

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS NICOLAS

## **6 nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés**

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 49-50 (1977), p. 141-143.

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1977\\_\\_49-50\\_\\_141\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1977__49-50__141_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

6 NOMBRES dont les SOMMES DEUX à DEUX  
 sont des CARRÉS

par Jean-Louis NICOLAS

P. ERDŐS a posé le problème suivant (cf. (1), problème 40, p. 110) :

Peut-on trouver  $n$  entiers distincts  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que toutes les sommes  $x_i + x_j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ) soient des carrés.

Le problème est facile pour  $n = 4$ ; J. Lagrange (cf. (3)) a montré qu'il y avait une infinité de solutions pour  $n = 5$ , et, dans sa thèse (cf. (4)) qu'il y avait pour  $n = 6$  une infinité de pseudo-solutions (14 sur 15 sommes  $x_i + x_j$  sont des carrés) et une vraie solution :

-15 863 902; 17 798 783; 21 126 338; 49 064 546; 82 221 218; 447 422 978.

Nous allons expliquer ici les idées utilisées pour faire un programme calculant systématiquement toutes les pseudo solutions en 6 nombres. Il y aura trois étapes.

1°) Recherche des solutions en 4 nombres -

On doit résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = a_1^2 & x_1 + x_4 = b_1^2 \\ x_3 + x_1 = a_2^2 & x_2 + x_4 = b_2^2 \\ x_1 + x_2 = a_3^2 & x_3 + x_4 = b_3^2 \end{cases}$$

Les conditions de compatibilité s'écrivent :

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2.$$

$S$  admet trois décompositions en somme de deux carrés. Réciproquement si  $S$  admet trois telles décompositions, on en déduit une et en général deux solutions (obtenues en échangeant  $a_3$  et  $b_3$ ).

Le paramètre de base sera  $S$  que l'on fait varier de 1 à quelques millions par tranche de  $\Delta = 10\ 000$ . On écrit les solutions correspondant à

$4S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ , de façon à avoir des  $x_i$  entiers. Dans chaque tranche, par une méthode de crible, on sélectionne les  $S$  qui ont au moins trois décompositions. Pour  $SMIN \leq S \leq SMAX$ , on fait varier  $I$  et  $J$  de façon que  $0 \leq I \leq J$  et  $SMIN \leq I^2 + J^2 \leq SMAX$ , et on met dans un tableau le nombre de fois où l'on atteint  $S$ . Cette méthode s'est avérée plus rapide que d'utiliser la congruence mod 4 de facteurs premiers de  $S$  (cf. (2), ch. 16).

2°) Adjonction d'un 5<sup>ème</sup> nombre -

La première étape nous fournit toutes les solutions en quatre nombres. On cherche alors les nombres  $x_5$  tels que  $x_i + x_5$  soit un carré pour  $1 \leq i \leq 4$ , avec  $x_i < x_5$  (pour  $1 \leq i \leq 4$ ), ce qui nous donnera une fois et une seule les solutions en cinq nombres. On résoud d'abord :

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + x_5 = c_1^2 & x_1 + x_4 = b_1^2 \\ x_2 + x_5 = c_2^2 & x_2 + x_4 = b_2^2 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$x_2 - x_1 = c_2^2 - c_1^2 = b_2^2 - b_1^2$$

et  $(c_2 - c_1)$  est un diviseur  $d$  de  $(b_2^2 - b_1^2)$  inférieur à  $(b_2 - b_1)$  (pour que  $x_5 > x_4$ ). A chaque tel diviseur, correspond une solution  $x_5$  de (1). La recherche des diviseurs se fait à l'aide d'une table de diviseurs des nombres  $\leq 10\,000$  incorporée au début du programme et construite par la méthode du crible.

Il reste alors à vérifier que  $x_3 + x_5$  et  $x_4 + x_5$  sont des carrés. Un premier test décide si ce sont des carrés modulo  $3465 = 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ . On utilise ensuite la méthode de Newton.

On obtient ainsi toutes les solutions en 5 nombres.

### 3°) Recherche des pseudo-solutions en 6 nombres -

Cette étape se traite comme la précédente. On cherche d'abord les pseudo-solutions vérifiant :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + x_6 = d_1^2 & x_1 + x_4 = b_1^2 \\ x_2 + x_6 = d_2^2 & x_2 + x_4 = b_2^2 \end{cases}$$

en laissant tomber la condition  $d < b_2 - b_1$ , car  $x_6$  peut-être quelconque  $y$  compris  $< x_1$ . On compte alors le nombre de carrés  $x_i + x_6$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Il en faut au moins 4.

Il reste à résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_6 = d_1^2 \\ x_2 + x_6 \neq d_2^2 \\ x_3 + x_6 = d_3^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + x_6 \neq d_1^2 \\ x_2 + x_6 = d_2^2 \\ x_3 + x_6 = d_3^2 \end{cases}$$

où l'on procède similairement.

Chaque pseudo-dolution est obtenue deux fois, et chaque vraie solution est obtenue 6 fois.

Une des difficultés techniques était de ne pas utiliser d'entiers qui dépassent  $2^{31} - 1$ . Les nombres  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ont été pris entiers en machine, tandis que  $x_5$  et  $x_6$  étaient pris en double précision.

Pour  $S \leq 40$  millions, on a trouvé 15475 solutions en 5 nombres et 655 pseudo-solutions en 6 nombres. Pour chacune de ces dernières, on a calculé le p. g. c. d. des  $x_i$ , pour repérer les solutions primitives ainsi que la somme  $\sum_{1 \leq i \leq 6} x_i$  qui est souvent un carré parfait. C'est le cas de la vraie solution signalée dans l'introduction, pour laquelle  $\sum x_i = (24531)^2$ . Dans notre programme, cette solution a été obtenue pour  $S = 34\,137\,050 = \frac{1}{4}(x_1 + x_3 + x_4 + x_5)$ .

REFERENCES

- (1) P. ERDŐS.- Quelques problèmes de la théorie des nombres.- Monographie de l'enseignement mathématique.- Genève, n° 6, p. 81-135.
- (2) G.H. HARDY et E.M. WRIGHT.- An introduction to the theory of numbers.- 4<sup>th</sup> édition, Oxford at the Clarendon Press.- (1960).
- (3) J. LAGRANGE.- Cinq nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés.- Séminaire de Théorie des nombres Delange-Pisot Poitou.- Paris, 12<sup>e</sup> année, (1970-71), n° 20.
- (4) J. LAGRANGE.- Thèse d'Etat de l'Université de Reims.- (1976).

J.L. NICOLAS  
Université de LIMOGES  
Département de Mathématiques  
123, rue Albert Thomas  
87100 LIMOGES

---