LOCALISATION DES ZEROS DE POLYNOMES INTERVENANT EN THEORIE DU SIGNAL

Par

J.L. NICOLAS et A. SCHINZEL*

Dans cet article, nous étudions la répartition des racines dans le plan complexe de deux familles de polynômes :

$$f(z) = f_n(z) = z^{n+1} - (n+1)\, z + n$$

et

$$A(z) = A_{m+2}(z) = z^{m+2} - 2\,\frac{m+2}{m}\, z^{m+1} + \frac{(m+2)\,(m+1)}{m\,(m-1)}\, z^m - 2\,\frac{m+2}{m\,(m-1)}\, z + \frac{2}{m}\,.$$

Ces deux familles de polynômes interviennent en théorie du signal (cf. [2] et [3]). Chacun de ces polynômes admet 1 comme racine, et pour résoudre le problème de physique, il fallait montrer que les autres racines ne sont pas trop proches de 1. Nous obtenons pour chacune des deux familles des résultats nettement plus précis que ceux de [2] et [3] sur la distance au cercle unité des zéros de ces polynômes et sur la distribution des arguments de ces zéros.

I L'équation $z^{n+1} - (n+1)\, z + n = 0$.

Dans [3], pour traiter un problème provenant de la théorie du signal, on aboutit à l'équation

(1) $\quad z + z^2 + \dots + z^n = n$

qui a la racine $z = 1$ en évidence. Multipliant (1) par $(z-1)$, on obtient l'équation trinôme :

* Recherche financée partiellement par le CNRS, Greco "Calcul Formel" et P.R.C. Mathématiques Informatique.

(2) $z^{n+1} - (n+1)\, z + n = 0$

qui admet 1 comme racine double. Divisant (1) par (z-1), on a :

(3) $z^{n-1} + 2z^{n-2} + \ldots + (n-1)\, z + n = 0.$

Les résultats mentionnés dans [3] étaient les suivants : Soit $z_1, \ldots, z_n = 1$ les racines de (1). On a :

(4) $\frac{n}{n-1} \le |z_k| \le (2n)^{1/n}$, $1 \le k \le n-1$

(5) $\left|\mathrm{Arg}\, z_k - \frac{2k\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{n+1}$, $1 \le k \le n$.

Dans (4), la majoration s'obtient par le théorème classique de Cauchy (cf. [4], Th. 27.1). On considère l'équation

$$z^{n+1} - (n+1)\, z - n = 0$$

et on montre que sa racine réelle positive est $\le (2n)^{1/n}$.

La minoration dans (4) s'obtient par une application du théorème de Eneström-Kakeya (cf. [4], p. 137, ex. 2).

Pour prouver (5), on fait dans (2) le changement de variables $z = \frac{\lambda}{y}$, où λ est une constante convenable, et on applique [4], p. 165. ex. 3.

Lorsque n est pair, l'équation (1) a une racine réelle négative, correspondant dans (5) à $k = n/2$. Les autres racines sont z_k avec $1 \le k \le \frac{n}{2} - 1$, et les conjugués $\overline{z}_k$. On écrira $z_k = \rho_k \exp(i\, \theta_k)$, avec $\left|\theta_k - \frac{2k\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{n+1}$. Lorsque n est impair, la seule racine réelle de (1) est 1. Les autres racines sont $z_k = \rho_k \exp(i\, \theta_k)$ avec $\left|\theta_k - \frac{2k\pi}{n}\right| \le \frac{\pi}{n+1}$ pour $1 \le k \le \frac{n-1}{2}$ et leurs conjugués.

Théorème 1. - La suite finie ρ_k, $1 \le k \le n/2$ est une fonction croissante de k.

Démonstration : L'équation (2) entraine :

$$|z^{n+1}| = |(n+1)\, z - n|$$

et en posant $z = \rho \exp(i\, \theta)$, cela entraine :

(6) $\rho^{2n+2} - ((n+1)\, \rho - n)^2 - 2n\, (n+1)\, \rho\, (1 - \cos\theta) = 0$.

L'équation (6) pour θ fixé a une racine et une seule $\rho(\theta) > 1$. En effet, désignons par $g(\rho,\theta)$ le membre de gauche de (6). On a $g(1,\theta) < 0$, et $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) > 0$ pour $\rho \ge 1$. Soit maintenant $0 \le \theta < \theta' \le \pi$. On a :

$$g(\rho,\theta') = g(\rho,\theta) - 2n\,(n+1)\,\rho(\cos\theta - \cos\theta') < g(\rho,\theta)$$

et donc $\rho(\theta') > \rho(\theta)$.

Théorème 2. - Il existe une constante absolue A (par exemple $A = 10^{40}$ convient) avec la propriété suivante : Si $A < k < n+1 - A$, on pose :

$$r_k = \left(-2(n+1)\cos\left(\frac{2k+n+1}{2n+1}\right)\pi\right)^{1/n+1} > 1,$$

alors l'équation $f(z) = z^{n+1} - (n+1)\,z+n = 0$ a une solution z_k satisfaisant à l'inégalité :

$$\left|z_k - r_k \exp\left(i\,\pi\,\frac{4k+1}{2n+1}\right)\right| \leq 3\,\frac{r_k-1}{r_k^n - 1} \leq \frac{3}{n}.$$

Démonstration : Il est commode de poser

$$\alpha = \frac{2k+n+1}{2n+1}\,\pi, \quad \beta = \frac{4k+1}{2n+1}\,\pi, \quad x_k = r_k \exp(i\,\beta).$$

On a alors $2\alpha = \beta+\pi$ et $\beta(n+1) - \alpha = 2k$. Il vient ensuite :

$$f(x_k) = r_k^{n+1} \exp(i\,(n+1)\,\beta) - (n+1)\,r_k \exp(i\,\beta) + n$$

$$= [-2(n+1)(\cos\alpha)\exp(i\,(n+1)\beta) - (n+1)\exp(i\,\beta) + n+1] - (n+1)\,(r_k-1)\exp(i\,\beta) - 1\,.$$

On observe que le crochet s'annule, et on a :

$$|f(x_k)| \leq (n+1)\,(r_k-1) + 1.$$

On a ensuite

$$|f'(x_k)| \geq (n+1)\,(r_k^n - 1)$$

et pour $j = 2, \ldots, n+1$,

$$|f^{(j)}(x_k)| \leq j!\binom{n+1}{j} r_k^{n+1-j}\,.$$

Supposons qu'il n'existe pas de zéro de f dans le disque de centre x_k et de rayon $\rho = 3\,\frac{r_k-1}{r_k^n-1}$. On pourrait appliquer dans ce disque le principe du maximum à la fonction $1/f(z)$. Il existerait alors z, avec $|z-x_k| = \rho$, tel que $|1/f(x_k)| \leq |1/f(z)|$. Pour démontrer le théorème, nous allons montrer que pour tout z, tel que $|z-x_k| = \rho$, on a $|f(z)| > |f(x_k)|$. Par la formule de Taylor, on a :

$$(7) \qquad f(z) = f(x_k) + f'(x_k)\,(z-x_k) + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_k)}{j!}\,(z-x_k)^j\,.$$

Majorons le dernier terme :

$$\left|\sum_{j=2}^{n+1} \frac{f^j(x_k)}{j!}\,(z-x_k)^j\right| \leq \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n+1}{j} r_k^{n+1-j}\,\rho^j$$

$$\leq \binom{n+1}{2} \rho^2 \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n-1}{j-2} r_k^{n+1-j} \rho^{j-2} = \binom{n+1}{2} \rho^2 (r_k + \rho)^{n-1}$$

$$\leq \binom{n+1}{2} \rho^2 r_k^{n-1} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n-1} \leq \frac{e^3 n(n+1)}{2(1+3/n)} r_k^{n-1} \left(\frac{3}{r_k^{n-1} + \dots + 1}\right)^2 .$$

En utilisant l'inégalité

$$1 + x + \dots + x^{n-1} \geq n\, x^{(n-1)/2} .$$

valable pour $x \geq 0$, qui résulte de l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques, on majore le dernier terme de (7) par :

$$\leq \frac{9e^3}{2} \frac{n+1}{n+3} \leq \frac{9e^3}{2} \leq 90{,}4 .$$

Dans (7), le deuxième terme est en module, supérieur à $(n+1)\, \rho\, (r_k^n - 1) = 3(n+1)\,(r_k - 1)$. Pour que

$|f(z)| > |f(x_k|$ il suffit de vérifier que

$$3(n+1)\,(r_k-1) > 2|f(x_k)| + 90{,}4$$

et comme $|f(x_k)| \leq (n+1)\,(r_k-1) + 1$, il suffit de vérifier que

$$(n+1)\,(r_k-1) > 92{,}4 .$$

Ceci sera assuré par

$$\log r_k > 92{,}4 / (n+1),$$

ce qui est équivalent à :

$$2(n+1) \sin (\frac{4k+1}{4n+2} \pi) > \exp 92{,}4.$$

Or pour $A \leq k \leq n+1-A$, on a

$$\sin \frac{4k+1}{4n+2}\pi \geq \sin \frac{4A+1}{4n+2}\pi \geq \frac{4A+1}{2n+1} \geq \frac{4A}{2n+2}$$

puisque pour $0 < x \leq \pi/2$, on a $\sin x \geq (2/\pi)\, x$.

Le choix de $A = \frac{1}{4} \exp (92{,}4) \leq 3{,}4\,10^{39}$ convient donc dans le théorème. On pourrait par un calcul plus technique abaisser considérablement cette valeur.

Remarque : Soit $\varepsilon > 0$. Pour k vérifiant $\varepsilon < k/n < 1-\varepsilon$, le théorème 2 entraine :

$$z_k = r_k \exp\left(i\pi \frac{4k+1}{2n+1}\right) + O_\varepsilon\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

Théorème 3. - Soit $n \geq 2$. On pose :

$$F(\theta) = \left(\frac{\sin (n+1)\, \theta}{n+1}\right)^{n+1} - (\sin \theta) \left(\frac{\sin (n\, \theta)}{n}\right)^n .$$

Pour $1 \leq k \leq n/2$, l'équation $F(\theta) = 0$ a une racine et une seule θ_k dans l'intervalle

$\left(\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right)$. On pose $\rho_k = \frac{n \sin (n+1)\, \theta_k}{(n+1) \sin (n\, \theta_k)}$. Alors $z_k = \rho_k \exp (i\, \theta_k)$ est racine de l'équation (2).

Démonstration : Nous utiliserons une méthode due à Gauss pour résoudre une équation trinôme, (cf. [5], t. I, §122). Soit $z = \rho \exp(i\, \theta)$ une racine de (2). En identifiant les parties imaginaires de (2), on obtient :

(8) $$\rho^n = \frac{(n+1)\sin \theta}{\sin (n+1)\theta} .$$

Considérant ensuite la partie imaginaire de

$$1 - (n+1)\, z^{-n} + n\, z^{-(n+1)} = 0 ,$$

on obtient

(9) $$\rho = \frac{n \sin (n+1)\, \theta}{(n+1) \sin n\theta} .$$

On déduit de (8) et (9) que $F(\theta) = 0$, et en multipliant (8) et (9), on obtient

(10) $$\rho^{n+1} = \frac{n \sin \theta}{\sin n\theta} .$$

Soit maintenant θ tel que $F(\theta) = 0$ et tel que $\rho = \frac{n \sin (n+1)\theta}{(n+1) \sin (n\theta)} > 0$. Un calcul simple montre alors que $z = \rho \exp (i\theta)$ est racine de l'équation (2).

Lorsque $\theta \in \left[\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right]$, on a :

$$(n+1)\theta \in \left[2k\pi + \frac{2k\pi}{n},\ (2k+1)\pi\right]$$

$$n\theta \in \left[2k\pi,\ (2k+1)\pi - \frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right].$$

Donc $\sin (n+1)\theta \geq 0$ et $\sin (n\theta) \geq 0$. On en déduit $F\left(\frac{2k\pi}{n}\right) > 0$, $F\left(\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right) < 0$. L'équation $F(\theta) = 0$ a donc au moins une racine dans l'intervalle $\left]\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right[$. Désignons par θ_k la plus petite racine dans cet intervalle. On a $\rho_k = \frac{n \sin (n+1)\, \theta_k}{(n+1) \sin n\theta_k} > 0$ et donc $z_k = \rho_k \exp (i\theta_k)$ est racine de (2). En comptant les racines ainsi trouvées et leurs conjuguées, on obtient toutes les racines de (2), et cela démontre l'unicité de la racine θ_k dans $\left]\frac{2k\pi}{n}, \frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right[$.

Remarque : Ce théorème est moins précis que le théorème 2 sauf pour $k < c \log n$ et

$n/2 - c \log n < k < n/2$, où c est une constante convenable.

Théorème 4. - Soit

$$\varphi(x) = \log(\sin x) + (2\pi + x)\operatorname{cotg} x - 1 - \log(x + 2\pi).$$

L'équation $\varphi(x) = 0$ a une racine et une seule dans l'intervalle $]0,\pi[$, que nous noterons $a = 1,17830398284...$ Nous poserons $b = a + 2\pi$. Soit $\theta \in]2\pi/n, 3\pi/(n+1)[$ une racine de $F(\theta) = 0$. C'est le plus petit argument positif d'une racine de (2). Lorsque $n \to +\infty$, on a :

$$\theta = \frac{b}{n} - \frac{b}{2n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \frac{a_4}{n^4} + \frac{a_5}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

avec :

$$a_3 = \frac{7b}{24} + \frac{b^2}{12}\operatorname{cotg} a, \qquad a_4 = -\frac{3b}{16} + \frac{b^2}{8}\operatorname{cotg} a$$

$$a_5 = -\frac{b^3}{320} + \frac{743b}{5760} + \left(\frac{131b^2}{960} + \frac{b^4}{720}\right)\operatorname{cotg} a + \frac{3b^3}{320}\operatorname{cotg}^2 a - \frac{b^4}{720}\operatorname{cotg}^3 a.$$

Les valeurs numériques approchées sont :

$$b = 7,46148929002 \qquad b/2 = 3,73074464282$$

$$a_3 = 4,09688179715 \qquad a_4 = -4,27995037432 \qquad a_5 = 4,95345830505$$

Le plus petit module des racines de (3) vérifie :

$$\rho = 1 + \sum_{i=1}^{5} \lambda_i / n^i + O(n^{-6})$$

avec

$$\lambda_1 = b \operatorname{cotg} a - 1 = 2,08884301561 \ldots$$

$$\lambda_2 = (\lambda_1^2 - \lambda_1)/2 = (b^2 \operatorname{cotg}^2 a - 3b \operatorname{cotg} a + 2)/2 = 1,13721106413\ldots$$

$$\lambda_3 = (4b^3 \operatorname{cotg}^3 a - 23b^2 \operatorname{cotg}^2 a + 43\, b \operatorname{cotg} a - b^2 - 24)/24 = -2,01722700491\ldots$$

$$\lambda_4 = (1/48)(2b^4 \operatorname{cotg}^4 a - 18b^3 \operatorname{cotg}^3 a + 63b^2 \operatorname{cotg}^2 a - (2b^3 + 95\, b)\operatorname{cotg} a + 5b^2 + 48) = -1,21533237271\ldots$$

$$\lambda_5 = (1/5760)(48b^5 \operatorname{cotg}^5 a - 602b^4 \operatorname{cotg}^4 a + 3258b^3 \operatorname{cotg}^3 a - (108b^4 + 9087b^2)\operatorname{cotg}^2 a + (666b^3 + 12143b)\operatorname{cotg} a - (2b^4 + 993b^2 + 5760)) = -0,791611864055\ldots$$

Démonstration : On a d'abord :

$$\varphi'(x) = 2 \operatorname{cotg} x - 2\pi(1+\operatorname{cotg}^2 x) - x(1+\operatorname{cotg}^2 x) - \frac{1}{2\pi+x}.$$

La dérivée est < 0 pour tout $x > 0$ et l'on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \varphi(x) = -\infty.$$

Ensuite on étudie le développement asymptotique de la fonction :

$$\Phi(\theta) = (n+1)\log\left(\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}\right) - n\log\frac{\sin n\,\theta}{n} - \log\sin\theta$$

lorsque

$$\theta = \frac{2\pi+a}{n} + \frac{a_2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{11}$$

On obtient alors

$$\Phi(\theta) = b_o + \frac{b_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

avec $b_o = \varphi(a)$,

$$b_1 = - [1 + (\text{cotg } a - (2\pi+a))^2] \left(\frac{a_2}{2\pi+a} + \frac{1}{2}\right) \quad .$$

Ceci implique que $a_2 = -\pi - \frac{a}{2}$.

On calcule ρ en utilisant (10) et (11).

On peut obtenir dans (11) un développement asymptotique plus long. Mais les calculs deviennent difficiles. Nous avons pu obtenir un développement d'ordre 5 avec le système de calcul formel MACSYMA.

Remarque : Ce théorème, avec le théorème 1, améliore la minoration dans (4). On obtient

$$|z_k| \geq 1 + \frac{2}{n}$$

pour n assez grand.

II Les polynômes A_{m+2} et B_{m-2} .

Dans [2], pour traiter le problème de théorie du signal dans le cas de deux fréquences, on aboutit à l'équation un peu plus compliquée, avec $m \geq 2$:

$$(12) \qquad A_{m+2}(z) = z^{m+2} - 2\,\frac{m+2}{m}\, z^{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{m(m-1)}\, z^m - 2\,\frac{m+2}{m(m-1)}\, z + \frac{2}{m} = 0.$$

On observe que $A'_{m+2}(1) = 0$, et que $A''_{m+2}(z) = (m+1)(m+2)\, z^{m-2} (z-1)^2$, ce qui entraine que 1 est racine quadruple de (12). En multipliant $A_{m+2}(z)$ par

$$(1-z)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}\, z^k ,$$

on obtient que

$$A_{m+2}(z) = (z-1)^4\, B_{m-2}(z)$$

avec :

$$(13) \qquad B_{m-2}(z) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)(k+2)(m-1-k) z^k$$

$$= z^{m-2} + 2\,\frac{m-2}{m}\, z^{m-3} + \ldots + 6\,\frac{m-2}{m(m-1)}\, z + \frac{2}{m} \; .$$

Dans [2], on démontre que toutes les racines de B_{m-2} sont à l'intérieur du disque unité. On utilise pour cela la transformation de Schur (cf. [4], ch X). Soit $P(z) = a_o + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, avec $a_n \neq 0$. On pose $P^*(z) = a_n + a_{n-1} z + \ldots + a_o z^n$ et

$$T\,P(z) = a_o\,P(z) - a_n\,P^*(z)\,.$$

On observe alors que

$$T\,B_{m-2} = \frac{2}{m}\,B_{m-2} - B^*_{m-2} = -\,\frac{m^2-4}{m^2}\,B^*_{m-3}\,.$$

Le théorème de Rouché (cf. [4], p. 2) nous dit alors que le nombre de racines de B^*_{m-2} à l'intérieur du disque unité est le même que celui de B^*_{m-3}. Comme $B^*_o = 1$, B^*_{m-2} n'a pas de racines à l'intérieur du disque unité, et

$$B_{m-2}(z) = z^{m-2}\,B^*_{m-2}(1/z)$$

a toutes ses racines à l'intérieur de ce même disque.

On peut préciser ce résultat à l'aide du théorème :

Théorème 5. - Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, tel que toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ vérifient $|z_i| < 1$. Alors on a, lorsque $a_n \neq 0$:

$$|z_i| < 1 - \frac{1}{2(a_n\sqrt{n}\,)^n}\,.$$

Démonstration : La fonction symétrique des racines

$$a_n^{2n} \prod_{i,j=1}^{n} (z_i\,z_j - 1)$$

est un entier non nul. L'inégalité de R. Alexander (cf. [1]) affirme que pour une famille de nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ avec $|z_i| \leq 1$, on a :

$$\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}} |z_i\,\overline{z}_j - 1| \leq n^n\,.$$

Soit z_1 un zéro de P de module maximum. On a, pour $z_1 \neq \overline{z}_1$

$$1 \leq a_n^{2n} \prod_{i,j=1}^{n} |z_i\,z_j - 1| = a_n^{2n} \prod_{i,j=1}^{n} |z_i\,\overline{z}_j - 1|$$
$$\leq (n\,a_n^2)^n \prod_{i=1}^{n} \big|\,|z_i|^2 - 1\,\big| \leq (n\,a_n^2)^n\,\big|\,|z_1|^2 - 1\,\big|^2,$$

et la démonstration s'achève, en observant que $\sqrt{1-u} \leq 1 - \frac{u}{2}$.

Lorsque $z_1 = \overline{z}_1$, une inégalité plus forte résulte de

$$a_n^{2n} \prod_{i=1}^{n} |z_i^2 - 1| \geq 1\,.$$

Corollaire. - Les racines du polynôme B_{m-2} vérifient :

$$|z_i| < 1 - \frac{1}{2(m(m-1)\sqrt{m-2})^{m-2}} < 1 - \frac{1}{2m^{(5m)/2}} .$$

En fait, pour le polynôme B_{m-2}, on peut obtenir un résultat bien meilleur que le corollaire ci-dessus :

Théorème 6. - Pour tout zéro z de B_{m-2} on a, pour m assez grand :

$$|z| < 1 - 2/(5m).$$

Démonstration : Soit z un zéro de B_{m-2}. Comme les coefficients de B_{m-2} sont tous positifs et que son degré est $(m-2)$, on a

$$|\arg z| > \pi/(m-2).$$

Cette relation entraine, pour $m \geq 4$:

$$|z-1| > \sin(\pi/(m-2)) = \frac{\pi}{m} + \frac{2\pi}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right).$$

On a donc, pour m assez grand

(14) $\quad |z-1| > \pi/m.$

En fait on peut montrer que pour tout $m \geq 4$, on a $\sin(\pi/(m-2)) \geq \pi/m$, et donc que (14) est vraie pour $m \geq 4$.

On pose $z = 1 - \frac{a+bi}{m}$ et $c = a^2 + b^2$. Comme les racines de B_{m-2} sont dans le disque unité, on a : $a > 0$, et d'après (14), on a : $c \geq \pi^2$.

Par ailleurs, z est racine de A_{m+2}, et (12) donne :

$$z^m = \frac{m+2}{m(m-1)} \frac{2(z-1) + 6/(m+2)}{(z-1)^2 - (4/m)(z-1) + 6/(m(m-1))} . \tag{15}$$

On a :

$$|2(z-1) + 6/(m+2)|^2 = \frac{1}{m^2} [(6-2a)^2 + 4b^2 + O(1/m)]$$

$$= \frac{1}{m^2} [36 + 4c - 24a + O(1/m)] \leq \frac{1}{m^2} [36 + 4c + O(1/m)].$$

De même, on a :

$$\left|(z-1)^2 - \frac{4}{m}(z-1) + \frac{6}{m(m-1)}\right|^2 = \frac{1}{m^4} [24a^2 + 8a(6+c) + c^2 + 4c + 36 + O(1/m)]$$

$$\geq \frac{1}{m^4} [c^2 + 4c + 36 + O(1/m)].$$

La relation (15) entraine alors :

$$|z^{2m}| \leq \frac{1}{1+c^2/(4c+36)} + O(1/m) \leq \frac{1}{1+\pi^4/(4\pi^2+36)} + O(1/m)) . \tag{16}$$

Désignons par β la constante $(1+\pi^4/(4\pi^2+36))^{-1}$, qui vaut approximativement $\beta = 0,43657...$. L'inégalité (16) entraine :

$$|z| \leq \exp\left(\frac{\log \beta}{2m} + O(\frac{1}{m^2})\right) \leq 1 + \frac{\log \beta}{2m} + O(\frac{1}{m^2})$$

et comme $\frac{\log \beta}{2} = -0{,}41439...$, le théorème est démontré.

On peut observer que le théorème 6 implique $a > 2/5$ et $c \geq \pi^2 + (2/5)^2 + O(1/m)$, et recommencer la démonstration ci-dessus avec ces inégalités au lieu de $a > 0$ et $c \geq \pi^2$. En itérant ce procédé, on peut remplacer la constante 2/5 par 0,85. Les calculs des racines de B_{m-2} effectués par F. MORAIN pour $m \leq 65$, montrent que le bon coefficient serait voisin de 1,70.

Enfin, nous pouvons démontrer pour le polynôme B_{m-2} un théorème similaire au théorème 2.

Théorème 7. - Il existe une constante positive K telle que le polynôme B_{m-2} a $m - 2\lfloor K\sqrt{m \log m}\rfloor - 1$ racines distinctes satisfaisant pour $k = \lfloor K\sqrt{m \log m}\rfloor + 1, ..., m - \lfloor K\sqrt{m \log m}\rfloor - 1$ à la relation

$$x_k = z_k + O\left(\frac{\log m}{m^2 \sin^2(\pi/m)}\right)$$

où z_k est défini par :

$$z_k = (m \sin(k\pi/m))^{-1/m} \exp\left(i\pi\left(\frac{2k}{m} - \frac{k}{m^2} - \frac{1}{2m}\right)\right)$$

et la constante dans le O est absolue.

La démonstration repose sur 4 lemmes :

Lemme 1. - Il existe une constante absolue a_1 telle que

$$|A_{m+2}(z_k)| \leq a_1 \frac{\log m}{m^2 \sin(k\pi/m)}, \quad 1 \leq k < m.$$

Démonstration : On observe d'abord que :

$$z_k - \exp\left(\frac{2i\pi k}{m}\right) = O\left(\frac{\log m}{m}\right),$$

ce qui entraine

$$z_k - 1 = \exp\left(\frac{2i\pi k}{m}\right) - 1 + O\left(\frac{\log m}{m}\right).$$

et

(17) $\quad |z_k - 1| = 2 \sin(k\pi/m) + O((\log m)/m)$.

On a également :

$$z_k^m = -\left(\frac{1}{m} + i\,\frac{\operatorname{cotg}(k\pi/m)}{m}\right) = O\left(\frac{1}{m \sin(k\pi/m)}\right)$$

et

$$z_k^m \left(\exp\left(\frac{2i\pi k}{m}\right)\right) - 1 = \frac{2}{m}.$$

Il vient alors, avec (12) :

$$A_{m+2}(z_k) = z_k^m ((z_k - 1)^2 + O(1/m)) - (2/m)(z_k - 1) + O(1/m^2)$$

$$= z_k^m \left(\left(\exp\left(\frac{2i\pi k}{m}\right) - 1\right)^2 + O\left(\frac{\log m}{m}\right)\right) - \frac{2}{m}\left(\exp\left(\frac{2i\pi k}{m}\right) - 1\right) + O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{\log m}{m^2 \sin (k\pi/m)}\right).$$

Lemme 2. - Il existe une constante absolue a_2 telle que, pour $1 \leq k < m$, on ait :

$$\left| |A'_{m+2}(z_k)| - 4 \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)\right| \leq \frac{a_2 \log m}{m \sin (k\pi/m)}.$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du lemme 1, en partant de

$$A'_{m+2}(z) = (m+2)\,(z^{m-1}\,((z-1)^2 + O(1/m)) + O(1/m^2)).$$

Lemme 3. - Soit n et k vérifiant $2 \leq n \leq m+2$ et $1 \leq k < m$. Il existe une constante absolue a_3 telle que :

$$\left|\frac{1}{n!} A^{(n)}_{m+2}(z_k)\right| \leq \binom{m+2}{2}\binom{m}{n-2} |z_k|^{m-n+2} \left(4 \sin^2 \frac{k\pi}{m} + a_3 \frac{\log m}{m}\right).$$

Démonstration : On a l'identité :

$$\frac{1}{n!} A^{(n)}_{m+2}(z) = \binom{m+2}{n} z^{m-n} \left((z-1)^2 + 2\,\frac{n-2}{m}(z-1) + \frac{(n-2)(n-3)}{m(m-1)}\right).$$

En observant que

$$\binom{m+2}{n} = \frac{2}{n(n-1)} \binom{m+2}{2}\binom{m}{n-2}$$

on obtient, puisque $n \geq 2$:

$$\left|\frac{1}{n!} A^{(n)}_{m+2}(z_k)\right| \leq \binom{m+2}{2}\binom{m}{n-2} |z_k|^{m-n} \left(|z_k - 1|^2 + \frac{2}{3m}|z_k - 1| + \frac{2}{m(m-1)}\right)$$

et l'inégalité (17) achève la preuve du lemme 3, en remarquant que $|z_k|^{-2} = 1 + O((\log m)/m)$.

Lemme 4. - Soit k tel que $1 \leq k < m$, et x tel que

$$|x - z_k| \leq |z_k| / m.$$

Il existe une constante absolue a_4 telle que

$$\left|\sum_{n=2}^{m+2} \frac{1}{n!} A^{(n)}_{m+2}(z_k)\,(x-z_k)^n\right| \leq \frac{m\,e}{2}\left(4 \sin\left(\frac{k\,\pi}{m}\right) + a_4 \frac{\log m}{m \sin (k\pi/m)}\right)|x - z_k|^2.$$

Démonstration : En utilisant le lemme 3, on trouve :

$$\left|\sum_{n=2}^{m+2} \frac{1}{n!} A^{(n)}_{m+2}(z_k)\,(x-z_k)^n\right| \leq$$

$$\binom{m+2}{2}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{m}+a_3\frac{\log m}{m}\right)\left(\sum_{n=2}^{m+2}\binom{m}{n-2}|z_k|^{m-n+2}\ |x-z_k|^n\right)$$

$$=\binom{m+2}{2}\left(4\sin^2(\frac{k\pi}{m})+a_3\frac{\log m}{m}\right)|x-z_k|^2\,(|z_k|+|x-z_k|)^m\,.$$

Sous les hypothèses du lemme 4, le dernier facteur peut être majoré par

$$|z_k|^m\,(1+1/m)^m \le \frac{e}{m\sin(k\pi/m)}$$

et comme $\binom{m+2}{2} = \frac{m^2}{2}\,(1+O(1/m))$, le lemme 4 s'ensuit.

Démonstration du théorème 7 : Soit x tel que

$$\text{(18)}\qquad |x-z_k| = a_1\,\frac{\log m}{2m^2\sin^2(k\pi/m)}$$

où a_1 est la constante intervenant dans le lemme 1. On trouve, pour $\min\left(\frac{k}{\sqrt{m\log m}},\ \frac{m-k}{\sqrt{m\log m}}\right)$ suffisamment grand

$$\text{(19)}\qquad |x-z_k| \le |z_k|\,/\,m\,.$$

Donc, en vertu des lemmes 1 et 4, nous avons :

$$|A_{m+2}(x)-A'_{m+2}(z_k)\,(x-z_k)| = \left|A_{m+2}(z_k)+\sum_{n=2}^{m+2}\frac{A^{(n)}_{m+2}(z_k)}{n!}\,(x-z_k)^n\right|$$

$$\le a_1\,\frac{\log m}{m^2\sin(k\pi/m)}+\frac{a_1^2\,(\log m)^2}{4m^4\sin^4(k\pi/m)}\left(2em\sin\frac{k\pi}{m}+a_4\,\frac{e}{2}\,\frac{\log m}{\sin(k\pi/m)}\right).$$

D'autre part, en vertu du lemme 2, on a :

$$|A'_{m+2}(z_k)\,(x-z_k)| \ge \frac{a_1\log m}{2m^2\sin^2(k\pi/m)}\left(4\sin\frac{k\pi}{m}-a_2\,\frac{\log m}{m\sin(k\pi/m)}\right).$$

Donc, si

$$\frac{\log m}{2m\sin^2(k\pi/m)} < \min\left(\frac{1}{2(a_2+a_1e)},\ \frac{1}{\sqrt{a_1a_4e}}\right),$$

on trouve pour tout x satisfaisant à (18) :

$$|A_{m+2}(x)-A'_{m+2}(z_k)(x-z_k)| < |A'_{m+2}(z_k)(x-z_k)|\,,$$

et en vertu du théorème de Rouché (cf. [4], p. 2) $A_{m+2}(x)$ a dans le cercle défini par (19) le même nombre de zéros que $A'_{m+2}(z_k)(x-z_k)$ c'est-à-dire 1.

Soit deux nombres réels r et r' vérifiant $0 \le r \le r'$, et deux nombres réels α et β. Par une démonstration géométrique ou analytique, il est facile de montrer :

$$|re^{i\alpha} - r'e^{i\beta}| \geq 2r \left| \sin \frac{\beta-\alpha}{2} \right| .$$

On a donc pour k et ℓ distincts dans l'intervalle $1,\ m-1$:

$$|z_k - z_\ell| \geq 2\left(1 + O\left(\frac{\log m}{m}\right)\right) \left|\sin\left(\frac{\pi}{2m}(k-\ell)(2-1/m)\right)\right|$$

$$\geq 2\left(1 + O\left(\frac{\log m}{m}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2m}(2-1/m)\right)$$

$$\geq \frac{2\pi}{m} + O\left(\frac{\log m}{m^2}\right).$$

Cependant, en vertu de (19) pour $k \in (K\sqrt{m \log m}\ ,\ m-K\sqrt{m \log m}\ )$, on a :

$$|x_k - z_k| \leq 1/m .$$

Cela montre que les x_k correspondant à différentes valeurs de k sont distincts.

REFERENCES

[1] ALEXANDER R., On an inequality of J.W.S. Cassels, Amer. Math. Monthly, 79, 1972, 883-884.

[2] GHARBI M, LACOUME J.L., LATOMBE C., NICOLAS J.L., Close frequency resolution by maximum entropy spectral estimators, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP 32, n° 5, 1984, 977-984.

[3] HANNA C., LACOUME J.L., NICOLAS J.L., Etalonnage de l'analyse spectrale par la méthode du modèle auto regressif, Annales des Télécommunications, 36, 1981, 579-584.

[4] MARDEN M., Geometry of polynomials, Amer. Math. Soc, 1966, Math. Survey n° 3, 2nd edition.

[5] WEBER H., Lehrbuch der Algebra, Chelsea.

A. SCHINZEL
Institut Mathématique de l'Académie des Sciences
ul. Sniadeckich 8
Skr. Poczt. 137
00950 WARSZAWA Pologne.

J.L. NICOLAS
Département de Mathématiques
Université de Limoges
123 Avenue Albert Thomas
F - 87060 LIMOGES Cédex France.