1 = 2x^2 + 2xy + 3y^2$.
Un nombre premier p est représentable ssi $\left(\frac{-20}{p}\right) = 1$ ou si p vaut 2 ou 5.

On peut écrire $\left(\frac{-20}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right)$.

On a $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = 1$ ssi $p \equiv 1, 9 \pmod{20}$ et p est représentable par f_0 et $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = -1$ ssi $p \equiv 3, 7 \pmod{20}$ et dans ce cas p est représentable par f_1.

D'autre part, 2 est représentable par f_1 et 5 par f_0.
Si n n'est pas divisible par 2 ou 5, le nombre $\psi(n)$ de façons de représenter n sous une des deux formes f_0 ou f_1 est $\psi(n)$ = 2 fois le nombre de diviseurs $\equiv 1, 3, 7, 9$ diminué de 2 fois le nombre de diviseurs $\equiv -1, 3, -7, -9$, modulo 20.

$$\text{Soit } n = \prod_{p \equiv 1, 9 \ (\mathrm{mod}\ 20)} p^s \prod_{q \equiv 3, 7 \ (\mathrm{mod}\ 20)} q^t \prod_{r \equiv -1, -3, -7, -9 \ (\mathrm{mod}\ 20)} r^u$$

* n est représentable par f_0 ssi tous les exposants u sont pairs et si $\sum t$ est pair et le nombre de façons de représenter n par f_0 est $\psi(n) = 2\Pi(s+1)(t+1)$ (n n'est pas alors représentable par f_1).

* n est représentable par f_1 ssi les exposants u sont pairs et si $\sum t$ est impair et l'on a $\psi(n) = 2\,\Pi(s+1)\ \Pi(t+1)$.

$$\text{Soit maintenant } n = 2^a 5^b \prod_{p \equiv 1, 9 \ (\mathrm{mod}\ 20)} p^s \prod_{q \equiv 3, 7 \ (\mathrm{mod}\ 20)} q^t \prod_{r \equiv -1, -3, -7, -9 \ (\mathrm{mod}\ 20)} r^u$$

- S'il existe un exposant u impair, n n'est pas représentable.
- Si tous les exposants u sont pairs,

Si $\sum t + a$ est pair alors n est représentable par f_0, sinon n est représentable par f_1 et

$$\psi(n) = 2\,\Pi(s+1)\ \Pi(t+1).$$

Exemples. (i) $13 = 2.3^2$ est représentable par f_1 de 6 façons.
(1, 2) ; (-1, -2) ; (±3, 0) ; (3, -2) ; (-3, 2).

(ii) Les premiers représentables par f_0 sont 5 et ceux congrus à 1 ou 9 modulo 20 ; ceux représentables par f_1 sont 2 et les premiers congrus à 3 ou 7 modulo 20.

L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ est $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$. On veut déterminer les irréductibles de $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$.

Soit p un nombre premier de $\mathbb{Z}$, p est réductible ssi $p = (a + ib\sqrt{5})(a - ib\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$. Si p n'est pas représentable par f_0 alors p est irréductible, c'est le cas si $p \equiv 3, 7, 11, 13, 17$ ou 19 modulo 20.

Si p est représentable par f_0 alors $p = (a + ib\sqrt{5})(a - ib\sqrt{5})$ et les nombres $a \pm ib\sqrt{5}$ sont irréductibles puisque leur norme p est un nombre premier.

Si p et q sont représentables par f_1, pq est représentable par f_0 donc $pq = (c + id\sqrt{5})(c - id\sqrt{5})$, (sauf $p = q = 2$), et les nombres $(c \pm id\sqrt{5})$ sont irréductibles car leur norme pq n'est pas le produit de 2 normes d'irréductibles.

8. Nombre de façons d'écrire un entier n à l'aide d'une forme binaire de discriminant -39.

- 39 est le plus petit discriminant dont le nombre de genres 2 est différent de 1 et du nombre de classes qui est 4.

Les 4 formes réduites sont

$$f_0 = x^2 + xy + 10y^2$$
$$f_1 = 2x^2 + xy + 5y^2$$
$$f_2 = 3x^2 + 3xy + 4y^2$$
$$f_3 = 2x^2 - xy + 5y^2.$$

Dans le groupe $\mathcal{C}$ des classes $f_1^2 = f_2$, $f_1^3 = f_3$; f_1 et f_3 sont improprement équivalentes.

$E_{39}^2 = (1, 4, 10, 16, 21, 25)$ sépare E_{39} en 4 classes E_{39}^2, $2E_{39}^2$, $7E_{39}^2$ et $14E_{39}^2$, et $E_{39} / E_{39}^2 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Les éléments de $2\,E_{39}^2$ sont les n tels que $\left(\frac{n}{3}\right) = \left(\frac{n}{13}\right) = -1$.

La suite suivante, dans laquelle $\chi_\Delta(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right) = \left(\frac{n}{|\Delta|}\right)$,

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\omega_{-39}} E_{39}/E_{39}^2 \xrightarrow{\chi_\Delta} \left\{\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right\},$$

est exacte. Le noyau de χ_Δ est E_{39}^2. f_0 et f_2 ont pour image E_{39}^2 et f_1 et f_3, $2\,E_{39}^2$.

Ainsi p est représentable par f_0 ou f_2 si $p \equiv 1, 4, 10, 16, 22, 25 \pmod{39}$ et par f_1 et f_3 (car f_1 et f_3 sont improprement équivalentes) si $p \equiv 2, 5, 8, 11, 20, 32 \pmod{39}$.

Un nombre $m = \prod_{p \in A} p^a \prod_{p \in 2A} p^b \prod_{p \in 7A} p^c \prod_{p \in 14A} p^d$ avec $A = E_{39}^2$ ne peut être représenté que si tous les exposants c et d sont pairs.

Le nombre de représentations $\psi(m)$ de m sous l'une des 4 formes est alors $\psi(m')$ avec $m' = \prod_{p \in A} p^a \prod_{p \in 2A} p^b$, soit $2 \sum_{d \mid m'} \left(\frac{-39}{d}\right)$. Dans tous les cas $\left(\frac{-39}{d}\right) = 1$ puisque $\left(\frac{-39}{d}\right) = \left(\frac{d}{39}\right) = \left(\frac{d}{3}\right)\left(\frac{d}{13}\right) = 1.1$ ou $-1.-1$. Ainsi $\psi(m) = 2\, d(m')$.

Si $m' \bmod 39 \in A$, m est représentable par f_0 ou f_2 et on ne sait dire combien par f_0, combien par f_2.

Ainsi $\psi(16) = 10$ et il y a 6 représentations par f_0

$$(\pm 4, 0)\ (2, 1)\ (-2, -1)\ (-3, 1)\ (3, -1)$$

et 4 représentations par f_2,

$$(0, \pm 2)\ ,\ (-2, 2)\ ,\ (2, -2).$$

Ainsi $\psi(25) = 6$ et il y a 2 représentations par f_0 $(\pm 5, 0)$ et 4 par f_2

$$(1, 2)\ ;\ (-1, -2)\ ;\ (3, -2)\ ;\ (-3, 2).$$

Si $m' \bmod 39 \in 2A$, m est représentable à la fois par f_1 et f_3 car si (x, y) donne la représentation pour f_1, $(-x, y)$ est une représentation pour f_3. Ainsi le nombre de représentations par f_1 (ou f_3) est $d(m')$.

Reste le cas des facteurs 3 et 13 ; 3 et 13 sont représentables par f_2 uniquement ; 3 par $(\pm 1, 0)$, 13 par $(-1, 2)$ et $(1, -2)$.

Finalement écrivons

$$n = 3^a\, 13^b \prod_{p \in A} p^r \prod_{p \in 2A} p^s \prod_{p \in 7A} p^t \prod_{p \in 14A} p^u.$$

Alors n est représentable par une des formes si tous les exposants t et u sont pairs ;

La représentation se fait par une forme f_0 ou f_2 si $a + b + \sum s$ est pair et

$$\psi(n) = 2\Pi(r + 1)\ \Pi(s + 1).$$

Si $a + b + \sum s$ est impair, il y aura $\Pi(r + 1)\ \Pi(s + 1)$ représentations par f_1 et autant par f_3.

IV. Formules explicites et applications.

1. **Définitions.**
2. **Formules explicites.**
3. **Sommes des inverses des zéros de fonctions $L(s, \chi)$.**
4. **Calculs dans les progressions arithmétiques de raison 4.**
5. **Calculs dans les progressions arithmétiques de raison 3.**
6. **Sur la somme $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho - s}$.**
7. **Une formule.**

---

1. Définitions.

(1) $$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{p^n \le x} \log p$$

Pour tout caractère modulaire χ,

(2) $$\psi(x, \chi) = \sum_{n \le x} \chi(n) \; \Lambda(n)$$

(3) $$\Pi(x, \chi) = \sum_{n \le x} \chi(n) \; \Lambda(n) / \log n$$

(4) $$\psi(x \,;\, k, l) = \sum_{\substack{p^m \equiv l (\mathrm{mod}\ k) \\ p^m \le x}} \log p$$

(4') $$\theta(x \,;\, k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l (\mathrm{mod}\ k) \\ p \le x}} \log p$$

(5) $$\Pi(x \,;\, k, l) = \sum_{\substack{p^m \equiv l (\mathrm{mod}\ k) \\ p^m \le x}} 1/m$$

(6) $$\pi(x \,;\, k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l (\mathrm{mod}\ k) \\ p \le x}} 1$$

On a alors

(7) $$\psi(x \,;\, k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \psi(x, \chi) \; \overline{\chi}(l)$$

et

(8) $$\Pi(x\,;k,l) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \Pi(x,\chi)\ \overline{\chi}(l),$$

les sommes portant sur tous les caractères modulo k.

2. Formules explicites, ([DAV] (p. 104 et 109) , [BLA] p. 88).

Ces formules relient les fonctions ψ et Π et les zéros des fonctions ζ et L.

(9) $$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O(1),$$

(10) $$\Pi(x) = \mathrm{Li}\,(x) - \sum \mathrm{Li}(x^{\rho}) + O(\log x),$$

les sommes portant sur les zéros non triviaux de $\zeta(s)$.

(11) $$\psi(x,\chi) = E_0\, x - \sum \frac{x^{\rho}}{\rho} + O(\log x),$$

(12) $$\Pi(x,\chi) = E_0\,\mathrm{Li}(x) - \sum \mathrm{Li}(x^{\rho}) + O(\log x),$$

les sommes portant sur les zéros non triviaux de la fonction de Dirichlet

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) / n^{s}$$

avec $E_0 = 0$ pour tout caractère non principal et $E_0 = 1$ sinon.

Idée de la preuve pour (9).

On a

(13) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{s}} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Intégrons $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}$ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = c > 1$.

$$\int -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^{s}}{s}\,ds = \sum \int \frac{\Lambda(n)}{s}\left(\frac{x}{n}\right)^{s} = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \psi(x)$$

d'après (1) et puisque

$$\int y^{s}\frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad y = 1 \\ 1 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$$

On modifie le contour pour calculer de façon différente la première intégrale en utilisant la formule des résidus.

3. Somme des inverses des zéros non triviaux de la fonction $L(s,\chi)$.[1]

On suppose que χ est le caractère défini par $\chi(n) = \left(\frac{-D}{n}\right)$, $-D$ étant un discriminant de corps quadratique imaginaire ou de forme quadratique. χ est un caractère réél et $\chi(-1) = -1$.

Posons

$$(14) \qquad \xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{D}\right)^{-(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right) L(s, \chi).$$

$\xi(s, \chi)$ est une fonction entière qui vérifie la formule multiplicative, ([DAV] p. 83),

$$(15) \qquad \xi(s, \chi) = e^{A+B(\chi)s} \prod_{\rho} \left((1 - s/\rho)\, e^{s/\rho}\right),$$

le produit portant sur tous les zéros non triviaux de $L(s, \chi) = \sum_{1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}$, et l'équation fonctionnelle

$$(16) \qquad \xi(s, \chi) = \xi(1 - s, \chi).$$

D'après (14), on peut écrire

$$(17) \qquad \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{D}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}(s+1)\right) + \frac{L'}{L}(s, \chi),$$

et d'après (16)

$$(18) \qquad \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) = -\frac{\xi'}{\xi}(1 - s, \chi).$$

La formule (15) nous donne

$$(19) \qquad \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) = B(\chi) + \sum_{\rho} \frac{-s}{\rho(\rho - s)}.$$

On a donc

---

[1] Je remercie Joseph Oesterlé pour la preuve du théorème 2 de ce paragraphe.

(20) $$B(\chi) = \frac{\xi'}{\xi}(0, \chi) = \frac{\xi'}{\xi}(1, \chi) - \sum \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho}\right).$$

Il vient d'après (20) et (18)

(21) $$\sum{}^{*} -\frac{1}{\rho} = B(\chi) = \frac{\xi'}{\xi}(0, \chi),$$

$\sum^{*}$ signifiant que l'on a regroupé les termes relatifs à ρ et $1-\rho$, pour assurer la convergence.

D'après (17), on a

(22) $$\sum{}^{*} -\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{D}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{L'}{L}(0,\chi).$$

Il est connu que

(23) $$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\log 2,$$ ([WHI], p. 247 et 259).

On peut utiliser pour démontrer cela la formule de Jésus

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} = 2\log 2$$

et la formule de Gauss

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m}\right).$$

Pour calculer $\sum^{*} \frac{1}{\rho}$, il reste donc à évaluer $\frac{L'}{L}(0, \chi)$. Pour cela on utilisera le théorème

Théorème 1.

(24) $$h(-D) = \frac{\omega D^{1/2} L(1, \chi)}{2\pi}$$ (Dirichlet),

(25) $$L(1, \chi) = -\pi D^{-3/2} \sum_{m=1}^{D} \chi(m)\, m$$ (Gauss),

ω étant défini au th. 2 du §1 du chapitre III.

On en déduit d'abord le lemme

Lemme

$$L(0, \chi) = - D^{-1} \sum_{m=1}^{D} \chi(m)\, m = \frac{2h(-D)}{\omega} \tag{26}$$

$$L'(0, \chi) = - \frac{2h(-D)}{\omega} \log D + \sum_{m=1}^{D} \chi(m) \log\Gamma\left(\frac{m}{D}\right). \tag{27}$$

h(-D) étant le nombre de classes du corps quadratique de discriminant -D ou le nombre de classes de formes primitives de discriminant -D, (§1,ch.III).

Preuve : L'équation fonctionnelle donne $L(0, \chi) = \pi^{-1} D^{1/2} L(1, \chi)$, par suite (26) est conséquence de la formule (24). Pour démontrer (27), on définit d'abord, pour $0 < a < 1$,

$$\zeta(s, a) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n + a)^s} \tag{28}$$

ce qui permet d'écrire

$$L(s, \chi) = D^{-s} \sum_{m=1}^{D} \chi(m) \quad \zeta(s, m/D), \tag{29}$$ ([DAV] p. 71),

et

$$L'(s, \chi) = -\log D\, L(s, \chi) + D^{-s} \sum_{m=1}^{D} \chi(m) \quad \zeta'(s, m/D). \tag{30}$$

On a, ([WHI] p. 271), la formule de Lerch

$$\zeta'(s, a)_{s=0} = \log \Gamma(a) - \frac{1}{2} \log 2\pi \tag{31}$$

d'où finalement le résultat et par suite aussi le

Théorème 2. On a

$$\sum_{\rho}{}^{*} \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma + \log(4\pi D)}{2} - \frac{\omega}{2h} \sum_{m=1}^{D} \chi(n) \log\Gamma\left(\frac{m}{D}\right). \tag{32}$$

Exemple 1. Pour D = 4, on a $\omega = 4$ et $h(-4) = 1$, d'où

$$\sum_{\rho}{}^{*} \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma + \log\pi}{2} + 2\log 2 + 2 \log\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}.$$

D'après la formule des compléments

$$\Gamma(s)\ \Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},$$

$$\log \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + \log \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \log \pi + \frac{1}{2} \log 2,$$

(33) $$\sum_{\rho}{}^{*} \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma - 3\log \pi}{2} + \log 2 + 4 \log \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 0,07778...$$

Exemple 2. Pour D = 3, on a $\omega = 6$ et h (-3) = 1, d'où

(34) $$\sum_{\rho}{}^{*} \frac{1}{\rho} = \frac{\gamma}{2} + \log 2 + \frac{1}{2}\log 3\pi + 3 \log \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} = 0,05661....$$

Rappelons ici le résultat pour les zéros de $\zeta(s)$ obtenu de façon analogue, (voir aussi le §6).

(35) $$\sum_{\rho}{}^{*} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}(\gamma - \log 4\pi) + 1 = 0,02309...$$

4. Calculs dans les progressions arithmétiques de raison 4.

On suppose dans ce paragraphe et le suivant que l'hypothèse de Riemann (H.R.) est vraie.

Posons $\theta_1(x) = \theta(x\,;4,1)$

$\pi_1(x) = \pi(x\,;4,1)$.

Proposons nous de montrer

Théorème 3.

(36) $$2\,\theta_1(x) = x - 2\sqrt{x} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \sum_{\rho_1} \frac{x^{\rho_1}}{\rho_1} + O(x^{1/3})$$

et

(37) $$2\pi_1(x) = \mathrm{Li}(x) - \mathrm{Li}(\sqrt{x}) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \sum_{\rho_1} \mathrm{Li}(x^{\rho_1}) + O(x^{1/3})$$

ρ étant les zéros de $\zeta(s)$ et ρ_1 ceux de $L(s,\chi) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} + 7^{-s} - .....$

Preuve : Les formules (4) et (4') donnent

$$\psi(x\,;k,l) = \theta(x\,;k,l) + \sum_{\substack{p^2 \equiv l \,(\mathrm{mod}\,k) \\ p^2 \le x}} \log p + \sum_{\substack{p^3 \equiv l \,(\mathrm{mod}\,k) \\ p^3 \le x}} \log p + ...$$

d'où
$$\psi(x\,;4,1) = \theta_1(x) + (\theta(\sqrt{x}) - \log 2) + O(x^{1/3})$$
$$\psi(x\,;4,3) = \theta(x\,;4,3) + O(x^{1/3}).$$

Compte tenu de H.R.,
$$\theta(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + O(x^{1/4}\log^2 x), \quad ([\text{BLA, p. } 80]),$$
il vient
$$\theta_1(x) = \psi(x\,;4,1) - \sqrt{x} + O(x^{1/3}).$$
Maintenant $\psi(x\,;4,1)$ se calcule avec (7) et (9) ;

$$\psi(x\,;4,1) = \frac{1}{2}\,(\psi(x,\chi_0) + \psi(x,\chi_1))$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \sum \frac{x^{\rho}}{\rho} - \sum \frac{x^{\rho_1}}{\rho_1} + O(\log x)\right).$$

Prouvons maintenant la formule (37). Comme ci dessus
$$\Pi(x\,;4,1) = \pi_1(x) + \frac{1}{2}\,\pi(\sqrt{x}) + O(x^{1/3})$$
$$= \pi_1(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,(\sqrt{x}) + O(x^{1/3}).$$

D'autre part avec (8) et (10),
$$\Pi(x\,;4,1) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{Li}(x) - \sum \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \sum \mathrm{Li}(x^{\rho_1}) + O(\log x))$$
d'où le résultat.

Prouvons maintenant le théorème suivant

Théorème 4. On a

(38) $$2\pi_1(x) = \mathrm{Li}(2\theta_1(x)) - 2\,R_1(x) + O(\sqrt{x}/\log^3 x)$$

$$\text{avec} \quad 1{,}899\,\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x} \le R_1(x) \le 2{,}101\,\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}.$$

Preuve. La formule (37) donne, compte tenu que
$$\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$
$$2\pi_1(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{\log x}\,(2\sqrt{x} + \sum \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum \frac{x^{\rho_1}}{\rho_1})$$
$$- \frac{1}{\log^2 x}\left(4\sqrt{x} + \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{2} + \sum_{\rho_1} \frac{x^{\rho_1}}{2}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^3 x}\right).$$

La formule de Taylor fournit avec (36)

$$\mathrm{Li}\,(2\theta_1(x)) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{\log x}\left(2\sqrt{2} + \sum \frac{x^{\rho}}{\rho} + \sum \frac{x^{\rho_1}}{\rho_1}\right) + O(\log^2 x)$$

soit la formule (38) avec $R_1(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\log^2 x}\left(2 + \sum \dfrac{x^{\rho - 1/2}}{2\,\rho^2} + \sum \dfrac{x^{\rho_1 - 1/2}}{2\rho_1^2}\right)$.

Compte tenu de la symétrie des zéros

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar\rho} = \frac{1}{|\rho|^2} \quad \text{donne} \quad 2\sum \frac{1}{\rho} = \sum \frac{1}{|\rho|^2},$$

d'où

$$2 - \sum \frac{1}{2\rho^2} - \sum \frac{1}{2\rho_1^2} < \frac{R_1(x)\,\log^2 x}{\sqrt{x}} < 2 + \sum \frac{1}{2\,\rho^2} + \sum \frac{1}{2\rho_1^2},$$

et donc

$$2 - \sum \frac{1}{\rho} - \sum \frac{1}{\rho_1} < \frac{R_1(x)\log^2 x}{\sqrt{x}} < 2 + \sum \frac{1}{\rho} + \sum \frac{1}{\rho_1}.$$

Le résultat est conséquence de (33) et (35).

5. Calculs dans les progressions arithmétiques de raison 3.

Posons $\theta_2(x) = \theta\,(x\,;3,1)$

$\pi_2(x) = \pi(x\,;3,1)$.

Les calculs du paragraphe précédent se transposent exactement et l'on peut démontrer

Théorème 5. On a

(39) $$2\pi_2(x) = \mathrm{Li}\ (2\theta_2(x)) - 2\,R_2\,(x) + O(\sqrt{x}\,/\,\log^3 x)$$

$$\text{avec} \quad 1{,}920\,\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x} \le R_2(x) \le 2{,}080\,\frac{\sqrt{x}}{\log^2 x}.$$

On montre, en effet, que

$$2 - \sum \frac{1}{\rho} - \sum \frac{1}{\rho_2} < \frac{R_2\,(x)\,\log^2 x}{\sqrt{x}} < 2 + \sum \frac{1}{\rho} + \sum \frac{1}{\rho_2}$$

les deuxièmes sommes portant sur les zéros de la fonction

$$L(s, \chi) = 1^{-s} - 2^{-s} + 4^{-s} - 5^{-s} + \ldots\ldots$$

6. Sur la somme des inverses $\sum_\rho \frac{1}{\rho - s}$.

Prouvons la formule

(40) $$\sum \frac{1}{s-\rho} = \frac{2s-1}{s^2-s} - \frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Preuve. De façon analogue aux formules (15) et (19) on a pour la fonction ζ,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\, s(s-1)\ \pi^{-1/2s}\ \Gamma(s/2)\ \zeta(s)$$

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_\rho (1 - s/\rho)\ e^{s/\rho}\ , \quad (\text{[DAV] p. } 50)$$

d'où

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$$

or $B = -\sum_\rho \frac{1}{\rho}$ donc $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \sum \frac{1}{s-\rho}$ et par suite, on obtient (40).

Corollaire.

(41) $$\sum \frac{1}{\rho} = \sum \frac{1}{1-\rho} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\log 4\pi}{2} = 0,02309....$$

Preuve. On sait que

$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{s} + \frac{\gamma}{2} + o(s), \text{ lorsque } s \to 0$$

et que

$$\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = \log 2\pi,$$

par suite

$$\sum \frac{1}{\rho} = \lim_{s\to 0} - \sum \frac{1}{s-\rho} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\log 4\pi}{2}.$$

D'autre part si ρ est racine de $\zeta(s)$, $1-\rho$ est aussi racine d'où la valeur de la deuxième somme.

7. Une formule.

Montrons l'égalité suivante, valable sous l'hypothèse de Riemann,

$$x - \theta(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho/2}}{\rho} + O(x^{1/5}) \tag{42}$$

les sommes portant sur les zéros de la fonction ζ.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \theta(x^{1/4}) + O(x^{1/5}), \\ \psi(x^{1/2}) &= \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/4}) + O(x^{1/6}), \\ \psi(x^{1/3}) &= \theta(x^{1/3}) + O(x^{1/6}), \end{aligned}$$

d'où

$$\theta(x) = \psi(x) - \psi(x^{1/2}) - \psi(x^{1/3}) + O(x^{1/5}),$$

et d'après la formule explicite

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O(1), \\ \psi(x^{1/2}) &= x^{1/2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho/2}}{\rho} + O(1), \\ \psi(x^{1/3}) &= x^{1/3} + O(x^{1/6} \log^2 x), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

V - FONCTION d(n) ET FONCTIONS VOISINES.

1. **Grandes valeurs de la fonction d(n).**
2. **Fonctions étudiées.**
3. **Série de Dirichlet et série de Lambert.**
4. **Grandes valeurs de la fonction $Q_2(n)$.**
5. **Grandes valeurs de la fonction $\overline{Q}_2(n)$.**
6. **Grandes valeurs de $d_r(n)$.**

---

1. Grandes valeurs de la fonction d(n), ([RAM1] , [NIC1]).

Soit $\varepsilon > 0$; on désigne par N_ε l'un des nombres maximisant la fonction
$$n \to d(n) / n^\varepsilon.$$
N_ε est appelé nombre hautement composé supérieur associé à ε.

On a
$$N_\varepsilon = \prod_{p \leq 2^{1/\varepsilon}} p^{k(p,\varepsilon)}$$

(1) avec $k(p,\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{p^\varepsilon - 1}\right] & \text{si } \dfrac{1}{p^\varepsilon - 1} \notin \mathbb{N} \\ \left[\dfrac{1}{p^\varepsilon - 1}\right] \text{ ou } \left[\dfrac{1}{p^\varepsilon - 1} - 1\right] & \text{si } \dfrac{1}{p^\varepsilon - 1} \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Posons aussi $x = 1/\varepsilon$ et $x_i = ((i+1)/i)^x$ pour $i \geq 1$

alors si $x_k < p < x_{k+1}$, on a $k(p,\varepsilon) = k$,

si $p = x_k$, $k(p,\varepsilon) = k$ ou $k-1$,

si $p > x_1$, $k(p,\varepsilon) = 0$.

Exemple.

$N = 2^{12}\ 3^7\ 5^4\ (7.11.13)^3\ (17.19.23)^2\ 29 \ldots 337$ est hautement composé supérieur.

2. Fonctions étudiées.

(A) $Q_2(n) = \frac{1}{4}\, r_2(n)$

d'où

(2) $Q_2(n)$ = nombre de diviseurs $\equiv 1 \pmod 4$ - nombre de diviseurs $\equiv 3 \pmod 4$

Supposons que

$$n = 2^{\alpha} \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} p^s \prod_{q\equiv 3 \pmod 4} q^t.$$

Si tous les t sont pairs alors

(3) $$Q_2(n) = d\Big(\prod_{p\equiv 1 \pmod 4} p^s \Big) = \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} (s + 1),$$

et s'il existe un t impair : $Q_2(n) = 0$.

On a donc $Q_2(n) \leq d(n)$.

(B) $\overline{Q_2}(n)$ est le quart du nombre de façons d'écrire n sous la forme : $n = x^2 + xy + y^2$.

D'après le §3 du chapitre III, on a, si

$$n = 3^{\beta} \prod_{p\equiv 1 \pmod 3} p^s \prod_{q\equiv 2 \pmod 3} q^t$$

(4) $$\begin{aligned}\overline{Q_2}(n) &= \text{nombre de diviseurs} \equiv 1 \pmod 3 - \text{nombre de diviseurs} \equiv 2 \pmod 3\\ &= d\Big(\prod_{p\equiv 1 \pmod 3} p^s \Big) \quad \text{si tous les exposants } t \text{ sont pairs,}\\ &= 0 \quad \text{si un des exposants } t \text{ est impair.}\end{aligned}$$

3. Série de Dirichlet. Série de Lambert.

Théorème 1.

Soit $f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ et $g(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^s}$.

On a $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n\geq 1} b_n\, x^n$,

si et seulement si $\zeta(s)\, f(s) = g(s)$.

Preuve.

$$\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{m\geq 1} x^{mn} = \sum c_n x^n$$

avec $c_n = \sum_{d \mid n} a_d$, or on a $\zeta(s)\, f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{n^s}$ donc $c_n = b_n$ pour tout si et seulement si $\zeta(s)\, f(s) = g(s)$.

Théorème 2.

Soit $f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ et $g(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}$

et

$$L(s) = L(s, \chi_4) = 1^s - 3^s + 5^s - 7^s + \ldots,$$

χ_4 étant le caractère non principal modulo 4.

On a $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \sum_{n \geq 1} b_n x^n$ si et seulement si $L(s) f(s) = g(s)$.

Preuve.

$$\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \sum_{m \geq 0} (-1)^m x^{2nm}$$

$$= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ m \geq 0}} a_n (-1)^m x^{(2m+1)n} = \sum_{n \geq 1} c_n x^n \text{, avec } c_n = \sum_{d \mid n} a_d \chi_4\left(\frac{n}{d}\right).$$

Exemple 1.

$$\zeta^2(s) = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}\right) \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}\right) \text{ d'où}$$

(6) $$\zeta^2(s) = \sum_{n \geq 3} \frac{d(n)}{n^s}$$

et d'après le théorème 1

(7) $$\sum_{n \geq 1} d(n) x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

Exemple 2. On a

(8) $$\sum_{n \geq 1} \frac{Q_2(n)}{n^s} = L(s)\ \zeta(s).$$

En effet $L(s) \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$, donc $L(s) \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^s}$ où c_n est égal au nombre de diviseurs de n congrus à 1 modulo 4 diminué du nombre de diviseurs de n congrus à 3 modulo 4.

Si $n \equiv 3 \pmod 4$, il vient $c_n = 0$ et si $n \equiv 1 \pmod 4$, $c_n = Q_2(n)$.

D'après le théorème 1, il vient alors

(9) $$\sum_{n \geq 1} Q_2(n)\ x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)\, x^n}{1 - x^n}$$
$$= \frac{x}{1 - x} - \frac{x^3}{1 - x^3} + \frac{x^5}{1 - x^5} - \ldots\ldots$$

et d'après le théorème 2,

(10) $$\sum_{n \geq 1} Q_2(n)\ x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Exemple 3. On a

$$(11) \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{\overline{Q}(n)}{n^s} = \zeta(s)\ L(s, \chi_3)$$

avec $\chi_3(n) = \left(\frac{n}{3}\right)$ et $L(s, \chi_3) = 1^{-s} - 2^{-s} + 4^{-s} - 5^{-s} + 7^{-s}$ ....

Cette relation est immédiate dès que l'on sait que $\overline{Q_2}(n) = \sum_{d \mid n} \left(\frac{d}{3}\right)$, (cf.§4, ch.III).

D'après le théorème 1, il vient

$$(12) \qquad \sum_{n \geq 1} \overline{Q_2}(n)\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\, x^n}{1 - x^n}.$$

4. Grandes valeurs de la fonction Q_2 (n).

Soit $\varepsilon > 0$. On dira que N_ε est Q_2-supérieurement intéressant si N_ε maximise la fonction $n \to Q_2(n) / n^\varepsilon$.

Nous utilisons les notations du § 1, ainsi que celles du § 4 du chapitre IV. On a alors pour ε donné

$$(13) \qquad \log N_\varepsilon = \theta_1(x_1) + \theta_1(x_2) + \ldots\ldots$$

$$(14) \qquad Q_2(N_\varepsilon) = 2^{\pi_1(x_1)}\ (3/2)^{\pi_1(x_2)}\ (4/3)^{\pi_1(x_3)} + \ldots.$$

avec $x = 1/\varepsilon$ et $x_i = \left(\frac{i+1}{i}\right)^x$.

L'exposant de 2 est l'entier k tel que $x_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^x$ soit infiniment proche de 2, soit

$$k \sim 1/\varepsilon \log 2.$$

(A) Sans supposer le théorème des nombres premiers on peut écrire, en posant $N = N_\varepsilon$

$$\log N \sim \theta_1(x_1) \quad \text{d'ordre } x_1$$

$$\log\log N \sim x \log 2$$

Comme par intégration par parties on a, pour tout y,

$$\pi_1(y) = \frac{\theta_1(y)}{\log y} + O\left(\frac{y}{\log^2 y}\right),$$

il vient

$$\pi_1(x_1) \sim \frac{\theta_1(x_1)}{x \log 2} = \frac{\log N}{\log\log N} + O\left(\frac{\log N}{(\log\log N)^2}\right)$$

$$\pi_1(x_2) = (\log N)^{(\log 3/2 / \log 2)(1+o(1))} = O\left(\frac{\log N}{(\log\log N)^2}\right),$$

d'où

(15) $$Q_2(N) = 2^{\log N\,(1/(\log\log N) + O(1/\log\log N)^2)}.$$

(B) En supposant le théorème des nombres premiers, on peut affirmer que

$$\pi_1(y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(y) + O(y\, e^{-a\sqrt{\log y}})$$

d'où

$$\log N \sim \theta_1(x_1) \sim 2^{x-1}$$

$$\pi_1(2^x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,(2\log N) + O(\log N\, e^{-a\sqrt{\log\log N}})$$

et

(16) $$\log Q_2(N) = \log 2\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,(2\log N) + O(\log N\, e^{-a\sqrt{\log\log N}})\right)$$

ce qui donne, par exemple

(17) $$\frac{\log Q_2(N)}{\log 2} = \frac{\log N}{\log\log N} + (1-\log 2)\frac{\log N}{(\log\log N)^2} + (\log^2 2 - 2\log 2 + 2)\frac{\log N}{(\log\log N)^3} + O\left(\frac{\log N}{(\log\log N)^4}\right).$$

(C) On suppose maintenant que l'hypothèse de Riemann est vraie et l'on utilise la formule (38), § 4 du chapitre 4.

$$2\pi_1(x) = \mathrm{Li}\,(2\theta_1(x)) - 2R_1(x) + O(\sqrt{x}/\log^2 x)$$

$$\text{avec}\quad 1{,}899\,\sqrt{x}/\log^2 x \le R_1(x) \le 2{,}101\,\sqrt{x}/\log^2 x$$

qui permet de préciser le terme reste.

(18) $$Q_2(N) = 2^{\mathrm{Li}(2\log N)/2 + \phi(N)}$$

avec

$$\phi(N) = \frac{\log 3/2}{2\log 2}\,\mathrm{Li}\left(\frac{3}{2}(\log N)^{\log 3/2/\log 2}\right) - \frac{3}{4}\,\frac{(\log N)^{\log 3/2/\log 2}}{\log(2\log N)} - R_1(2\log N) + O\left(\frac{\sqrt{\log N}}{(\log\log N)^3}\right).$$

5. Grandes valeurs de la fonction $\overline{Q_2}(n)$.

En utilisant les notations du §5 du chapitre IV, , on a, pour les nombres $\overline{Q_2}$ supérieurement intéressants, les relations suivantes,

$$n = e^{\theta_2(x_1) + \theta_2(x_2) + \ldots}$$

$$\overline{Q_2}(n) = 2^{\pi_2(x_1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\pi_2(x_2)} \ldots,$$

à partir desquelles l'on peut montrer :

(A) Sans le théorème des nombres premiers

(19) $$\overline{Q_2}(n) = 2^{\log n\left(\frac{1}{\log\log n} + O\left(\frac{1}{(\log\log n)^2}\right)\right)}.$$

(B) Avec le théorème des nombre premiers

(20) $$\overline{Q_2}(n) = 2^{1/2\ \mathrm{Li}(2\log n) + O(\log n\ e^{-a\sqrt{\log\log n}})}.$$

(C) Avec l'hypothèse de Riemann, d'après le §5 du chapitre IV,

(21) $$\overline{Q_2}(n) = 2^{1/2\ \mathrm{Li}(2\log n) + \overline{\phi}(n)}$$

avec $$\overline{\phi}(n) = \frac{\log 3/2}{2\log 2}\ \mathrm{Li}\left(\frac{3}{2}(\log n)^{\log 3/2 / \log 2}\right) - \frac{3}{4}\ \frac{(\log n)^{\log 3/2 / \log 2}}{\log(2\log n)}$$
$$- R_2(2\log n) + O(\sqrt{\log n}/(\log\log n)^3).$$

6. Grandes valeurs de la fonction $d_r(n)$.

Pour $r > -1$, définissons d_r par l'égalité

(22) $$\sum_{n\geq 1} \frac{d_r(n)}{n^s} = \zeta(s)^{1+r}.$$

Ainsi $d = d_1$ et si $r \in \mathbb{N}$, on a

$$d_r(n) = \sum_{\substack{(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{r+1}) \\ \delta_1\delta_2\ldots\delta_{r+1} = n}} 1$$

Compte tenu de $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, il vient si $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$

(23) $$d_r(n) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{\lambda=1}^{a_i} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right).$$

Comme pour $d(n)$, posons

$$x = 1/\varepsilon \quad \text{et} \quad x_i = \left(1 + \frac{r}{i}\right)^x \quad \text{pour } i \geq 1$$

alors si $x_k \leq p < x_{k+1}$, $k(p, \varepsilon) = k$ et $N_\varepsilon = \prod_{p \leq (1+r)^{1/\varepsilon}} p^{k(p,\varepsilon)}$.

On suppose $r > 0$, alors pour

(24) $$N = e^{\theta(x_1) + \theta(x_2) + ... + \theta(x_n)}$$

on a

(25) $$d_r(N) = (1+r)^{\pi(x_1)} \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{\pi(x_2)} \; .... \; \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\pi(x_n)}$$

d'où, sans supposer le théorème des nombres premiers,

(26) $$d_r(N) = (1+r)^{\frac{\log N}{\log\log N}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log N}\right)\right)},$$

et avec le théorème des nombres premiers

(27) $$d_r(N) = (1+r)^{\mathrm{Li}(\log N) + O(\log N \, e^{-a\sqrt{\log\log N}})} .$$

VI - SUR LA SOMME $K(s, x) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p^s - 1}$ sous H.R..

1. **Premières transformations.**
2. **Avec l'hypothèse de Riemann.**
3. **Digression sur $\sum \frac{x^{\rho - s}}{\rho(\rho - s)}$ sous H.R..**
4. **Nouvelles expressions de $K(s, x)$.**
5. **Application au produit $A(s, x) = \prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.**
6. **Généralisation aux progressions arithmétiques.**

---

1. Premières transformations.

Soit ϕ une fonction C^1 alors

$$\sum_{p \le x} \phi(p) \log p = \int_2^x \phi(t)\, d\theta(t)$$

$$= \theta(x)\,\phi(x) - \int_2^x \phi'(t)\,\theta(t)\, dt$$

(1) $$\sum_{p \le x} \phi(p) \log p = \int_2^x \phi(t)\, dt + \phi(x)(\theta(x) - x) + \int_2^x \phi'(t)(t - \theta(t))\, dt.$$

Prenons $\phi(x) = 1/(x^s - 1)$ pour $s > 0$, alors

(2) $$K(s, x) = \int_2^x \frac{dt}{t^s - 1} + \frac{\theta(x) - x}{x^s - 1} + \int_2^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^s - 1}\right)(t - \theta(t))dt.$$

On se propose d'écrire

$$K(s, x) = f(s, x) + C(s) + o(1), \text{ avec } f(s, x) \to \infty \text{ quand } x \to \infty.$$

Si $s > 1$, la série définissant $K(s, x)$ est convergente donc

$$K(s, x) = C(s) + o(1)$$

et

$$C(s) = K(s, \infty),$$

soit

$$C(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum_p \sum_k \frac{\log p}{p^{ks}} = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Le premier terme du deuxième membre de la formule (2) peut s'écrire

$$\int_2^x dt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^{sn}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{1-ns}}{1-ns} + O(1).$$

Par suite

$$K(s, x) = C(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{1-2s}) + O(x^{1-s} e^{-a\sqrt{\log x}})$$

et

(3) $$K(s, x) = - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{1-2s}) + O(x^{1-s} e^{-a\sqrt{\log x}}).$$

Quand s tend vers 1,

$$\frac{x^{1-s}}{1-s} = \frac{e^{(1-s)\log x}}{1-s} = \frac{1}{1-s} + \log x + O(s-1)$$

d'où

(4) $$K(1, x) = \log x - \gamma + O(e^{-a\sqrt{\log x}}) \quad \text{avec} \quad \gamma = 0,577215....$$

Quand $s < 1$

$$K(s, x) = \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{1-2s})$$

expression que nous allons préciser lorsque l'hypothèse de Riemann est vraie.

2. Avec l'hypothèse de Riemann.

On utilisera $|\theta(x) - x| = O(\sqrt{x} \log^2 x)$.

D'après la formule de Taylor, on peut écrire

(5) $$\int_2^{\theta(x)} \phi(t)\, dt = \int_2^x \phi(t)\, dt + (\theta(x) - x)\, \phi(x) + \frac{1}{2} (\theta(x)-x)^2\, \phi'(x + O(\sqrt{x} \log^2 x)).$$

Par suite (2) donne

(6) $$K(s, x) = \int_2^{\theta(x)} \frac{dt}{t^s - 1} - s \int_2^x \frac{t - \theta(t)}{t^{1-s}(t^s-1)^2}\, dt + O(x^{-s} (\log x)^4).$$

La formule (42), §7 , chapitre IV , s'écrit

$$x - \theta(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \sum_\rho \frac{x^{\rho/2}}{\rho} + O(x^{1/5}).$$

On la reporte dans la deuxième intégrale de (6) pour obtenir

$$(7)\qquad K(s,x) = \int_2^{\theta(x)} \frac{dt}{t^s - 1} - s\int_2^x \frac{dt}{t^{1/2-s}(t^s-1)^2} - s\int_2^x \frac{dt}{t^{2/3-s}(t^s-1)^2}$$

$$- s\sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{\rho t^{1-s-\rho}(t^s-1)^2} + s\sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{\rho t^{1-s-\rho/2}(t^s-1)^2}$$

$$+ O\left(\int_2^x \frac{dt}{t^{4/5-s}(t^s-1)^2}\right) + O\left(x^{-s}(\log x)^4\right).$$

Evaluons les termes contenant ρ

$$\bullet \sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{\rho t^{1-s-\rho}(t^s-1)^2} = \sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{\rho t^{1+s-\rho}} + O\left(\sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{\rho\, t^{1-\rho+2s}}\right)$$

$$= \sum_\rho \frac{x^{\rho-s}}{\rho(\rho-s)} + O(1 + x^{1/2-2s})$$

$$\bullet \sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{\rho t^{1-s-\rho/2}(t^s-1)^2} = O\left(\sum_\rho \int_2^x \frac{dt}{t^{1+s-\rho/2}}\right)$$

$$= O\left(\sum_\rho \frac{x^{\rho/2-s}}{\rho(\rho/2-s)} + 1\right) = O(x^{1/4-s} + 1)$$

La formule (7) peut alors être écrite :

$$(8)\qquad K(s,x) = \int_2^{\theta(x)} \frac{dt}{t^s - 1} - s\int_2^x \frac{t^{1/2}+t^{1/3}}{t^{1-s}(t^s-1)^2}\,dt - s\sum_\rho \frac{x^{\rho-s}}{\rho(\rho-s)}$$

$$+ O(1 + x^{1/2-2s} + x^{1/4-s}).$$

3. Digression sur $\sum \frac{x^{\rho-s}}{\rho(\rho-s)}$ **sous H.R..**

Posons

$$\overline{S}_s(x) = \sum_\rho \frac{x^{\rho - s}}{\rho(\rho - s)} .$$

On a

$$| \overline{S}_s(x) | \leq x^{1/2 - s} \sum \frac{1}{| \rho(\rho - s) |} .$$

Compte tenu que $\overline{\rho} = 1 - \rho$ est aussi racine, on peut écrire

$$| \overline{S}_s(x) | \leq x^{1/2 - s} \sum_\rho \frac{1}{(\rho(1 - \rho)(\rho - s)(1 - \rho - s))^{1/2}} .$$

On se propose de donner des estimations de la somme de la série du second membre. Nous posons

$$\tau(s) = \sum \frac{1}{(\rho - s)(1 - \rho - s)} \tag{9}$$

$$= \sum \frac{1}{| \rho - s |^2} = \frac{2}{2s - 1} \sum \frac{1}{s - \rho}$$

et

$$T(s) = \sum_\rho \frac{1}{(\rho(1 - \rho)(\rho - s)(1 - \rho - s))^{1/2}} .$$

Nous avons calculé à la formule (40), § 6 , chapitre IV, la somme $\sum \frac{1}{s - \rho}$.

1$^{\text{ere}}$ estimation de T(s).

Comme, pour $0 < n < m$, on a $\frac{1}{m} < \frac{1}{\sqrt{mn}} < \frac{1}{n}$, $T(s)$ est compris entre $\tau(1)$ et $\tau(s)$.

2$^{\text{ème}}$ estimation.

Elle est basée sur l'inégalité suivante :

Pour m_i et $n_i \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\sum (m_i n_i)^{1/2} \leq \left(\sum m_i \sum n_i\right)^{1/2} \tag{10}$$

avec égalité si et seulement si, pour tout i, $m_i = n_i$.

Il vient alors

$$T(s) \leq (\tau(1)\ \tau(s))^{1/2}. \tag{11}$$

3$^{\text{ème}}$ estimation.

On montre d'abord que pour $m, n \in \mathbb{R}^+$ avec $n < m$,

$$(12)\qquad \frac{1}{3m}+\frac{8}{3(m+3n)} < \frac{1}{\sqrt{mn}} < \frac{1}{3n}+\frac{8}{3(n+3m)}.$$

En effet $\frac{1}{\sqrt{mn}}$ est la moyenne géométrique des deux nombres qui l'encadrent.

Prenons $m = \rho(1-\rho)$ et $n = (\rho - s)(1-\rho-s) = \rho(1-\rho) + s^2 - s$ alors

$$3m + n = 4\rho(1-\rho) + s^2 - s \text{ et } m + 3n = 4\rho(1-\rho) + 3(s^2 - s).$$

Par suite $T(s)$ est compris entre

$$A = \frac{1}{3}\sum \frac{1}{\rho(1-\rho)} + \frac{2}{3}\sum \frac{1}{\rho(1-\rho)+\frac{3(s^2-s)}{4}}$$

et

$$B = \frac{1}{3}\sum \frac{1}{(\rho-s)(1-\rho-s)} + \frac{2}{3}\sum \frac{1}{\rho(1-\rho)+\frac{s^3-s}{4}}.$$

En remarquant que

$\rho(1-\rho) + \frac{3}{4}(s^2-s) = (\rho-t)(1-\rho-t)$ si et seulement si $t = (1+(1+3s^2-3s)^{1/2})/2$

et que

$\rho(1-\rho) + \frac{1}{4}(s^2-s) = (\rho-t)(1-\rho-t)$ si et seulement si $t = (1+(1+s^2-s)^{1/2})/2$,

on montre ainsi que $T(s)$ est compris entre

$$A = \frac{1}{3}\tau(1) + \frac{2}{3}\tau((1+(1+3s^2-3s)^{1/2})/2)$$

et

$$B = \frac{1}{3}\tau(s) + \frac{2}{3}\tau((1+(1+s^2-s)^{1/2})/2).$$

Remarque. On peut apprécier la précision de la formule (12) de la façon suivante. Ecrivons $m = n + k$ et développons chaque terme de l'inégalité à l'ordre 3 en $\frac{k}{n}$.

$$(13)\qquad \frac{1}{(mn)^{1/2}} = \frac{1}{n(1+k/n)^{1/2}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k}{n} + \frac{3}{8}\frac{k^2}{n^2} - \frac{10}{32}\frac{k^3}{n^3} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} - \frac{k^3}{n^3} + \dots\right)$$

$$\frac{8}{m+3n} = \frac{8}{4n(1+k/4n)} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{k}{4n} + \frac{k^2}{16n^2} - \frac{k^3}{64n^3} + \dots\right)$$

$$\frac{8}{3m+n} = \frac{2}{n(1+3k/4n)} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{3k}{4n} + \frac{9}{16}\frac{k^2}{n^2} - \frac{27}{64}\frac{k^3}{n^3} + \dots\right).$$

Le 1er membre de (12) vaut

$$(14) \qquad \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k}{n} + \frac{3}{8}\frac{k^2}{n^2} - \frac{11}{32}\frac{k^3}{n^3} + \dots\right)$$

et le 3ème membre,

$$(15) \qquad \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k}{n} + \frac{3}{8}\frac{k^2}{n^2} - \frac{9}{32}\frac{k^3}{n^3} + \dots\right)$$

formules à comparer à (13).

Dans notre application, on a $n = \rho(1 - \rho)$ et $k = s^2 - s$ et, par suite, le rapport $\dfrac{s^2 - s}{\rho(1 - \rho)}$ est inférieur à $\dfrac{s^2 - s}{200}$.

4. Nouvelles expressions de K(s, x).

Nous transformons la formule (8) en calculant les intégrales jusqu'à l'ordre nécessaire.

Si $s < 1/4$, le terme reste est $O(x^{1/2 - 2s})$.

Si $s = 1/4$, le terme reste est $O(1)$.

Si $s > 1/4$, on écrira le terme reste sous la forme $C(s) + O(x^{1/4 - s})$.

L'expression $S_s(x) = s\overline{S}_s(x)$ est $O(x^{1/2 - s})$, d'après le § 3. Le cas $s = 1/2$ sera donc aussi un cas particulier.

On a

$$\int_2^{\theta(x)} \frac{dt}{t^s - 1} = \frac{\theta(x)^{1-s}}{1 - s} + \frac{\theta(x)^{1-2s}}{1 - 2s} + \dots + \frac{\theta(x)^{1-ns}}{1 - ns} + O(x^{1-(n+1)s}),$$

avec $n = \lfloor 2 + \frac{1}{2s} \rfloor$ si $s < \frac{1}{4}$; $n = 4$ si $s = \frac{1}{4}$ et $n = \lfloor 1 + \frac{3}{4s} \rfloor$ si $s > 3/4$.

Comme

$$\begin{aligned}\theta(x)^{1-ks} &= x^{1-ks}\left(1 + \frac{(\theta(x) - x)}{x}\right)^{1-ks} \\ &= x^{1-ks} + o(x^{1/2 - 2s}) \quad \text{dès que} \quad k \geq 3,\end{aligned}$$

on peut écrire

$$(16) \qquad \int_2^{\theta(x)} \frac{dt}{t^s - 1} = \frac{\theta(x)^{1-s}}{1 - s} + \frac{\theta(x)^{1-2s}}{1 - 2s} + \frac{x^{1-3s}}{1 - 3s} + \dots + \frac{x^{1-ns}}{1 - ns} + O(1) + o(x^{1/2-2s}).$$

De même

$$(17) \qquad \int_2^{x} \frac{t^{1/2} + t^{1/3}}{t^{1-s}(t^s - 1)^2} = 2\,\frac{x^{-s+1/2}}{1 - 2s} + \frac{3x^{-s+1/3}}{1 - 3s} + \frac{4x^{-2s+1/2}}{1 - 4s} + O(1) + o(x^{1/2 - 2s})$$

d'où

(18) $$K(s,x) = \frac{\theta(x)^{1-s}}{1-s} + \frac{\theta(x)^{1-2s}}{1-2s} + \frac{x^{1-3s}}{1-3s} + \dots + \frac{x^{1-ns}}{1-ns}$$

$$- \frac{2sx^{-s+1/2}}{1-2s} - \frac{3sx^{1/3-s}}{1-3s} - \frac{8sx^{1/4-s}}{1-4s} + S_s(x) + O(1+x^{1/2-2s} + x^{1/4-s}).$$

Notons que dans les formules (16), (17) et (18), on doit remplacer x^a / a par $\log x$ lorsque $a = 0$.

1er cas. $0 < s < 1/4$.

On a la formule (18) avec comme terme reste $O(x^{1/2-2s})$.

2eme cas. $s = 1/4$.

$$K(1/4, x) = \frac{4}{3}\,\theta(x)^{3/4} + 2\theta(x)^{1/2} + 3x^{1/4} + S_{1/4}(x) - 3x^{1/12} + \frac{\log x}{2} + O(1).$$

3ème cas. $s > 1/4$.

(19) $$K(s,x) = \frac{\theta(x)^{1-s}}{1-s} + \frac{x^{1-2s} - 2s\,x^{-s+1/2}}{1-2s} + \frac{x^{1-3s} - 3s\,x^{1/3-s}}{1-3s}$$
$$+ S_s(x) + C(s) + O(x^{1/4-s}),$$

avec $C(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, de par le prolongement analytique. $C(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$

Cas particulier $s = 1$; en passant à la limite dans (19) on obtient

(20) $$K(1,x) = \log\theta(x) - \gamma + 2x^{-1/2} + \frac{3}{2}\,x^{-2/3} + S_1(x) + O(x^{-3/4})$$

avec

$$|S_1(x)| \le x^{-1/2} \sum \frac{1}{|\rho(\rho-1)|} \le 0{,}0462\ x^{-1/2}.$$

Si dans les formules on ne fait pas intervenir $S_s(x)$ qui n'est pas parfaitement connu, la césure se fait alors en $s = 1/2$.

- Pour $0 < s < 1/2$,

(21) $$K(s,x) = \frac{\theta(x)^{1-s}}{1-s} + \frac{x^{1-2s}}{1-2s} + \dots + \frac{x^{1-ns}}{1-ns} + O(x^{1/2-s})$$

avec $n = \lfloor 1 + \frac{1}{2s} \rfloor$.

- Pour $s = 1/2$,

(22) $$K\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{\sqrt{p} - 1} = 2\sqrt{\theta(x)} + \frac{1}{2}\log x + O(1).$$

• Pour $s > 1/2$,

(23) $$K(s, x) = \frac{\theta(x)^{1-s}}{1 - s} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + O(x^{1/2 - s}).$$

5. Application au produit $A(s, x) = \prod_{p \le x} (1 - \frac{1}{p^s})$.

On a

(24) $$\int \frac{x^{a+bs}}{a+bs}\, dx = \frac{1}{b} \operatorname{Li}(x^{a+bs}),$$

(25) $$\int S_s(x) = -\frac{S_s(x)}{\log x} + O\left(\frac{x^{1/2-s}}{(\log x)^2}\right).$$

Preuve. $\frac{d}{ds} S_s(x) = \frac{S_s(x)}{s} - S_s(x) \log x - s \sum \frac{x^{\rho-s}}{\rho(\rho - s)^2}$. Comme $S_s(x) = O(x^{1/2-s})$ il vient

$$S_s(x) = -\frac{d}{ds} S_s(x) / \log x + O(x^{1/2-s} / \log x)$$

d'où le résultat.

On a aussi

(26) $$\operatorname{Li}(1 + h) = \log(h) + \gamma + \frac{h}{2} + O(h^2) \text{ lorsque } h \to 0,$$

puisque pour $x > 1$, on peut écrire

$$\operatorname{Li}(x) = \gamma + \log\log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^n x}{n\,!}.$$

Intégrons maintenant par rapport à s la formule (18), entre l'infini et s ; en tenant compte que la constante est $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ lorsque $s > 1/4$, (formule (19)), on obtient

$$(27)\quad \log \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = -\log|\zeta(s)| - \mathrm{Li}(\theta(x)^{1-s}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{1-2s}) - \frac{1}{3}\,\mathrm{Li}(x^{1-3s}) - \dots$$
$$- \frac{1}{n}\,\mathrm{Li}(x^{1-ns}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{1/2-s}) - (x^{1/2-s} + S_s(x)) \,/\, \log x$$
$$+ O(x^{1/2-s}/(\log x)^2) \quad \text{avec} \quad n = \left\lfloor 1 + \frac{1}{2s} \right\rfloor .$$

Distinguons alors 3 cas :

(A) si $0 < s < 1/2$.

$$(28)\quad \log \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \mathrm{Li}(\theta(x)^{1-s}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{1-2s}) - \frac{1}{3}\,\mathrm{Li}(x^{1-3s}) - \dots - \frac{1}{n}\,\mathrm{Li}(x^{1-ns})$$
$$+ \frac{2s}{1-2s}\, x^{1/2-s}/\log x - S_s(x)/\log x + O(x^{1/2-s}/(\log x)^2).$$

(B) Supposons $s = 1/2$.
D'après (26), on peut écrire

$\mathrm{Li}(x^{1-2s}) - \mathrm{Li}(x^{1/2-s}) = \log 2 + \frac{1-2s}{4}\log x + O(1-2s)^2$, lorsque s tend vers 1/2,
d'où avec (27)

$$(29)\quad \log \prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p^{1/2}}\right) = -\log|\zeta(1/2)| - \mathrm{Li}(\theta(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}\log 2 - 1/\log x$$
$$- S_{1/2}(x)/\log x + O(1/\log^2 x)$$

et par suite

$$(30)\quad \frac{1}{\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)} = -\sqrt{2}\,\zeta(1/2)\,\exp\left(\mathrm{Li}\sqrt{\theta(x)} + (1+S_{1/2}(x))/\log x + O(1/\log^2 x)\right)$$

Remarque. Soit

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

C'est une série convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$\zeta(s)\,(1-2^s) = \eta(s),$$

et donc par prolongement analytique, il vient pour $s = 1/2$

$$-\zeta(1/2)\,(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$$

et

$$\zeta(1/2) = -1{,}4603..$$

(C) Pour $s > 1/2$

(31) $$\frac{1}{\prod_{p \le x} (1 - p^{-s})} = |\zeta(s)| \exp\left(\mathrm{Li}(\theta(x))^{1-s} + \frac{2s\, x^{1/2-s}}{(2s-1)\log x} + \frac{S_s(x)}{\log x} + O\left(\frac{x^{1/2-s}}{(\log x)^2}\right)\right).$$

Faisons tendre s vers 1, alors

$$|\zeta(s)| = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)$$

et d'après (26)

$$\mathrm{Li}(\theta(x)^{1-s}) = \log((1-s)\log\theta(x)) + \gamma + O(s-1)$$

d'où

$$\frac{1}{\prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = e^{\gamma} \log\theta(x) \quad \exp\left(\frac{2}{\sqrt{x}\log x} + \frac{S_1(x)}{\log x} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log^2 x}\right)\right)$$

formule que l'on peut écrire

(32) $$\frac{1}{\prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = e^{\gamma} \left(\log\theta(x) + \frac{2}{\sqrt{x}} + S_1(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)\right).$$

Cette formule a été retrouvée par J.-L. Nicolas ([NIC3]) et G. Robin ([ROB2]).

Remarque. En comparant les formules (20) et (32) il vient

(33) $$\frac{e^{-\gamma}}{\prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \gamma + \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p-1} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right).$$

6. Généralisation aux progressions arithmétiques.

Proposition. Soit (q_i) une suite croissante de nombres telle que si l'on pose

$$\theta(x) = \sum_{q_i \le x} \log q_i,$$

on ait

$$\left|\theta(x) - \frac{x}{k}\right| = O(x^{1/2}\log^2 x) \text{ poux x infini,}$$

alors pour $s > 1$

(34) $$\log \prod_{p \ge x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{k} \mathrm{Li}\ (k\,\theta(x))^{1-s} + O(x^{1/2-s}\log x).$$

Preuve : on procède comme au paragraphe 1 pour obtenir

$$(35)\quad \sum_{p \geq x} \phi(p) \log p = \int_x^{\infty} \frac{\phi(t)\, dt}{k} - \phi(x)\left(\theta(x) - \frac{x}{k}\right) - \int_x^{\infty} \phi'(t)\left(\theta(t) - \frac{t}{k}\right) dt$$

si $\phi(x)$ tend vers 0 à l'infini.

Prenons $\phi(x) = \log\left(1 - \frac{1}{x^s}\right) / \log x$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{p \geq x} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) &= \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{t^s}\right) / \log t \, dt + O(x^{1/2 - s} \log x) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n \geq 1} \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{ns} \log t} + O(x^{1/2-s} \log x) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{Li}(x^{1-sn})}{n} + O(x^{1/2-s} \log x) \\
&= \frac{1}{k} \mathrm{Li}(x^{1-s}) + O(x^{1/2-s} \log x) \\
&= \frac{1}{k} \mathrm{Li}\left((k\theta(x))^{1-s}\right) + O(x^{1/2-s} \log x).
\end{aligned}$$

VII - Grandes valeurs des fonctions $\sigma_s(N)$ et de fonctions voisines.

1. **La fonction $\sigma_s(n)$.**
2. **Grandes valeurs de $\sigma_{-s}(n)$.**
3. **Ordre maximum de $Q_4(n)$.**
4. **Ordre maximum de $Q_6(n)$.**
5. **Ordre maximum de $Q_8(n)$.**

---

1. La fonction $\sigma_s(n)$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $\sigma_s(n) = \sum_{d \mid n} d^s$. On remarque que $\sigma_s(n) = n^s\, \sigma_{-s}(n)$.

On a traité la fonction $\sigma_o = d$ au chapitre V. La fonction $\sigma_{-1}(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$ a été étudiée par Alaoglu-Erdös, [ALA], sans avoir connaissance des papiers de S. Ramanujan.

Pour $s > 0$, nous étudions ici $\sigma_{-s}(n)$. C'est une fonction multiplicative et

$$\sigma_{-s}(p^\alpha) = \frac{p^{s(\alpha+1)} - 1}{p^{s(\alpha+1)} - p^{\alpha s}} = \frac{1 - p^{-s(\alpha+1)}}{1 - p^{-s}} .$$

Nous dirons que $N = N_\varepsilon$ est ε-σ_{-s} supérieurement intéressant si pour tout N' on a :

$$(1) \qquad \frac{\sigma_{-s}(N)}{N^\varepsilon} \geq \frac{\sigma_{-s}(N')}{N'^\varepsilon} .$$

Cette définition est légèrement différente de celle adoptée par Ramanujan et Alaoglu-Erdos. Ces auteurs considéraient uniquement la plus grande des solutions de (1). Si N est un nombre σ_{-s} supérieurement intéressant alors il vérifie

$$\sigma_{-s}(N) > \sigma_{-s}(N') \quad \text{pour tout } N' < N.$$

Pour ε et k donnés, définissons x_k et $x = x_1$ par l'égalité

$$(2) \qquad \frac{x_k^{s(k+1)} - 1}{x_k^{s(k+1)} - x_k^s} = x_k^\varepsilon$$

identique à

$$(3) \qquad \frac{1 - x_k^{-s(k+1)}}{1 - x_k^{-sk}} = x_k^\varepsilon .$$

Théorème.

N est ε-σ_{-s} supérieurement intéressant ssi

$$N = \prod p^{a_p} \quad \text{avec} \quad a_p = k \ \text{ ssi } \ x_{k+1} \leq p \leq x_k .$$

Preuve : Soit

(4) $$f(y, \alpha) = (1 - y^{-s(\alpha+1)}) / (1 - y^{-s\alpha})\,;$$

c'est une fonction décroissante de y et de α.

N sera ε-intéressant si pour tout p, $\sigma_{-s}(p^\alpha) / p^{\alpha\varepsilon}$ est maximum en $\alpha = a_p$. La fonction $\alpha \to \sigma_{-s}(p^\alpha) / p^{\alpha\varepsilon}$ doit donc être plus grande pour $\alpha = a_p$ que pour $\alpha = a_p+1$ et $\alpha = a_p-1$, si $a_p \geq 1$.

La traduction de ceci donne

$$f(p, a_p+1) \leq p^\varepsilon \leq f(p, a_p)$$

et l'on aura $a_p = k$ si

$$f(p, k+1) \leq p^\varepsilon < f(p, k).$$

Compte tenu de la définition de x_k, il s'ensuit que $a_p = k$ ssi $x_{k+1} \leq p \leq x_k$.

Posons

(5) $$H_\alpha(y) = \prod_{p \leq y} f(p, \alpha).$$

Alors si N est ε-σ_{-s} supérieurement intéressant,

(6) $$N = e^{\theta(x_1)+\theta(x_2)+ \ldots + \theta(x_m)}$$

(7) $$\sigma_{-s}(N) = H_1(x_1)\, H_2(x_2) \ldots H_m(x_m)$$

où $m = a_2$ est l'exposant de 2 dans la factorisation de N.

On a $f(2, m) \sim 2^\varepsilon$ soit $m \sim -\dfrac{1}{s}\dfrac{\log \varepsilon}{\log 2} \sim \dfrac{\log x}{\log 2}$, soit

(8) $$a_2 \sim \frac{\log x}{\log 2}\,.$$

2. Grandes valeurs de $\sigma_{-s}(n)$.

Propriété : On a

(9) $$x_r = x_1^{1/r}\left(r^{1/rs} + O(1/\log x_1)\right).$$

Preuve : On a d'après (3)

$$\varepsilon = \log(1+x^{-s}) / \log x$$

d'où

$$x_r^{\log(1+x^{-s}) / \log x} = (1-x_r^{-s(r+1)}) / (1 - x_r^{-sr})\,.$$

Définissons t_r par $x_r = x^{t_r/r}$.

Il vient :

$$(1+x^{-s})^{t_r/r} = (1-x^{-st_r(1+1/r)}) / (1-x^{-st_r})$$

d'où

$$\frac{t_r}{r}(x^{-s} + O(x^{-2s})) = x^{-st_r} + 0\,(x^{-s(1+1/r)})$$

$$t_r = r\, e^{(t_r - 1)\log x^{-s}} + O(x^{-s/r})$$

et

$$t_r = 1 - \frac{\log r}{\log x^{-s}} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{-2s}}\right)$$

d'où la formule (9).

Pour calculer $\sigma_{-s}(N)$ nous allons utiliser les résultats du paragraphe 5 du chapitreVI, résultats que nous reformulons ici sous une forme simplifiée.

(10) $$A(s, y) = \frac{1}{\prod_{p\leq y}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = |\zeta(s)| \exp(\mathrm{Li}\,(\theta(y))^{1-s} + O\,(y^{1/2-s}))$$

ceci est valable pour $s \neq 1$ et et $s \neq 1/2$; pour $s < \frac{1}{2}$ on peut enlever $\zeta(s)$. Pour $s = 1$, on a

(11) $$A(1, y) = \frac{1}{\prod_{p\leq y}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = e^{\gamma}\left(\log \theta(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right).$$

Compte tenu de (4), (5) et (10), il vient

(12) $$H_r(y) = \frac{A(sr,\ y)}{A(s(r+1),\ y)}\ .$$

Par suite, si $s\,r \neq 1$ et $s(r+1) \neq 1$, on a

(13) $$H_r(y) = \left|\frac{\zeta(sr)}{\zeta(s(r+1))}\right| \exp\,(\,\mathrm{Li}\,(\theta(y)^{1-r\,s}) - \mathrm{Li}\,(\theta(y)^{1-(r+1)s}) + O\,(y^{1/2 - r\,s}))$$

ce qui donne grossièrement,

(14) $$H_r(y) = \left|\frac{\zeta(sr)}{\zeta(s(r+1))}\right| \exp O(y^{1-r\,s}),$$

et en vertu de (9)

(15) $$H_r(x_r) = \left|\frac{\zeta(sr)}{\zeta(s(r+1))}\right| \exp O(x^{1/r - s})\ .$$

Si sr ou $s(r+1)$ est égal à 1, alors on peut seulement écrire :

(16) $$H_{r-1}(x_{r-1})\, H_r(x_r)\, H_{r+1}(x_{r-1}) = \left|\frac{\zeta(s(r-1))}{\zeta(s(r+2))}\right| \exp O\,(x^{1/r-1 - s}).$$

En vertu de (15) et de (16), si pour tout $q \geq 1$, $sq \neq 1$ ou s'il existe $q \geq 4$ tel que $sq = 1$, on a, avec (7),

(17) $$\sigma_{-s}(N) = H_1(x_1)\, H_2(x_2)\ |\zeta(3s)|\ \exp O(x^{1/3 - s})\ ,$$

et l'on vérifie que cette formule est aussi valable pour $s = 1/2$ et 1.

Si $s = \frac{1}{3}$, il vient avec (11)

$$(18) \qquad \sigma_{-1/3}(N) = H_1(x_1)\, H_2(x_2)\ \exp(O(\log\log x)).$$

Pour les deux premiers termes nous utilisons les développements plus précis du paragraphe 5 du chapitre VI. La formule (27) a comme reste $O(x^{1/2-s}/(\log x)^2)$ et elle sera utilisée avec $x = x_1 = O(\log N)$; les calculs se feront donc en $O((\log N)^{1/2-s}/(\log\log N)^2)$. D'après (6) on a

$$(19) \qquad \log N = \theta(x) + x_2 + O(x^{1/3})$$

d'où pour $a > 0$

$$(20) \qquad \mathrm{Li}\,(\theta(x)^a) = \mathrm{Li}\,(\log N)^a - x_2 \frac{(\log N)^{a-1}}{\log\log N} + O(x^{a-2/3}),$$

et

$$(21) \qquad \mathrm{Li}\,(x^a) = \mathrm{Li}\,((\log N)^a) + O(x^{a-1/2}\log x).$$

Si $a < 1-s$, les termes erreurs de (20) et (21) et le deuxième terme du membre de droite de la formule (20) rentrent dans le terme erreur $O((\log N)^{1/2-s}/(\log\log N)^2)$.

On a aussi

$$(22) \qquad S_s(x) = S_s(\log N) + O(x^{-s}(\log x)^4).$$

D'après la formule (27) du § 5 du chapitre précédent, on peut écrire les deux formules suivantes :

$$(23) \quad \log H_1(x_1) = \log\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\right| + \mathrm{Li}\,(\theta(x)^{1-s}) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\,(\theta(x)^{1-2s}) + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{Li}\,(\theta(x)^{1-ns})$$

$$- \frac{1}{2}\mathrm{Li}\,(x^{1/2-s}) + \frac{x^{1/2-s} + S_s(x)}{\log x} + O(x^{1/2-s}/(\log x)^2),$$

avec $n = \lfloor 1 + \frac{1}{2s} \rfloor$ et $s^{-1} \notin \mathbb{N}$,

$$(24) \qquad \log H_2(x_2) = \log\left|\frac{\zeta(2s)}{\zeta(3s)}\right| + \mathrm{Li}\,(\theta(x_2)^{1-2s}) + O(x^{1/2-s}/\log x)^2$$

pour $s^{-1} \notin \mathbb{N}$.

On obtient ainsi

$$(25) \qquad \log \sigma_{-s}(N) = \log|\zeta(s)| + \mathrm{Li}\,(\theta(x)^{1-s} - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\,(\theta(x)^{1-2s}) + \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{Li}\,(\theta(x)^{1-ns})$$

$$- \frac{1}{2}\mathrm{Li}\,(x^{1/2-s}) + \mathrm{Li}\,(x_2^{1-2s}) + \frac{x^{1/2-s} + S_s(x)}{\log x} + O\left(\frac{x^{1/2-s}}{(\log x)^2}\right)$$

avec $n = \lfloor 1 + \frac{1}{2s} \rfloor$ et $s^{-1} \notin \mathbb{N}$.

Avec les formules (20), (21), (22) et

$$(26) \qquad x_2 = 2^{1/2\,s} (\log N)^{1/2} + 0((\log N)^{1/2} / \log\log N)$$

il vient

$$(27) \qquad \log \sigma_{-s}(N) = \log |\zeta(s)| + \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-s} - \frac{1}{2}\ \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-2\,s} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n}\ \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-n\,s} - \frac{1}{2}\ \mathrm{Li}\ ((\log N)^{1/2\,-\,s} + \frac{(\log N)^{1/2\,-\,s} + S_s(\log N)}{\log\log N} + \mathrm{Li}\ (x_2^{1-2s}) - \frac{x_2\ (\log N)^{-s}}{\log\log N} + O\left(\frac{(\log N)^{1/2-s}}{(\log\log N)^2}\right).$$

On peut encore écrire :

$$(28) \quad \log \sigma_{-s}(N) = \log |\zeta(s)| + \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-s} - \frac{1}{2}\ \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-2\,s} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\ \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-n\,s} + \frac{2s(2^{1/2\,s} - 1)}{1-2\ s}\ \frac{(\log N)^{1/2-\,s}}{\log\log N} + \frac{S_s(\log N)}{\log\log N} + O\frac{(\log N)^{1/2-\,s}}{(\log\log N)^2}$$

avec $n = \lfloor 1 + \frac{1}{2s} \rfloor$ et $s^{-1} \notin \mathbb{N}$.

Preuve : On a d'abord

$$\mathrm{Li}\ (\log N^{1/2\,-\,s}) = \frac{(\log N)^{1/2\,-\,s}}{(1/2\ -\ s)\log\log N} + O\left(\frac{(\log N)^{1/2\,-\,s}}{(\log\log N)^2}\right)$$

et

$$\mathrm{Li}\ (x_2^{1-2s}) = \frac{x_2^{1-2s}}{(1-2s)\log x_2} + O\left(\frac{x_2^{1-2s}}{(\log x_2)^2}\right)$$

$$= \frac{2^{1/2s}\ (\log N)^{1/2-\,s}}{(1-2s)\log\log N} + O\left(\frac{(\log N)^{1/2-s}}{(\log\log N)^2}\right)$$

et l'on reporte ces expressions dans (27).

Remarque. Le coefficient devant $(\log N)^{1/2\,-\,s} / \log\log N$ trouvé par Ramanujan est l'opposé de celui que l'on vient d'écrire. ?

Pour $s < \frac{1}{2}$, la formule (28) est encore valable si $s^{-1} \in \mathbb{N}$ et l'on peut enlever $\log |\zeta(s)|$ puisque le reste tend vers l'infini avec N.

Pour $s > \frac{1}{2}$ et $s \neq 1$ la formule (28) s'écrit

$$(29) \quad \log \sigma_{-s}(N) = \log |\zeta(s)| + \mathrm{Li}\ (\log N)^{1-s} + \frac{2s(2^{1/2\,s} - 1)}{1-2\ s}\ \frac{(\log N)^{1/2-\,s}}{\log\log N}$$

$$+\frac{S_1(\log N)}{\log\log N} + O\left(\frac{(\log N)^{1/2-s}}{\log\log N}\right).$$

Il reste à établir les formules dans les deux cas particuliers $s = \frac{1}{2}$ et $s = 1$, ce que l'on peut obtenir soit comme limite des formules précédentes, soit comme nous allons le faire à partir des formules du chapitre VI.

Cas $s = \frac{1}{2}$.

D'après les formules (17) et (12)

$$\sigma_{-1/2}(N) = \frac{A(1/2, x_1)}{A(1, x_1)} \frac{A(1, x_2)}{A(3/2, x_2)} |\zeta(3/2)| \exp O(x^{-1/6})$$

Avec les formules (10), (11) et la formule (30) du chapitre précédent, il vient

$$\sigma_{-1/2}(N) = -\sqrt{2}\ \zeta(1/2) \exp\left(\mathrm{Li}\sqrt{\theta(x)} + (1+S_{1/2}(x)) / \log x + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)\right) \frac{\log\theta(x_2)}{\log\theta(x)}.$$

Les formules (19) et (26) donnent

$$\mathrm{Li}\left(\sqrt{\theta(x)}\right) = \mathrm{Li}\left(\sqrt{\log N}\right) - \frac{2}{\log\log N} + O\left(\frac{1}{(\log\log N)^2}\right).$$

Avec (26) et (22), on a

$$\frac{\log\theta(x_2)}{\log\theta(x)} = \frac{\log 2 + (\log\log N)/2 + O(1/\log\log N)}{\log\log N + O((\log\log N)^2\sqrt{\log N})}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\log\log N} + O\left(\frac{1}{\log\log N}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2\log 2}{\log\log N} + O\left(\frac{1}{(\log\log N)^2}\right)\right).$$

Il vient donc

(30) $$\sigma_{-1/2}(N) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \zeta(1/2) \exp\left(\mathrm{Li}\left(\sqrt{\log N}\right) + \frac{2\log 2 - 1 + S_{1/2}(\log N)}{\log\log N} + O\left(\frac{1}{(\log\log N)^2}\right)\right).$$

Remarque : Ramanujan a écrit le coefficient $-\sqrt{2}$ au lieu de $-\sqrt{2}/2$.

Cas $s = 1$.

$$\sigma_{-1}(N) = \frac{A(1, x_1)}{A(2, x_1)} \frac{A(2, x_2)}{A(3, x_2)} \zeta(3)\, O(x^{-1/3})$$

et d'après (10) et la formule (32) du chapitre précédent

$$A(1, x) = e^{\gamma}(\log \theta(x) + \frac{2}{\sqrt{x}} + S_1(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{A(2, x_2)}{A(2, x_1)} &= \exp\left(\mathrm{Li}\,\theta(x_2)^{-1} - \mathrm{Li}\,\theta(x)^{-1}\right) + O(x^{-3/4})) \\ &= \exp\left(\mathrm{Li}\,\theta(x_2)^{-1} + O\left(\frac{1}{x\log x}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-1}{x_2 \log x_2} + O\left(\frac{1}{x_2 \log x_2^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\log N}\,\log\log N} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log N}\,(\log\log N)^2}\right).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\log \theta(x) &= \log\log N - \frac{x_2}{\log N} + O(x^{-2/3}) \\ &= \log\log N - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\log N}} + O((\log N)^{-2/3}),\end{aligned}$$

d'où

(31) $$\sigma_{-1}(N) = e^{\gamma}\left(\log\log N - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\log N}} + S_1(\log N) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log N}\,\log\log N}\right)\right).$$

On a vu , (formule (20), ch.VI) que $|S_1(x)| \leq 0{,}0462\, x^{-1/2}$, on a donc

$$\overline{\lim}\ ((\sigma_{-1}(N) - e^{\gamma}\log\log N)\sqrt{\log N}) \leq -1{,}393,$$
$$\underline{\lim}\ ((\sigma_{-1}(N) - e^{\gamma}\log\log N)\sqrt{\log N}) \geq -1{,}558.$$

3. Ordre maximum de $Q_4(n)$.

Le nombre de façons d'écrire n comme somme de 4 carrés est, d'après le paragraphe 2 du chapitre II,

$$r_4(n) = 8\,\sigma(n) \quad \text{si } n \text{ est impair}$$
$$r_4(n) = 24\,\sigma(m) \quad \text{si } n = 2^k m \text{ avec } m \text{ impair.}$$

Ramanujan considère $Q_4(n) = r_4(n) / 8$.

Etudions d'abord l'ordre maximum de $\sigma(n)$ sur les nombres impairs. Comme au paragraphe précédent les nombres $n = 3^{a_3} 5^{a_5} \ldots p^{a_p}$, pour lesquels l'ordre est maximum, vérifient

$$\log n \sim p$$

$$\sigma_{-1}(n) \sim \prod_{\substack{q\geq 3\\ q\leq p}} \frac{1}{1-q^{-1}} = \frac{1}{2}\prod_{q\leq p}\frac{1}{1-q^{-1}} \sim \frac{e^{\gamma}}{2}\log\log n\,.$$

Pour les nombres $n = 2^k 3^{a_3} 5^{a_5} \dots p^{a_p}$, on a

$$\frac{Q_4(n)}{n} = \frac{3\sigma(n/2^{-k})}{n} .$$

Ce sont ces nombres, avec $k = 1$, qui donnent les plus grandes valeurs de $Q_4(n)$.

$$\frac{Q_4(n)}{n} \sim \frac{3}{4} e^{\gamma} \log \log n.$$

La formule (31) nous donne donc l'ordre maximum de $\frac{Q_4(n)}{n}$, c'est à dire

(35) $$\frac{Q_4(n)}{n} = \frac{3}{4} e^{\gamma}\left(\log \log n - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\log n}} + S_1 (\log n) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}\log \log n}\right)\right).$$

4. Ordre maximum de $Q_6(n)$.

Soit $r_6(n)$ le nombre de façons d'écrire n sous forme de somme de 6 carrés et $Q_6(n) = r_6(n) / 12$. D'après Jacobi (voir ch. 2), on a, χ étant le caractère modulo 4,

$$r_6(n) = 16 \sum_{d \mid n} \chi\left(\frac{n}{d}\right) d^2 - 4 \sum_{d \mid n} \chi(d)\, d^2 .$$

Ecrivons $n = 2^a m$ avec m impair

Comme $\chi(d) \neq 0$ ssi $d|m$ et $\chi\left(\frac{n}{d}\right) \neq 0$ ssi $d = 2^a \delta$ avec $\delta \mid m$, on a

(36) $$r_6(n) = 4 \sum_{\delta \mid m} \chi(\delta) \left(\left(\frac{2^{a+1} m}{\delta}\right)^2 - \delta^2\right) \quad \text{avec } \chi(\delta) = (-1)^{(\delta-1)/2},$$

par suite

(A) si $m \equiv 1 \pmod 4$ on a $\frac{m}{\delta} \equiv \delta \pmod 4$ et ainsi

(37) $$r_6(n) = 4 \sum_{\delta \mid m} \chi(\delta) \left((2^{a+1} \delta)^2 - \left(\frac{m}{\delta}\right)^2\right)$$

d'où en faisant la demi-somme de (36) et (37)

$$\begin{aligned} r_6(n) &= 4 \sum_{\delta \mid m} \chi(\delta)\, (2^{2a+2} - 1)\, \delta^2 \\ &= 4\, (2^{2a+2} - 1) \sum_{\delta \mid m} \chi(\delta)\, \delta^2 \\ Q_6(n) &= \frac{2^{2a+2} - 1}{3} \sum_{\delta \mid m} \chi(\delta)\, \delta^2 , \end{aligned}$$

soit

(38) $$Q_6(n) = \frac{2^{2a+2}-1}{3} \prod_{q\equiv 1 \pmod 4} \frac{q^{2(a_q+1)}-1}{q^2-1} \prod_{q\equiv 3 \pmod 4} \frac{1-(-q^2)^{a_q+1}}{1+q^2}$$

(B) Si $m \equiv 3 \pmod 4$, $\frac{m}{\delta} \not\equiv \delta \pmod 4$ et l'on arrive à

(39) $$Q_6(n) = -\frac{2^{2a+2}+1}{3} \sum_{\delta \mid m} \chi(\delta)\, \delta^2$$

Exemples : $r_6(5) = 312$, $r_6(3) = 160$.

Finalement, on peut écrire avec $n = \prod q^{a_q}$,

(40) $$\frac{Q_6(n)}{n^2} = c \prod_{q\equiv 1 \pmod 4} \frac{1-q^{-2(a_q+1)}}{1-q^{-2}} \prod_{q\equiv 3 \pmod 4} \frac{1-(-q^{-2})^{a_q+1}}{1+q^{-2}}$$

avec $c = \frac{2^{2a_2+2}-1}{3.2^{2a_2}}$ ou $c = \frac{2^{2a_2+2}+1}{3.2^{2a_2}}$ selon que $n\,2^{-a_2} \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$.

On voit donc que $Q_6(n)/n^2$ est grand si

(i) $n\,2^{-a_2} \equiv 3 \pmod 4$,

(ii) $a_2 = 0$ car alors c est le plus grand possible,

(iii) $a_q = 0$ pour $q \equiv 3 \pmod 4$ pour que $(1-(-q^{-2})^{a_q+1}) / (1+q^{-2})$ soit maximum.

Toutes ces conditions ne peuvent être réalisées en même temps. Mais en prenant un seul facteur premier $\equiv 3 \pmod 4$, le plus grand possible, d'exposant 1, soit

$$n = 5^{a_5}\, 13^{a_{13}} \ldots p^{a_p}\, p'$$

avec $5, 13, .., p \equiv 1 \pmod 4$ et $p' \equiv 3 \pmod 4$, p' et p voisins, on a un nombre n tel que $Q_6(n)/n^2$ est grand. Dans ce cas

$$Q_6(n) = \frac{5}{3}\, \sigma_2\left(\frac{n}{p'}\right) (p'^2 - 1).$$

Il reste à évaluer $\sigma_2\left(\frac{n}{p'}\right)$ et d'abord les grandes valeurs de $\sigma_2(n)$ sur les nombres dont tous les facteurs premiers sont congrus à 1 modulo 4, soit $n = 5^{a_5}\, 13^{a_{13}} \ldots p^{a_p}$.

Posons $\theta(x) = \theta(x\,;4,1) \sim \frac{x}{2}$.

On a

$$\log n = \theta(x) + O(\sqrt{x}),$$

d'où

$$\theta(x) = \log n + O(\sqrt{\log n}) .$$

D'après la formule (34) du chapitre VI, on peut écrire

(41) $$\prod_{\substack{q\geq x\\ q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)}} \left(1-\frac{1}{q^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,\frac{1}{2\theta(x)} + O\left(\frac{\log x}{x^{3/2}}\right)\right).$$

Remarque : Ramanujan a comme reste $O\left(\frac{1}{x^{3/2}\log x}\right)$.

Pour $s > 1$, on a

$$\sigma_{-s}(n) = \prod_{x_2\leq p\leq x_1}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\prod_{x_3\leq p\leq x_2}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)\ \ldots.$$

$$= \frac{1}{\prod_p (1-p^{-s})}\prod_{p\geq x}(1-p^{-s})\prod_{x_2\leq p\leq x}(1-p^{-2s})\ \ldots$$

et ici seuls les $p \equiv 1 \pmod 4$ interviennent.

On a donc

$$\frac{\sigma_2(n)}{n^2} = \prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)}(1-p^{-2})^{-1}\ \exp\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\left(\frac{1}{2\log n}\right)+O\left(\frac{\log\log n}{(\log n)^{3/2}}\right)\right),$$

soit encore

(42) $$\frac{\sigma_2(n)}{n^2} = \prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)}(1-p^{-2})^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\left(\frac{1}{2\log n}\right)+O\left(\frac{\log\log n}{(\log n)^{3/2}}\right)\right).$$

Pour la fonction Q_6 nous avons

$$\frac{Q_6(n)}{n^2} = \frac{5}{3}\ \frac{\sigma_2(n/p')}{n^2/p'^2}\ (1-p'^{-2})$$

soit

(43) $$\frac{Q_6(n)}{n^2} = \frac{5}{3}\prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)}(1-p^{-2})^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\left(\frac{1}{2\log n}\right)+O\left(\frac{\log\log n}{(\log n)^{3/2}}\right)\right)$$

ou plus simplement

(44) $$\frac{Q_6(n)}{n^2} = \frac{5}{3}\prod_{p\equiv 1\ (\mathrm{mod}4)}(1-p^{-2})^{-1}\left(1-\frac{1}{4\log n\log\log n}+O\left(\frac{1}{\log n\,(\log\log n)^2}\right)\right).$$

5. Ordre maximum de $Q_8(n)$.

Le nombre de façons d'écrire n comme somme de 8 carrés est

(45) $$r_8(n) = 16\,(-1)^n\sum_{d\mid n}(-1)^d d^3 \quad \text{et l'on pose } Q_8(n) = r_8(n)/16.$$

Si n est impair on a

$$(46) \qquad Q_8(n) = \sigma_3(n) \text{ et } Q_8(n) / n^3 = \sigma_{-3}(n).$$

Si n est pair posons $n = 2^k m$ avec m impair,

alors
$$Q_8(n) = - \sum_{\delta \mid m} \delta^3 + \sum_{\substack{a=1 \\ \delta \mid m}}^{k} \delta^3 \, (2^{3a})$$

$$= \frac{8^{k+1} - 15}{7} \, \sigma_3(m)$$

d'où

$$(47) \qquad \frac{Q_8(n)}{n^3} = \sigma_{-3}(n) \frac{1 - 15 \, 8^{-(k+1)}}{1 - 8^{-(k+1)}} \, .$$

Sur les nombres impairs

$$\sigma_{-3}(n) \sim \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{p^3}\right)^{-1} = \frac{7}{8} \, \zeta(3).$$

Par suite, si n est impair, les grandes valeurs de $\frac{Q_8(n)}{n^3}$ sont $\frac{7}{8} \zeta(3)$ et pour n pair $\zeta(3)$ fois un coefficient aussi voisin de 1 que l'on veut. Par suite les grandes valeurs de $Q_8(n)/n^3$ sont obtenues pour les nombres rendant grand $\sigma_{-3}(n)$.

D'après la formule (28), on peut écrire

$$(48) \; \sigma_{-3}(n) = \zeta(3) \exp\left(\operatorname{Li}(\log n)^{-2} - \frac{6}{5} (2^{1/6} - 1) \frac{(\log n)^{-5/2}}{\log\log n} + \frac{S_1(\log n)}{\log\log n} + O\left(\frac{(\log n)^{-5/2}}{(\log\log n)^2}\right) \right).$$

Pour les valeurs de n rendant $\sigma_{-3}(n)$ maximum, on a, d'après (9)

$$k = \log x / \log 2 + O(\log\log x)$$

donc

$$8^{-k} = \exp(-3 k \log 2) = \exp(-3 \log x + O(\log\log x))$$
$$= O\left(\frac{\log x}{x^3}\right) = O\left(\frac{\log\log n}{(\log n)^3}\right).$$

Cette estimation montre donc que

$$(49) \quad \frac{Q_8(n)}{n^3} = \zeta(3) \exp\left(\operatorname{Li}(\log n)^{-2} - \frac{6}{5} (2^{1/6} - 1) \frac{(\log n)^{-5/2}}{\log\log n} + \frac{S_1(\log n)}{\log\log n} + O\left(\frac{(\log n)^{-5/2}}{(\log\log n)^2}\right) \right),$$

et plus simplement

$$(50) \qquad \frac{Q_8(n)}{n^3} = \zeta(3) \left(1 - \frac{1}{2(\log n)^2 \log\log n} + O\left(\frac{1}{(\log \log\log n)^2}\right)\right) .$$

REFERENCES

[ALA] **L. ALAOGLU et P. ERDOS**, On highly composite numbers and similar numbers. Trans. Amer. Math. Soc. 56, (1944), pp. 448-469.

[BLA] **A. BLANCHARD**, Initiation à la théorie analytique des nombres premiers, 1969, Dunod.

[DAV] **H. DAVENPORT**, Higher Arithmetic, 1982, Cambridge.

[DIC] **L.E. DICKSON**, History of the theory of numbers. Vol. I et Vol. II, 1971, Chelsea.

[ERD] **P. ERDÖS, J.L. NICOLAS**, Répartition des nombres super abondants. Bull. Soc. Math. France, 103, (1975), pp. 113-122.

[FLA] **D.E. FLATH**, Introduction to number theory, 1989, Wiley.

[GAU] **C.F. GAUSS**, Recherches arithmétiques, 1807, Albert Blanchard.

[HAR1] **G.H. HARDY et E.M. WRIGHT**, The theory of numbers, 1971, Oxford.

[HAR2] **G.H. HARDY**, Ramanujan, 1940, Chelsea.

[LAN] **E. LANDAU**, Elementary Number Theory, 1927, Chelsea.

[NIC1] **J.L. NICOLAS**, Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan. Canadian J. Math. Vol. III, n°1, (1971), pp. 115-130.

[NIC2] **J.L. NICOLAS et G.ROBIN**, Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de N. Canad. Math. Bull. Vol. 26, (4), 1983, pp. 485-492.

[NIC3] **J.L. NICOLAS**, Petites valeurs de la fonction d'Euler. Journal of number theory, vol.17, n° 3,1983, pp. 375-388.

[RAM1] **S. RAMANUJAN**, Highly Composite numbers. Proc. London Math. Soc. Serie 2, 14, 1915, pp. 347-400 et Collected paper, pp. 78-128, 1962, Chelsea.

[RAM2] **S. RAMANUJAN**, The last notebook and other unpublished papers, 1988, Springer Verlag.

[ROB1] **G. ROBIN**, Sur l'ordre maximum de la fonction somme des diviseurs. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Paris, 1981-1982, pp. 223-244.

[ROB2] **G. ROBIN**, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, J. Math. pures et Appl. , 63, 1984, pp. 187-213.

[ROB3] **G. ROBIN**, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs dans les progressions arithmétiques. J. Math Pures et Appl., 66, 1987, pp. 337-349

[WHI] **E.T. WHITTAKER et G.N. WATSON**, A course of modern analysis, 1969, Cambridge.