THÈSE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ de LIMOGES

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Limoges
en Mathématiques

par

Jean-Luc DURAS

Sujet de la thèse:

Étude de la fonction nombre de façons de représenter un entier comme produit de k facteurs.

Soutenue le 18 octobre 1993, devant la commission d'examen

JURY

président

Georges RHIN	professeur à l'Université de Metz

rapporteurs

Michel BALAZARD	chargé de recherche à l'Université de Bordeaux I
Jean-Louis NICOLAS	professeur à l'Université de Lyon I

examinateurs

Jean-Pierre BOREL	professeur à l'Université de Limoges
Guy ROBIN	professeur à l'Université de Limoges

A Cathie,
Ces symboles et ces nombres,
Ces mots, et puis une ombre.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Guy Robin, directeur de thèse, pour son aide constante, pour son soutien actif, ainsi que sa patience tout au long de la réalisation de ces travaux. Ma gratitude lui est acquise pour m'avoir guidé dans les méandres des mathématiques depuis quelques années.

Je désire remercier vivement Georges Rhin d'avoir accepter de présider ce jury.

Je veux également exprimer toute ma reconnaissance à Jean-Louis Nicolas, rapporteur, tant par ses conseils, ses idées constructives, ses remarques, que par la relecture de ce texte.

Je remercie sincèrement Michel Balazard, rapporteur, qui, par ses questions et ses encouragements, m'a permis de progresser.

Mes remerciements vont aussi à Jean-Pierre Borel pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Je n'oublierais certainement pas Hakim Smati pour son aide et ses conseils, Bertrand Deloménie et Omar ElAdj N'Diaye pour leurs suggestions.

En terminant par Danielle Denichoux pour son concours précieux lors de la recherche de documents, et l'ensemble du département de mathématiques de Limoges, ainsi que Larbi, Franck, Laurent, pour m'avoir supporté et prodigué quelques conseils moins mathématiques, je leur exprime toute ma sympathie.

Sommaire

Introduction

Le point de départ de cette thèse repose sur les travaux de Ramanujan ([RA15]), publiés vers 1915, concernant la fonction d(n), nombre de diviseurs de l'entier n. Ramanujan étudia cette fonction en introduisant les nombres hautement composés et hautement composés supérieurs.

Les grandes valeurs de d(n) ont déjà été étudiées par Nicolas [NI71], Robin [RO83a], [RO83b]. Des fonctions similaires intéressèrent Alaoglu, Erdös [AE44] ($\sigma(n)$, somme des diviseurs de n), Erdös [ER44] et Nicolas [NI71].

Dans ce travail, nous nous intéresserons aux grandes valeurs des fonctions $d_k(n)$, nombre de manières d'écrire l'entier n comme produit de k facteurs. On se propose de trouver des majorations effectives de $d_k(n)$.

Nous nous sommes basés sur la thèse de doctorat de Robin en 1983 qui obtenait entre autre des majorations de $d(n) = d_2(n)$ et de $d_3(n)$.

Le premier chapitre contient les définitions des fonctions $d_k(n)$, leurs principales propriétés et certaines majorations simples. Nous présentons les ordres moyens et normaux de ces fonctions.

Nous avons également rappelé les travaux de Nicolas ([NI80]) sur le comportement asymptotique d'une classe de fonctions arithmétiques qui permet de déterminer l'ordre maximal de $d_k(n)$.

On définit au second chapitre les nombres k-hautement composés (k-h.c.) et k-hautement composés supérieurs (k-h.c.s.).

Dans le troisième chapitre, nous déterminons les majorations effectives de ces fonctions en utilisant notamment les propriétés des nombres k-h.c.s. En effet, les couples (log N, log $d_k(N)$) pour N k-h.c.s. forment l'enveloppe convexe de l'ensemble des points (log n, log $d_k(n)$) ; les majorations de $d_k(n)$ découlent de cette propriété. Nous obtenons notamment que, pour tout k entier et pour tout $n \geq 3$, on a

$$\log d_k(n) < \frac{1,65}{\log 2}\log^2 k \frac{\log n}{\log\log n}$$

et

$$\log d_k(n) < \log k \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \frac{\log^3 k}{\log^2 2}\frac{1,65}{\log\log n}\right).$$

Nous avons généralisé un algorithme du à Robin ([RO83a]) permettant d'obtenir les premiers nombres k-h.c.s. On en déduit des majorations de $d_k(n)$ pour k allant de 2 à 25. On obtient des résultats effectifs pour ces petites valeurs de k.

Nous montrons aussi que nos résultats sont meilleurs que la majoration due à Norton ([NO85]).

On cherche au quatrième chapitre la forme des nombres k-h.c.s. pour k suffisamment grand, pour lesquels les majorations trouvées sont atteintes. Ils sont de la forme $2^a.3^b$ pour la première majoration, et $2^a.3^b.5^c.7^d$ pour la seconde. On obtient :

$$\lambda_1(k) = \underset{N \in \mathbb{N}}{\text{Max}} \frac{\log\log N \log d_k(N)}{\log k \log N} \sim \frac{\log k}{4 \log 2}$$

$$\text{et} \quad \lambda_2(k) = \underset{N \in \mathbb{N}}{\text{Max}} \frac{(\log\log N)^2 \log d_k(N)}{\log k \log N} - \log\log N \sim \frac{4\log^2 k}{27 \log 2}.$$

On peut étendre la définition des fonctions $d_k(n)$ dans les cas réel et complexe grâce à la fonction ζ de Riemann. Nous obtenons une majoration simple du module de $d_k(n)$:

$$|d_k(n)| \le d_{|k|}(n).$$

Le cinquième chapitre est quant à lui consacré à l'étude des fonctions $d_k(n)$ (notées $d_{k;j,\ell}$) dans les progressions arithmétiques dont nous proposons, grâce aux travaux de McCurley, une majoration. Nous donnons l'ordre maximal de ces fonctions, puis nous définissons les nombres k-(j,ℓ)-hautement composés supérieurs pour en déduire des majorations. Pour cela nous utilisons une méthode analogue à celle permettant de majorer $d_k(n)$ dans le troisième chapitre.

Des résultats plus précis sont obtenus pour le cas des progressions arithmétiques de raison 3.

Nous présentons en annexe quelques résultats complémentaires.

La première annexe comporte des encadrements des fonctions Ei(x) et Li(x). Ceux-ci se déduisent des comportements asymptotiques de ces fonctions. La fonction Li(x) intervenant de manière importante lors des majorations des fonctions $d_k(n)$, nous avons débuté notre étude par des majorations de ce type, et obtenu quelques résultats, même si ceux-ci n'interviennent pas directement dans notre travail. Ils ont cependant un intérêt certain, indépendamment des chapitres précédents.

La seconde annexe est constituée d'un programme de recherche des nombres k-hautement composés supérieurs et $k,(j,\ell)$-hautement composés supérieurs.

Chapitre I

GRANDES VALEURS DES FONCTIONS $d_k(n)$

La fonction d(n), nombre de diviseur de n, a été abondamment étudiée notamment par Wigert, Ramanujan, Nicolas et Robin. Dans ce chapitre nous présentons les fonctions d_k qui généralisent la fonction d et qui composent l'essentiel de notre travail.

Pour obtenir le comportement asymptotique des grandes valeurs de ces fonctions, nous utilisons les résultats de Heppner et de Nicolas que nous présentons au paragraphe 3.

Nous terminons ce chapitre en présentant quelques majorations élémentaires de ces fonctions.

I.1. LA FONCTION d(n)

On considère la fonction $d(n) = d_2(n) = \sum_{\delta \mid n} 1$ qui représente le nombre de diviseurs de n.

Cette fonction est multiplicative, c'est-à-dire que si $(a,b) = 1$ alors $d(ab) = d(a).d(b)$. Or

$$d(p^\alpha) = (\alpha - 1), \quad \text{d'où, si } N = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \text{ alors} \quad d(N) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1).$$

La première majoration du nombre de diviseurs de l'entier N de cette fonction provient du fait qu'il y a autant de diviseurs compris entre 1 et $\sqrt{N}$ qu'entre $\sqrt{N}$ et N. On a donc

$$d(N) < 2\sqrt{N}.$$

On appelle ordre maximal d'une fonction arithmétique f(N), la fonction g(n) telle que $\overline{\lim_{N\to\infty}} f(N)/g(N) = 1$

Wigert [WI06] a montré que l'ordre maximal de d(N) était $O\left(\dfrac{\log N}{\log\log N}\right)$, puis que

$$\log d(N) < \frac{\log 2 \log N}{\log\log N}(1 + \varepsilon),$$

pour tout ε positif et pour N suffisamment grand,

d'où $d(N) < N^{\delta}$ pour tout δ positif et pour tout N suffisamment grand,

Recherchons l'ordre maximal :

$$d(n) = \prod_{p^{\alpha}\| n}(1+\alpha) \leq \prod_{\substack{p^{\alpha}\| n\\ p\leq t}}(1+\alpha) . \prod_{\substack{p^{\alpha}\| n\\ p>t}} 2^{\alpha} \quad \text{(pour tout paramètre t compris entre 2 et n.)}$$

$$\leq (1+\alpha)^{t} . \prod_{\substack{p^{\alpha}\| n\\ p>t}} 2^{(\alpha \log p)/\log t} \leq \left(1+\frac{\log n}{\log 2}\right)^{t} . \left(\prod_{p^{\alpha}\| n} p^{\alpha}\right)^{\log 2/\log t} \quad \text{(car } \log p > \log t\text{)}$$

$$\leq \exp\left(t(2+\log\log n) + \frac{\log 2 \log n}{\log t}\right).$$

En choisissant $t = \dfrac{\log n}{(\log\log n)^{3}}$, on obtient

$$\log d(n) \leq \frac{\log 2 \log n}{\log\log n}\left(1 + O\left(\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right). \tag{1}$$

Il nous reste à trouver une minoration de log d(n). Si l'on choisit les entiers de la forme $n_k = \prod_{j=1}^{k} p_j$, p_j désignant le $j^{\text{ième}}$ nombre premier, on a $d(n_k) = 2^{k}$. Donc

$$\log n_k = \theta(p_k) = \sum_{p\leq p_k} \log p \leq \pi(p_k)\log p_k = k \log p_k .$$

On obtient $\log d(p_k) = k \log 2 \geq \dfrac{\log 2 \log n_k}{\log p_k}$.

Or $\theta(p_k)$ et p_k sont équivalents. Ceci implique que

$$\log d(n_k) \geq \frac{\log 2 \log n_k}{\log\log n_k}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log n_k}\right)\right). \tag{2}$$

(1) et (2) conduisent au résultat.

L'ordre minimal de d(n), c'est-à-dire la fonction h(n) telle que $\varliminf_{N\to\infty} d(N)/h(N) = 1$, s'obtient facilement. Il vaut 2, car our tout p premier, d(p) = 2.

On a également

$$\log d(N) > \frac{\log 2 \log N}{\log \log N} (1 - \varepsilon),$$

pour tout ε positif et pour une infinité de valeurs de N.

Ramanujan [RA15b] a obtenu de meilleurs résultats :
pour tout N,

$$\log d(N) < \frac{\log 2 \log N}{\log \log N} + O\left(\frac{\log N}{(\log \log N)^2}\right)$$

et

$$\log d(N) > \frac{\log 2 \log N}{\log \log N} + O\left(\frac{\log N}{(\log \log N)^2}\right),$$

pour une infinité de valeurs de N.

Si l'on a en outre des renseignements sur N, on peut affiner cette majoration. Ainsi, si l'on connaît la décomposition en facteurs premiers de N, on peut montrer que

$$\text{si } N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}, \text{ alors } \quad d(N) < \frac{\left(\frac{1}{n} \log (p_1 \ldots p_n N)\right)^n}{\log p_1 \ldots \log p_n}$$

En effet, $\frac{1}{n} \log (p_1 \ldots p_n N) = \frac{1}{n}\left((1 + \alpha_1) \log p_1 + \ldots + (1 + \alpha_n) \log p_n\right)$

$$> \left((1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n) \log p_1 \ldots \log p_n\right)^{1/n}$$

qui conduit au résultat voulu, puisque, par définition, $d(N) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n)$.

Si l'on ne connaît que le nombre n de diviseurs premiers distincts de N, nous pouvons obtenir la majoration suivante :

$$d(N) < \frac{\left(\frac{1}{n} \log (2 \,.\, 3 \ldots p\; N)\right)^n}{\log 2 \,.\, \log 3 \ldots \log p} \qquad \text{où p désigne le } n^{\text{ième}} \text{ nombre premier.}$$

Cette formule provient immédiatement de la précédente si l'on s'aperçoit que, pour tout (p_1, p_2, … , p_n), premiers deux à deux distincts, on a

$$\frac{\left(\frac{1}{n} \log (p_1 \ldots p_n N)\right)^n}{\log p_1 \ldots \log p_n} < \frac{\left(\frac{1}{n} \log (2 \,.\, 3 \ldots p \,.\, N)\right)^n}{\log 2 \,.\, \log 3 \ldots \log p}$$

où p désigne ici le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.

Les grandes valeurs de cette fonction ont été étudiées après Ramanujan principalement par Nicolas [NI71], Robin [RO83a], [RO83b].

Nicolas et Robin ont prouvé ([NR83]) que, pour tout entier $n \geq 3$

$$\log d(n) \leq 1{,}5379 \ \log 2 \ \frac{\log n}{\log\log n},$$

$$\log d(n) \leq \ \log 2 \ \frac{\log n}{\log\log n} \ (1 + \frac{1{,}9349}{\log\log n}).$$

Dans le cadre du second chapitre, nous généralisons leur démonstration pour démontrer le théorème III.1.1.

I.2. LES FONCTIONS $d_k(n)$

Dans tout ce qui suit, sauf au paragraphe IV.2, k représente un entier supérieur ou égal à 2.

Dans notre travail, nous aborderons plus généralement les fonctions

$$d_k(n) = \sum_{\delta_1.\delta_2\ldots\delta_k = n} 1 \ .$$

$d_k(n)$ représente le nombre de manières d'écrire l'entier n comme produit de k facteurs.
On peut en déduire facilement que

$$d_k(n) = \sum_{\delta | n} d_{k-1}\left(\frac{n}{\delta}\right).$$

Ces fonctions sont multiplicatives, alors si $(a,b) = 1$ on a $d_k(ab) = d_k(a).d_k(b)$,
En effet, comme nous l'avons vu, $d = d_2$ est une fonction multiplicative. Supposons que d_k soit multiplicative. Soient a et b entiers tels que $(a,b) = 1$. $d_{k+1}(ab) = \sum_{\delta | a.b} d_k\left(\frac{ab}{\delta}\right)$. Écrivons $\delta = \delta_1.\delta_2$ avec $\delta_1 \mid a$ et $\delta_2 \mid b$.

Alors $d_{k+1}(ab) = \displaystyle\sum_{d_1 | a, d_2 | b} d_k\left(\frac{a}{d_1}\frac{b}{d_2}\right) = \sum_{d_1 | a, d_2 | b} d_k\left(\frac{a}{d_1}\right).d_k\left(\frac{b}{d_2}\right)$,

$$d_{k+1}(ab) = \sum_{d_1 | a} d_k\left(\frac{a}{d_1}\right).\sum_{d_2 | b} d_k\left(\frac{b}{d_2}\right) = d_{k+1}(a).d_{k+1}(b).$$

or

$$d_k(p^\alpha) = \binom{\alpha + k - 1}{k - 1} \quad \text{d'où, si } n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}, \quad d_k(n) = \prod_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha_i + k - 1}{k - 1}.$$

On peut voir facilement que si $N = n.p$ avec p premier et $a = v_p(n)$, valuation p-adique de n, (i. e. a est tel que $p^a \| n$), alors

$$d_k(N) = \frac{k + a}{a + 1} d_k(n).$$

Bien sûr, $\dfrac{k + a}{a + 1}$ est inférieur ou égal à k et décroît en fonction de a.

Ces fonctions peuvent également être définies à partir de la fonction ζ de Riemann telle que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, grâce à la relation

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} d_k(n) n^{-s}$$

En effet, $\zeta(s)^k = \prod_p \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^k} = \prod_p \sum_{a=0}^{+\infty} \dfrac{d_k(p^a)}{p^{as}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_k(n)}{n^s}.$

Cette relation permet de définir $d_k(n)$ pour k complexe. Nous y reviendrons plus tard.

Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, alors $\log d_k(n) = \sum_{i=1}^{r} \log d_k\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ avec $\log d_k\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \log\left(\dfrac{\alpha_i + j}{j}\right)$.

La fonction $\alpha \rightarrow \dfrac{1}{\alpha} \log\left(\dfrac{\alpha + j}{j}\right)$ est décroissante pour $\alpha \geq 1$, donc

$$\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{\alpha + j}{j}\right) < \log\left(\frac{1 + j}{j}\right).$$

Par conséquent, $\dfrac{1}{\alpha_i} \log d_k\left(p_i^{\alpha_i}\right) \leq \log\left(\dfrac{1 + k - 1}{k - 1}\right) + \log\left(\dfrac{1 + k - 2}{k - 2}\right) + \ldots + \log 2 \leq \log k$,

et $\log d_k\left(p_i^{\alpha_i}\right) \leq \alpha_i \log k$.

En outre, $d_k\left(p_i^{\alpha_i}\right) \geq d_k(p_i) = k$.

On obtient donc $\left(\sum_{i=1}^{r} 1\right) \log k \leq \log d_k(n) \leq \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\right) \log k,$

$$\omega(n) \log k \leq \log d_k(n) \leq \Omega(n) \log k, \tag{1}$$

avec les notations $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$ et $\Omega(n) = \sum_{p^\alpha || n} \alpha$;

$$\text{alors } k^{\omega(n)} \leq d_k(n) \leq k^{\Omega(n)}.$$

Il est facile de voir que $\Omega(n) \leq \frac{1}{\log 2}(\alpha_1 \log 2 + \alpha_2 \log 3 + \ldots + \alpha_r \log p_r) \leq \frac{\log n}{\log 2}$, d'où

$$\log d_k(n) \leq \frac{\log k \log n}{\log 2}.$$

L'ordre normal d'une fonction arithmétique a été défini par Hardy et Ramanujan [HR17] : on dit qu'une fonction arithmétique f est d'ordre normal g si g est une fonction monotone telle que, pour chaque ε positif, on ait

$$(1 - \varepsilon)\, g(n) \leq f(n) \leq (1 + \varepsilon)\, g(n)$$

pour un ensemble d'entiers n de densité 1. On peut écrire

$$f(n) = (1 + o(n))\, g(n) \quad \text{presque partout.}$$

De l'encadrement (1), on peut déduire l'ordre normal des fonctions $d_k(n)$.
Nous savons ([HW60]) que l'ordre normal de $\omega(n)$ et de $\Omega(n)$ est $\log \log n$. On en déduit que l'ordre normal de $\log d_k(n)$ est $\log k \log \log n$.

L'ordre moyen d'une fonction arithmétique f est g si l'on a $\frac{1}{n} \sum_{t \leq n} f(t) \sim g(n)$.
Il est facile de montrer que l'ordre moyen de d(n) est log n (Cf [HW60], p 263), car on a

$$\sum_{t \leq n} d(t) = n \log n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

où γ est la constante d'Euler.

Le problème de l'ordre moyen de $d_k(n)$ a été d'abord étudié par Piltz (voir [DI71a]). Hafner ([HA82]) a montré que

$$\sum_{t \leq n} d_k(t) \sim c_k\, n \log^{(k-1)} n$$

avec c_k constante positive.

On en déduit que l'ordre moyen de $d_k(n)$ est $\log^{(k-1)} n$.

I.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE CERTAINE CLASSE DE FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

E. Heppner, [HE73], a montré le théorème suivant :

Théorème I.3.1.

Soit f une fonction multiplicative vérifiant :

(1) $f(p^x) = g(x)$;

(2) $\forall x \in \mathbb{N}, g(x) \geq 1$ et $\exists \beta \in \mathbb{N}, g(\beta) > 1$;

(3) $\log g(x) = o\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$.

Alors il existe A tel que pour tout n on ait :

$$\log f(n) \leq \log g(A)\,\mathrm{Li}\left(\frac{\log n}{A}\right) + O\left(\log n \exp\left(-c\sqrt{\log\log n}\right)\right)$$

où c est une constante positive. L'égalité a lieu pour une infinité de valeurs de n.

Il est facile de remarquer alors que le théorème d'Heppner s'applique aux fonctions $d_k(n)$.

En effet, posons $f(p^x) = d_k(p^x)$, donc $g(x) = \log d_k(p^x)$. (2) est vérifiée pour tout $k \geq 3$ puisque $d_k(p^x) \geq k$, pour tout x et pour tout k. $\log\log\begin{pmatrix} k+x-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = o\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$.

Par conséquent, il existe A tel que pour tout n on ait :

$$\log d_k(n) \leq \log\log d_k(A)\,\mathrm{Li}\left(\frac{\log n}{A}\right) + O\left(\log n \exp\left(-c\sqrt{\log\log n}\right)\right)$$

où c est une constante positive. L'égalité a lieu pour une infinité de valeurs de n.

Nicolas ([NI80]) a prolongé les travaux d'Heppner en démontrant le résultat suivant :

Théorème I.3.2.

Soit f une fonction multiplicative vérifiant :

(1) $f(p^x) = g(x)$;

(2) $\forall x \in \mathbb{N}, g(x) \geq 1$ et $\exists \beta \in \mathbb{N}, g(\beta) > 1$;

(3) $\overline{\lim}\, \dfrac{G(x)}{x/\log x} < t_1 \log 2$ avec $t_1 = \max\limits_{x\geq 1} \dfrac{G(x)}{x}$

avec $G(x) = \log g(x)$, alors, si A est le plus grand x pour lequel $t_1 = \dfrac{G(x)}{x}$, on a pour tout n l'inégalité

$$\log f(n) \le \log g(A)\operatorname{Li}\left(\frac{\log n}{A}\right) + O\left(\log n \exp\left(-c\sqrt{\log\log n}\right)\right)$$

où c est une constante positive. L'égalité a lieu pour une infinité de valeurs de n.

Dans le cas des fonctions $d_k(n)$, on obtient A = 1 et

$$\log d_k(n) \le \log k \operatorname{Li}(\log(n)) + O_k\left((\log n)\exp\left(-c\sqrt{\log\log n}\right)\right)$$

Or on sait que $\operatorname{Li}(x) = \dfrac{x}{\log x} + \dfrac{x}{\log^2 x} + O\left(\dfrac{x}{\log^3 x}\right)$.

On obtient donc que

$$\log d_k(n) \le \frac{\log k \log n}{\log\log n} + O\left(\frac{\log k \log n}{(\log\log n)^2}\right)$$

et

$$\log d_k(n) \le \frac{\log k \log n}{\log\log n} + \frac{\log k \log n}{(\log\log n)^2} + O\left(\frac{\log k \log n}{(\log\log n)^3}\right).$$

De manière analogue au cas où k = 2, ([RO83b]), Robin a montré que, pour k = 3 :

$$\log d_3(n) \le 1,59141\,\frac{\log 3 \log n}{\log\log n},$$

$$\log d_3(n) \le \frac{\log 3 \log n}{\log\log n}\left(1 + 2,10833\,\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

Chapitre II

LES NOMBRES k-HAUTEMENT COMPOSÉS ET k-HAUTEMENT COMPOSÉS SUPÉRIEURS

Ramanujan a basé son étude des grandes valeurs de d(n) sur les nombres hautement composés. Erdös, Nicolas et Robin ont repris ses travaux. Nous présentons les résultats principaux dans le premier paragraphe.

Au paragraphe 2, nous donnons la définition des nombres k-hautement composés, au paragraphe 3 celle des nombres k-hautement composés supérieurs qui nous permettrons d'obtenir des majorations de $d_k(n)$ dans le cas général et de déterminer des résultats numériques pour $k \leq 25$.

Nous présentons au paragraphe 4 les premières majorations de d(n) utilisant les nombres hautement composés supérieurs.

II.I. LES NOMBRES HAUTEMENT COMPOSÉS

Ces nombres furent définis et étudiés par Ramanujan en 1915 ([RA15b]).

Définition II.1.1.

Un entier N est dit **hautement composé** (h.c.) s'il a plus de diviseurs que les entiers qui le précèdent. C'est-à-dire N hautement composé est équivalent à

$$n < N \Rightarrow d(n) < d(N).$$

Proposition II.1.1.

Si N est hautement composé alors N est de la forme

$$N = 2^{\alpha_1} . 3^{\alpha_2} \ldots p_{\omega(N)}^{\alpha_{\omega(N)}}$$

avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{\omega(N)}$.

Preuve.

$N = 2^{\alpha_1} . 3^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} . p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots p_{\omega(N)}^{\alpha_{\omega(N)}}$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{\omega(N)}$.

Supposons que $N' = 2^{\alpha_1} . 3^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_{i+1}} . p_{i+1}^{\alpha_i} \ldots p_{\omega(N)}^{\alpha_{\omega(N)}}$ soit k-hautement composé.

Or on a $d(N) = d(N')$ et $\frac{N}{N'} = \frac{p_i^{\alpha_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}{p_i^{\alpha_{i+1}} p_{i+1}^{\alpha_i}}$

Comme $\alpha_{i+1} \geq \alpha_i$, on a $N' > N$, donc N' n'est pas h.c. ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. ■

Remarque.

Si n est hautement composé alors $\alpha_{\omega(n)} = 1$, sauf pour $n = 4$ ou $n = 36$. ([RA15b])

Soit $Q(x)$ le nombre de nombre hautement composés inférieurs ou égaux à x. Ramanujan [RA15bb] a démontré que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{Q(x)}{\log x} = +\infty.$$

Définition II.1.2. (Ramanujan [RA15b])

Un entier N est dit **hautement composé supérieur** (h.c.s.) s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la fonction $\frac{\log d(n)}{\log 2} - \varepsilon \log n$ admette un maximum en $n = N$.

Après avoir été définis par Ramanujan (RA15b], les nombres hautement composés et les nombres hautement composés supérieurs furent étudiés principalement par Alaoglu, Erdös [AE44], Erdös [ER44] et Nicolas [NI71].

II.2. LES NOMBRES k-HAUTEMENT COMPOSÉS

Maintenant, généralisons la notion de nombres hautement composés, pour les fonctions $d_k(n)$.

Définition II.2.1.

Un entier N est dit **k-hautement composé** (k-h.c.) si et seulement si

$$n < N \Rightarrow d_k(n) < d_k(N).$$

Un entier hautement composé est 2-h.c.

Robin a explicité des algorithmes permettant d'obtenir la liste des nombres hautement composés sur des intervalles donnés ([RO83]), ce qui nous permettra de faire des calculs. On peut généraliser ces algorithmes pour déterminer les nombres k-hautement composés.

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4
6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	8	8	8	8	8	8	8	8
24	12	12	12	12	12	12	12	12
36	24	24	24	24	16	16	16	16
48	36	36	36	36	24	24	24	24
60	48	48	48	48	36	36	36	36
120	60	60	60	72	48	48	48	48
180	72	72	72	96	72	72	72	72
240	96	96	96	120	96	96	96	96
360	120	120	120	144	120	120	120	120
720	180	144	144	192	144	144	144	144
840	240	180	180	216	192	192	192	192
1260	360	240	216	240	216	216	216	240
1620	480	360	240	288	240	240	240	288
2520	720	480	288	360	288	288	288	360
5040	1080	720	360	480	360	360	360	432
7560	1260	1080	480	576	432	432	432	480
10080	1440	1440	720	720	480	480	480	576
15120	1680	2160	1080	960	576	576	576	720
20160	2160	2520	1440	1080	720	720	720	864
25200	2520	2880	2160	1440	960	960	864	960
27720	3360	3360	2520	2160	1080	1080	960	1152
45360	4320	4320	2880	2880	1440	1152	1080	1440
50400	5040	5040	4320	4320	2160	1440	1152	2160
55440	7560	7560	5040	5040	2880	2160	1440	2880
83160	10080	8640	7200	5760	4320	2880	2160	4320
110880	15120	10080	7560	7200	5040	4320	2880	5760
166320	20160	15120	8640	7560	5760	5760	4320	8640
221760	25200	20160	10080	8640	7200	7200	5760	11520
277200	30240	25200	15120	10080	8640	8640	8640	12960

332640	40320	30240	20160	14400	10080	10080	10080	14400
498960	45360	40320	30240	15120	12960	11520	11520	15120
554400	50400	45360	40320	17280	14400	12960	12960	17280
665280	55440	50400	50400	20160	15120	14400	14400	20160
720720	60480	60480	60480	30240	17280	15120	15120	25920
1081080	75600	75600	80640	40320	20160	17280	17280	30240
1441440	90720	90720	90720	50400	25920	20160	20160	34560
2161260	100800	100800	100800	60480	30240	25920	25920	40320
2882880	110880	110880	120960	80640	40320	30240	30240	60480
3603600	151200	120960	151200	90720	50400	34560	34560	80640
4324320	166320	151200	181440	100800	60480	40320	40320	90720
6486480	221760	181440	201600	120960	80640	50400	60480	100800
7207200	277200	201600	221760	151200	90720	60480	80640	120960
8648640	302400	221760	241920	181440	100800	80640	90720	161280
10810800	332640	277200	302400	241920	120960	90720	100800	181440
14414400	443520	302400	362880	302400	151200	100800	120960	241920
17297280	498960	332640	443520	362880	181440	120960	161280	302400
21621600	554400	443520	453600	453600	241920	151200	181440	362880
32432400	665280	453600	554400	483840	302400	181440	241920	483840
36756720	831600	554400	604800	544320	362880	241920	302400	604800
43243200	997920	604800	665280	604800	453600	302400	362880	725760
61261200	1108800	665280	887040	725760	483840	362880	483840	907200
73513440	1335600	831600	907200	907200	544320	453600	604800	967680

Liste des premiers nombres k-hautement composés, pour k variant de 2 à 10.

Proposition II.2.1.

Si N est k-hautement composé alors N est de la forme

$$N = 2^{\alpha_1}.3^{\alpha_2}\dots p_{\omega(N)}^{\alpha_{\omega(N)}}$$

avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{\omega(N)}$.

Preuve.

La démonstration est analogue à celle de la proposition II.1.1 en remplaçant 2 par k. ■

Proposition II.2.2.

Pour tout entier $x \geq 1$, il existe au moins un nombre k-hautement composé N tel que

$$x < N \leq 2x.$$

Preuve.

Comme $d_k(N) < d_k(2N)$, alors il existe M k-h.c. tel que $N < M \leq 2N$

Ceci implique la proposition. ∎

II.3. LES NOMBRES k-HAUTEMENT COMPOSÉS SUPÉRIEURS

Définissons maintenant un sous-ensemble des nombres k-hautement composés, sous-ensemble qui nous intéresse plus particulièrement pour majorer les fonctions $d_k(n)$. C'est une généralisation des nombres hautement composés supérieurs décrits au paragraphe II.1..

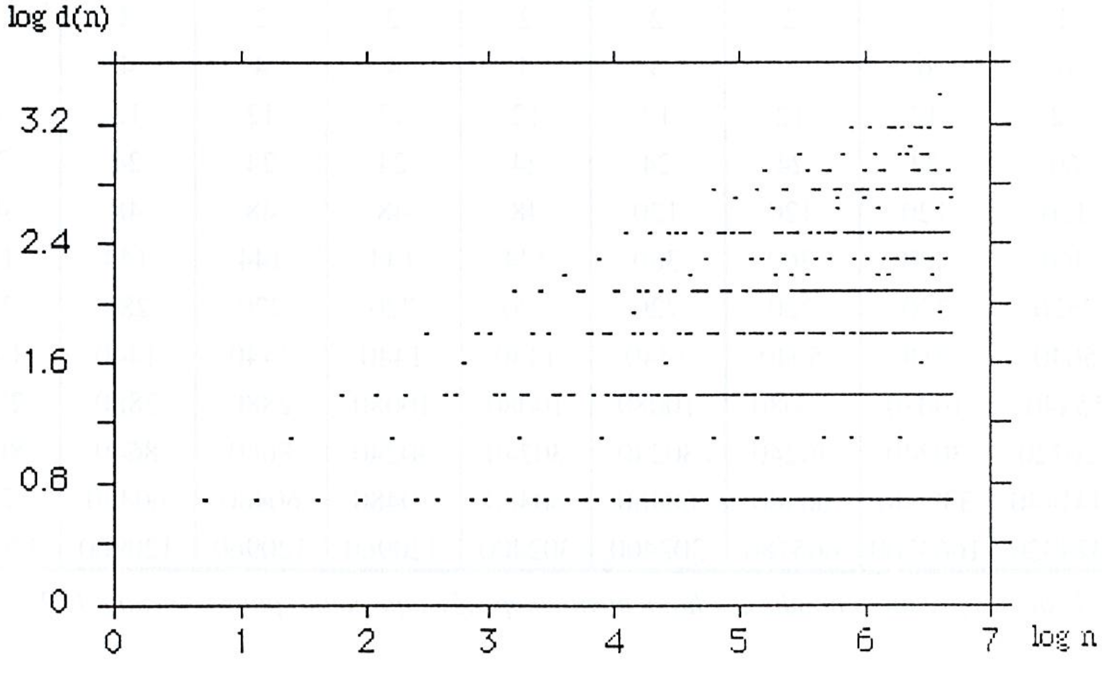
Définition II.3.1.

Un entier N est dit **k-hautement composé supérieur** (k-h.c.s.) s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout n on ait :

$$\frac{d_k(n)}{n^\varepsilon} \leq \frac{d_k(N)}{N^\varepsilon}.$$

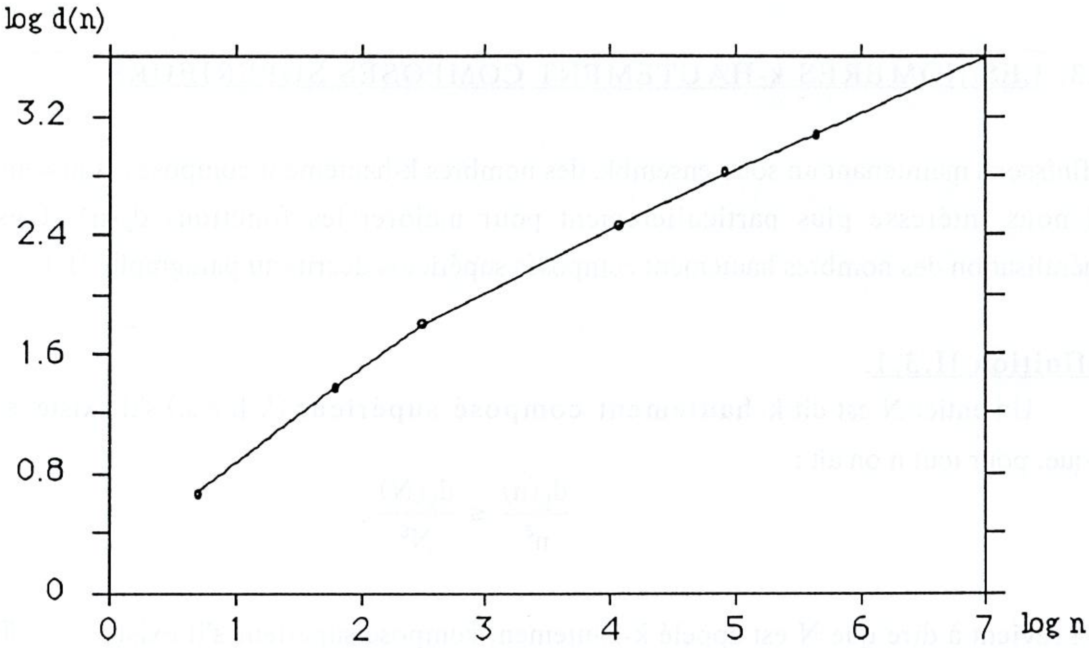
Ceci revient à dire que N est appelé k-hautement composé supérieur s'il existe $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout n on ait :

$$\frac{\log d_k(n)}{\log k} - \varepsilon' \log n \leq \frac{\log d_k(N)}{\log k} - \varepsilon' \log N.$$



représentation du nombre de diviseurs des entiers n

L'enveloppe convexe des points (log n, log $d_k(n)$) est une ligne brisée concave dont les sommets ont pour abscisses les valeurs de log N, où N est k-hautement composé supérieur.



graphe de l'enveloppe convexe des points (log n, log d(n)).

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	2	2	2	2	2	2	2
6	6	4	4	4	4	4	4	4
12	12	12	12	12	12	12	12	12
60	24	24	24	24	24	24	24	24
120	120	120	120	48	48	48	48	48
360	360	360	360	144	144	144	144	144
2520	720	720	720	720	720	720	288	288
5040	5040	5040	1440	1440	1440	1440	1440	1440
55440	10080	10080	10080	10080	10080	2880	2880	2880
720720	30240	30240	30240	30240	30240	8640	8640	8640
1441440	332640	60480	60480	60480	60480	60480	60480	17280
4324320	1663200	665280	302400	302400	120960	120960	120960	120960

Liste des premiers nombres k-hautement composés supérieurs, pour k variant de 2 à 10.

On peut remarquer qu'un nombre k-h.c.s. est forcément k-h.c.. En effet,

$$n < N \Rightarrow d_k(n) \leq \left(\frac{n}{N}\right)^{\varepsilon} d_k(N) \leq d_k(N) .$$

Remarque :
Si N est k-h.c., alors N n'est pas forcément (k + 1)-h.c. (par exemple, 840 est 2-h.c. sans être 3-h.c.).
Si N est k-h.c., alors N n'est pas forcément (k - 1)-h.c. (par exemple, 8 est 3-h.c. sans être 2-h.c.).
Ceci est également vrai pour les nombres k-h.c.s. (6 est 2-h.c.s. sans être 3-h.c.s., 24 est 3-h.c.s. sans être 2-h.c.s.).

Lemme II.3.1.

Soit N_0 un nombre k-hautement composé supérieur associé à ε_0, soit $N_1 > N_0$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que pour tout $n \geq N_0$, $\dfrac{d_k(n)}{n^{\varepsilon_1}} \leq \dfrac{d_k(N_1)}{{N_1}^{\varepsilon_1}}$, alors N_1 est k-hautement composé supérieur associé à ε_1 et $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$.

Preuve.

Comme N_0 est k-hautement composé supérieur pour ε_0, on a

$$\frac{d_k(N_1)}{{N_1}^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d_k(N_0)}{{N_0}^{\varepsilon_0}}.$$

D'après les hypothèses, pour $n = N_0$,

$$\frac{d_k(N_0)}{{N_0}^{\varepsilon_1}} \leq \frac{d_k(N_1)}{N^{\varepsilon_1}} . \qquad \text{(i)}$$

On en déduit

$$\left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\varepsilon_1} \leq \frac{d_k(N_1)}{d_k(N_0)} \leq \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{\varepsilon_0}$$

ce qui entraîne $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$.

Il reste à montrer que pour tout $n < N_0$, $\dfrac{d_k(n)}{n^{\varepsilon_1}} \leq \dfrac{d_k(N_1)}{{N_1}^{\varepsilon_1}}$, ce qui prouvera que N_1 est k-h.c.s.

Pour $n < N_0$,

$$\frac{d_k(n)}{n^{\varepsilon_0}} \leq \frac{d_k(N_0)}{{N_0}^{\varepsilon_0}}$$

et grâce à (i),

$$\frac{d_k(n)}{n^{\varepsilon_1}} \le \left(\frac{n}{N_0}\right)^{\varepsilon_0-\varepsilon_1} \frac{d_k(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}} \le \frac{d_k(N_1)}{N_1^{\varepsilon_1}}. \qquad \blacksquare$$

Lemme II.3.2.

Soit g(n) une fonction multiplicative. On suppose que $\lim\limits_{p^k \to +\infty} g(p^k) = 0$, alors g est bornée et

$$\max_{n \in \mathbb{N}} g(n) = \prod_{p \text{ premier}} \max_{i \ge 0} g(p^i).$$

Preuve.

Il suffit de décomposer n en facteurs premiers pour obtenir le résultat. $\blacksquare$

Lemme II.3.3.

Étant donné ε et $k \ge 2$, soit N_ε le nombre k-hautement composé supérieur associé à ε, alors

$$N_\varepsilon = \prod_{p \le k^{1/\varepsilon}} p^{l(p,\varepsilon)}$$

$$\text{avec } \; l(p,\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1}\right] & \text{si } \dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1} \notin \mathbb{N} \\[2ex] \left[\dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1}\right] \text{ ou } \left[\dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1} - 1\right] & \text{si } \dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Preuve. (Cf [RA15b])

Appliquons le lemme II.3.2 à la fonction $g(n) = \dfrac{d_k(n)}{n^\varepsilon}$.

On a alors $\dfrac{d_k(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^\varepsilon} = \prod\limits_{p \text{ premier}} \max_{i \ge 0} \dfrac{d_k(p^i)}{p^{i\varepsilon}}$.

$\dfrac{d_k(n)}{n^\varepsilon}$ croit avec i tant que $\dfrac{k-1+i}{i.p^\varepsilon} \ge 1$, soit $i \le \dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1}$, ce qui donne le lemme. $\blacksquare$

Pour simplifier les écritures, définissons x et v_i , I et G(x) tels que

$$x = k^{1/\varepsilon} \text{ et } \; v_i = \log \frac{i+k-1}{i} \Big/ \log k, \tag{3}$$

$$I = \left[\frac{k-1}{2^{\varepsilon}-1}\right] = \left[\frac{k-1}{k^{\frac{\log 2}{\log x}}-1}\right]. \qquad (4)$$

I est le plus grand entier i tel que $x^{v_i} \geq 2$,

$$G(x) = \pi(x) \log x - \theta(x) \qquad (5)$$

avec

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x,\ p \text{ premier}} 1 \quad \text{et} \quad \theta(x) = \sum_{p \leq x,\ p \text{ premier}} \log p.$$

Lemme II.3.4.

Les nombres premiers p qui interviennent dans la décomposition de N_ε, à la puissance i sont tels que $x^{v_{i+1}} < p \leq x^{v_i}$.

Preuve.

$p^i \,||\, N_\varepsilon$ signifie, d'après le lemme II.2.3, que $\left[\frac{k-1}{p^{\varepsilon}-1}\right] = i$, soit $i \leq \frac{k-1}{p^{\varepsilon}-1} < i+1$.

La première inégalité conduit à $p \leq \left(\frac{k-1+i}{i}\right)^{1/\varepsilon} = k^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\log(k+i-1)-\log i}{\log k}\right)} = x^{v_i}$.

La seconde inégalité conduit à $p > \left(\frac{k+i}{i+1}\right)^{1/\varepsilon} = k^{\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\log(k+i)-\log(i+1)}{\log k}\right)} = x^{v_{i+1}}$.

■

Théorème II.3.1.

$$\log d_k(N_\varepsilon) - \varepsilon \log N_\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \left(\pi(x^{v_i}) \log x^{v_i} - \theta(x^{v_i})\right)$$
$$= \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} G(x^{v_i}).$$

Preuve.

x^{v_i} majore le plus grand premier p tel que p^i intervienne dans la décomposition de N_ε. Donc $x^{v_1} = x$ majore le plus grand premier divisant N_ε. Avec les notations du lemme II.2.3,

$$N_\varepsilon = \prod_{i=1}^{\omega(N_\varepsilon)} p^{l(p,\varepsilon)} = \prod_{i=1}^{I} \prod_{p<x^{v_i}} p$$

soit,

$$\log N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{I} \sum_{p<x^{v_i}} \log p = \sum_{i=1}^{I} \theta(x^{v_i}). \qquad \text{(i)}$$

De manière analogue,

$$d_k(N_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{\omega(N_\varepsilon)} \binom{l(p_i,\varepsilon)+k-1}{l(p_i,\varepsilon)} = \prod_{i=1}^{I} \left(\frac{k+i-1}{i}\right)^{\pi(x^{v_i})}$$

car $\pi(x^{v_i})$ représente le nombre de premiers p tels que $p^i \mid N_\varepsilon$.

Ceci conduit à

$$\log d_k(N_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{I} \pi(x^{v_i}) \log\left(\frac{k+i-1}{i}\right) = \frac{\log k}{\log x} \sum_{i=1}^{I} \pi(x^{v_i}) \frac{\log\left(\frac{k+i-1}{i}\right)}{\log k} \log x,$$

$$\log d_k(N_\varepsilon) = \varepsilon \sum_{i=1}^{I} \pi(x^{v_i}) \log x^{v_i}. \qquad \text{(ii)}$$

On obtient le théorème en soustrayant (ii) de (i). ∎

<u>Théorème II.3.2</u>.

Pour tout entier n, $\log d_k(n) \leq \log k \dfrac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \dfrac{1}{\log n}\displaystyle\sum_{i=1}^{I} G(\log^{v_i} n)\right)$,

avec $I = \left[\dfrac{k-1}{2^{\frac{\log k}{\log\log n}} - 1}\right]$ et $v_i = \log \dfrac{i+k-1}{i} \Big/ \log k$,

Preuve.

$$\log d_k(n) - \varepsilon \log n \leq \log d_k(N) - \varepsilon \log N$$

$$\text{donc } \log d_k(n) \leq \varepsilon\left(\log n + \sum_{i \geq 1} G(x^{v_i})\right).$$

Il suffit, pour n donné, de prendre $\varepsilon = \dfrac{\log k}{\log\log n}$ dans le théorème II.2.1, car, par définition de I, pour tout $i > I$, $x^{v_i} < 2$ et $G(x^{v_i}) = 0$. ∎

Le problème de la majoration de $d_k(n)$ — nous le verrons lors du prochain chapitre — se ramène à majorer le second membre de l'inégalité de ce théorème.

Autres résultats sur les nombres k-hautement composés supérieurs

Proposition II.3.1.

Pour k fixé, pour tout ε et ε' réels positifs, N_ε représentant le nombre k-h.c.s. associé à ε, on a

$$\varepsilon' < \varepsilon \Rightarrow N_{\varepsilon'} > N_\varepsilon.$$

Preuve.

Avec les notations du lemme II.3.3, $\varepsilon' < \varepsilon$ implique que

$$l(p,\varepsilon) = \left[\frac{k-1}{p^{\varepsilon}-1}\right] \leq \left[\frac{k-1}{p^{\varepsilon'}-1}\right] = l(p,\varepsilon'),$$

et en outre

$$k^{1/\varepsilon} < k^{1/\varepsilon'}.$$

Le lemme II.3.3 conduit au résultat. ■

Proposition II.3.2.

L'ensemble des nombres k-hautement composés supérieurs, pour k fixé, est infini.

Preuve.

Soit N_ε le nombre k-hautement composé supérieur associé à ε. Posons $\varepsilon_i = \dfrac{\log k}{\log p_i}$. avec p_i représentant le $i^{\text{ème}}$ nombre premier, Les N_{ε_i} sont distincts deux à deux. Il y en a donc une infinité, puisqu'il y a une infinité de nombres premiers. ■

Soient $\varepsilon_{p,\alpha} = \log\dfrac{\alpha+k-1}{\alpha}\Big/\log p$, avec p premier et α entier positif, et E l'ensemble de ces nombres.

Erdös et Nicolas ([EN75]) ont montré qu'il ne peut exister p, q et r premiers distincts tels qu'il existe α, β et γ de sorte que l'on ait $\varepsilon_{p,\alpha} = \varepsilon_{q,\beta} = \varepsilon_{r,\gamma}$, pour un k fixé. Compte-tenu de cela, on démontre le résultat suivant :

Lemme II.3.5.

Soit ε réel positif :

si $\varepsilon \notin E$, alors il existe un seul nombre hautement composé supérieur associé à ε.

si $\varepsilon = \varepsilon_{p,\alpha}$ pour une seule valeur de p, alors il existe deux nombres h.c.s. associés à ε.

si $\varepsilon = \varepsilon_{p,\alpha} = \varepsilon_{q,\beta}$ pour q différent de p, alors il existe quatre nombres h.c.s. associés à ε.

Preuve.

D'après le lemme II.3.3, on constate que pour ε fixé, il ne peut y avoir plusieurs nombres h.c.s. que si $\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}$ est entier. Cela revient à dire qu'il existe α entier tel que l'on ait $\alpha = \frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}$, soit $\varepsilon = \log \frac{\alpha + 1}{\alpha} / \log p$, donc pour $\varepsilon \in E$. Dans ce cas, si $\varepsilon = \varepsilon_{p,\alpha}$ pour p unique, alors $l(p,\varepsilon) = \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right]$ ou $\left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1} - 1\right]$, ce qui donne deux nombres h.c.s distincts. Si $\varepsilon = \varepsilon_{p,\alpha} = \varepsilon_{q,\beta}$ pour q différent de p, $l(p,\varepsilon) = \left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1}\right]$ ou $\left[\frac{1}{p^{\varepsilon} - 1} - 1\right]$ et $l(q,\varepsilon) = \left[\frac{1}{q^{\varepsilon} - 1}\right]$ ou $\left[\frac{1}{q^{\varepsilon} - 1} - 1\right]$, conduisant à quatre nombres h.c.s. distincts. ∎

II.4. PREMIERES MAJORATIONS DE d(n)

D'après la définition des nombres 2-hautement composés supérieurs, on peut, à l'instar de Ramanujan [RA15b], trouver des majorations de d(n).

Soit N un nombre hautement composé. Écrivons-le sous la forme :

$$
\begin{aligned}
N = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} = {} & 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots p_r \\
& .\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots p_{r-1} \\
& .\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots p_{r-2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& .\, 2 \quad (\text{ou } 2 \,.\, 3).
\end{aligned}
$$

D'après le postulat de Bertrand (si $x \geq 1$, il existe au moins un nombre premier p tel que $x < p \leq 2x$), on peut écrire, pour tout i compris entre 1 et $r = \omega(N)$,

$$\alpha_i \geq r - i + 1,$$

$$\alpha_{i+1} \leq r - i.$$

Grâce au lemme II.2.3, on a, pour k = 2, $\alpha_i = \left[\dfrac{1}{p_i^{\varepsilon} - 1}\right]$.

Comme $\alpha_i \geq r - i + 1$, $r - i + 1 \leq \left(\dfrac{1}{p_i^{\varepsilon} - 1}\right)$, soit

$$p_i^{\varepsilon} \leq \frac{1}{r - i + 1} + 1,$$

$$p_i \leq \left(1 + \frac{1}{r - i + 1}\right)^{1/\varepsilon}.$$

De même, nous obtenons

$$p_{i+1} > \left(1 + \frac{1}{r - i + 1}\right)^{1/\varepsilon}.$$

Comme p_{i+1} est le nombre premier suivant p_i, on en déduit que p_i est le plus grand premier plus petit que $\left(1 + \dfrac{1}{r - i + 1}\right)^{1/\varepsilon}$.

Par conséquent, p_1 est le plus grand premier plus petit que $\left(1 + \dfrac{1}{r}\right)^{1/\varepsilon}$, p_2 est le plus grand premier plus petit que $\left(1 + \dfrac{1}{r - 1}\right)^{1/\varepsilon}$, … , p_{r-1} est le plus grand premier plus petit que $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/\varepsilon}$, p_r est le plus grand premier plus petit que $2^{1/\varepsilon}$.

N est ainsi de la forme $\exp\left(\theta(2^{1/\varepsilon}) + \theta\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1/\varepsilon} + \theta\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/\varepsilon} + \dots\right)$, avec $\theta(x) = \displaystyle\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \log p$.

d(N) est de la forme $2^{\pi(2^{1/\varepsilon})} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^{1/\varepsilon}} \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\pi\left(\frac{4}{3}\right)^{1/\varepsilon}} \dots$, avec $\pi(x) = \displaystyle\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} 1$

Comme, pour tout n, $\dfrac{d(n)}{n^{\varepsilon}} \leq \dfrac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$,

$$d(n) \leq n^{\varepsilon} \frac{2^{\pi(2^{1/\varepsilon})}}{\exp\left(\varepsilon . \theta(2^{1/\varepsilon})\right)} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^{1/\varepsilon}}}{\exp\left(\varepsilon . \theta\left(\frac{3}{2}\right)^{1/\varepsilon}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{\pi\left(\frac{4}{3}\right)^{1/\varepsilon}}}{\exp\left(\varepsilon . \theta\left(\frac{4}{3}\right)^{1/\varepsilon}\right)} \cdots$$

Si l'on choisit pour ε successivement les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ nous obtenons, pour tout n,

$$d(n) \leq \sqrt{3n},$$

$$d(n) \leq 8\sqrt[3]{\frac{3n}{35}},$$

$$d(n) \leq 96\sqrt[4]{\frac{3n}{50500}}.$$

$$d(n) \leq 192\sqrt[5]{\frac{128625n}{1910089906}}.$$

On aura l'égalité dans la première formule pour $n = 2^2.3 = 12$, dans la seconde pour $n = 2^3.3^2.5.7 = 2520$, dans la troisième pour $n = 2^5.3^3.5^2.7.11.13 = 21621600$, et dans la dernière pour $n = 2^6.3^4.5^2.7^2.11.13.19.23.29.31$.

Chapitre III

MAJORATION DES FONCTIONS $d_k(n)$

Dans ce chapitre, nous proposons différentes majorations des fonctions $d_k(n)$ en fonction de k et de n entiers. Pour cela nous utilisons les nombres k-h.c.s. présentés dans le chapitre précédent. En effet, les couples $(\log N, \log d_k(N))$ pour N k-h.c.s. forment l'enveloppe convexe de l'ensemble des points $(\log n, \log d_k(n))$; les majorations de $d_k(n)$ découlent de cette propriété. Nous obtenons notamment que, pour tout k entier et pour tout $n \geq 3$, on a

$$\log d_k(n) < \frac{1,65}{\log 2} \log^2 k \frac{\log n}{\log \log n}$$

et

$$\log d_k(n) < \log k \frac{\log n}{\log \log n}\left(1 + \frac{\log^3 k}{\log^2 2} \frac{1,65}{\log \log n}\right).$$

Nous obtenons de meilleurs résultats pour k inférieur ou égal à 25.

Au second paragraphe, nous montrons que ces résultats sont meilleurs que la majoration due à Norton ([NO85]).

III.1. INTRODUCTION

Comme nous l'avons vu (théorème I.3.2)

$$\log d_k(n) \leq \log k \operatorname{li}(\log(n)) + O_k\left((\log n)\exp\left(-c\sqrt{\log \log n}\right)\right)$$

Par suite, il existe des fonctions $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$, telles que, pour tout n,

$$\log d_k(n) \leq \lambda_1(k) \ \log k \frac{\log n}{\log \log n}, \tag{1}$$

$$\log d_k(n) \le \log k \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \frac{\lambda_2(k)}{\log\log n}\right). \qquad (2)$$

Le but de notre travail est d'obtenir de bonnes estimations de $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$.

On pose $\quad \Lambda_1(k,N) = \dfrac{\log\log N \log d_k(N)}{\log k \log N}$

et $\quad \Lambda_2(k,N) = \dfrac{(\log\log N)^2 \log d_k(N)}{\log k \log N} - \log\log N,$

alors $\lambda_1(k) = \operatorname{Max}_{N \in \mathbb{N}} \Lambda_1(k,N)$ et $\lambda_2(k) = \operatorname{Max}_{N \in \mathbb{N}} \Lambda_2(k,N)$.

Nous nous proposons de démontrer les résultats effectifs suivants :

__Théorème III.1.1.__

Pour tout $k \ge 11$ et pour $\log n > \exp\left(\dfrac{\log^2 k}{\log 2}\right)$, on a

$$\log d_k(n) < \frac{5}{4} \log k \frac{\log n}{\log\log n}$$

et

$$\log d_k(n) < \log k \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \frac{2}{\log\log n}\right).$$

Nous pouvons obtenir une majoration plus générale.

__Théorème III.1.2.__

Pour tout k entier et pour tout $n \ge 3$, on a

$$\log d_k(n) < \frac{1,65}{\log 2} \log^2 k \frac{\log n}{\log\log n}$$

et

$$\log d_k(n) < \log k \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \frac{\log^3 k}{\log^2 2} \frac{1,65}{\log\log n}\right).$$

Le théorème III.1.1 signifie que pour tout $k \ge 11$ et pour $\log n > \exp\left(\dfrac{\log^2 k}{\log 2}\right)$,

$$\Lambda_1(k,n) < \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \Lambda_2(k,n) < 2.$$

Le théorème III.1.2 signifie que pour tout k entier,

$$\lambda_1(k) < \frac{1,65}{\log 2}\log k \quad \text{et} \quad \lambda_2(k) < \frac{1,65}{\log^2 2}\log^3 k.$$

Le tableau du paragraphe 4 donne de meilleures estimations que le théorème pour $k \leq 25$ et pour tout n, permettant ainsi de retrouver les résultats de Robin ([RO83b]) pour $k = 2$ et 3.

III.2. COMPARAISON AVEC LE RÉSULTAT DE NORTON

Norton ([NO85]) montre que, pour tout $k \geq \log n$,

$$\log d_k(n) < k + 2\log n.$$

Pour cela, il utilise la fonction de Riemann de la manière suivante : comme $\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} d_k(n)n^{-s}$, on a $\zeta(s)^k > n^{-s}d_k(n)$ pour s réel, ce qui revient à dire que

$$\log d_k(n) < s\log n + k\log\zeta(s).$$

Pour x supérieur à -1, on a

$$\int_1^{+\infty} u^{-x}du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} u^{-x}du.$$

Or $\int_1^{+\infty} u^{-x}du = \left[\frac{u^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$.

D'où, pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}.$$

En conclusion, pour tout $s > 1$, on a $\zeta(s) \leq \frac{1+s-1}{s-1}$, ce qui permet d'écrire

$$\log d_k(n) < s\log n + k\log\zeta(s) < s\log n - k\log(s-1) + k\log(1+s-1).$$

Pour tout $x < -1$, $\log(1+x)$ est inférieur ou égal à x, donc, pour tout $k > 1$, $s > 1$ et $n \geq 1$,

$$\log d_k(n) < s \log n - k \log(s-1) + k(s-1).$$

Il ne reste plus qu'à minimiser le terme de droite en fonction de s :

La dérivée de $t(s) = s \log n - k \log(s-1) + k(s-1)$ vaut $\log n + k - \dfrac{k}{s-1}$ qui est positive pour $s > 1 + \dfrac{k}{\log n + k}$. Le minimum de t(s) est donc atteint pour $s = 1 + \dfrac{k}{\log n + k}$, d'où

$$\begin{aligned}\log d_k(n) &< \log n + \frac{k \log n}{\log n + k} + \frac{k^2}{\log n + k} - k \log\left(\frac{k}{\log n + k}\right) \\ &= \log n + k + k \log\left(1 + \frac{\log n}{k}\right).\end{aligned}$$

La majoration $\log d_k(n) < \log n + k + k \log\left(1 + \dfrac{\log n}{k}\right)$ est vraie pour tout k supérieur à 1 et pour tout n supérieur ou égal à 1. Si l'on se restreint à $k \geq \log n$, elle devient

$$\log d_k(n) < k + \log n + k \log\left(1 + \frac{\log n}{k}\right) < k + 2 \log n. \qquad \blacksquare$$

On montre que la majoration du théorème III.1.2 est meilleure que celle-ci dès que $k > \log^{2.58} n$, et que pour tout $\beta > 1$, il existe N tel qu'elle soit meilleure pour $k > \log^{\beta} n$ et $n \geq N$. On peut calculer N pour des valeurs de ß :

ß	N
2,58	3
2,52	20
2,5	24
2,25	172
2	32261
1,75	e^{36}
1,5	e^{521}

tableau III.1

Pour établir cela, tout d'abord on écrit le résultat du théorème III.1.2 sous la forme :

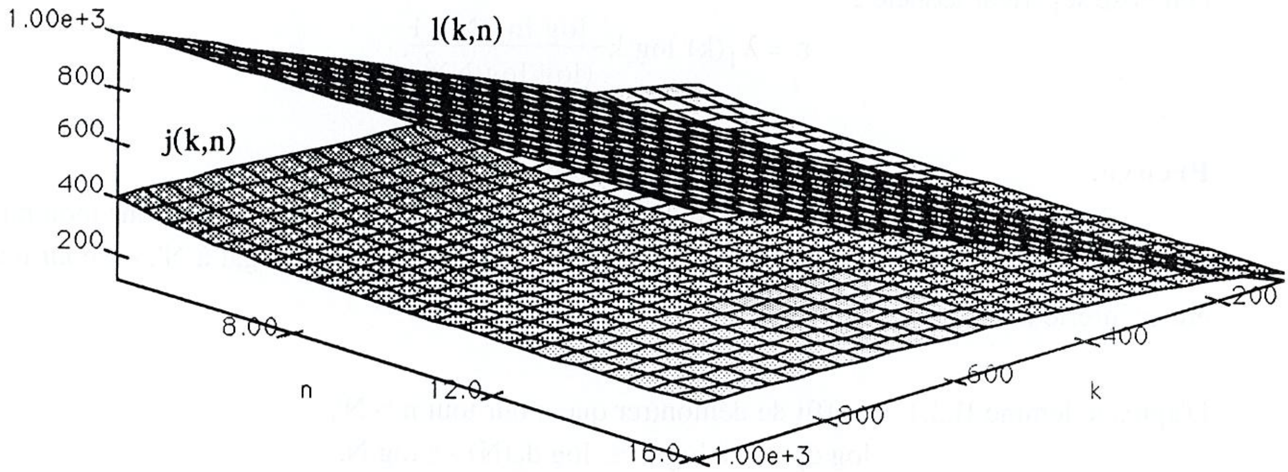
pour tout $n \geq 3$ et pour tout k,

$$\log d_k(n) < \frac{\log n}{\log \log n} \frac{1,65}{\log 2} \log^2 k < 2,381 \ \log^2 k \frac{\log n}{\log \log n}.$$

On cherche alors dans quels cas on aura $H(k,n) = k + \left(2 - \frac{c \log^2 k}{\log \log n}\right) \log n > 0$ (avec $k > \log n$ et $c = 2{,}381$), ce qui revient à dire que la majoration du théorème III.1.2 est meilleure que celle de Norton. On montre que H(k,n) est croissante suivant k pour $k \geq \log^5 n$. On vérifie ensuite que $H(\log^5 n, n)$ est positive, ce qui est vrai. Ceci prouve que, pour N = 3, ß = 5 convient. Mais on peut avoir de meilleurs résultats en remarquant que, si $\log^u n < k < \log^v n$, avec $1 < u < v < 5{,}4$ alors

$$\log^{u-1} n - cv (\log \log n)^2 + 2 < \frac{H(k,n)}{\log n} < \log^{v-1} n - cu (\log \log n)^2 + 2.$$

Il ne reste plus qu'à étudier cet encadrement pour u et v convenablement choisis. De cette manière, on montre notamment que H(k,n) est toujours positif dès que $\log^{2,58} n < k < \log^5 n$, ainsi que les autres résultats du tableau III.1.



Représentation de $l(k,n) = k + 2 \log n$ et de $j(k,n) = \frac{1{,}65}{\log 2} \log k \frac{\log n}{\log \log n}$.

III.3. ORGANISATION DE LA PREUVE

Nous allons montrer, avec les notations du paragraphe 1, que les maxima $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ sont atteints pour des nombres k-hautement composés supérieurs. Il suffira ensuite de majorer

Λ_1 (k,N) et Λ_2 (k,N) pour les N k-h.c.s. assez "grands" et vérifier par le calcul numérique pour k fixé (k variera de 2 à 25) que les maxima seront atteints pour l'un des autres entiers k-h.c.s. C'est une généralisation de la démonstration pour k = 2 dans [NR83]).

Lemme III.3.1.

Soit b un réel supérieur à 2, soit $F_b(t) = \frac{e^t}{t} - \frac{b-1}{b^2} e^t$, alors pour $t \geq 2$, on a $F_b(t) \leq F_b(b)$

Preuve.

On a $F'_b(t) = \frac{e^t}{b^2t^2} (b - 1) (b - t)\left(t - \frac{b}{b-1}\right)$, or comme $b > 2$, il vient $\frac{b}{b-1} < 2$.

La fonction $F_b(t)$ est donc croissante jusqu'à t = b, puis décroissante. ■

Lemme III.3.2.

On suppose que le maximum $\lambda_1(k)$ est atteint en N, alors N est un nombre k-hautement composé supérieur associé à

$$\varepsilon = \lambda_1(k) \log k \frac{\log\log N - 1}{(\log\log N)^2}.$$

Preuve.

Soit N' le nombre k-h.c.s. immédiatement supérieur à exp(exp 2). Nous allons montrer que le maximum $\lambda_1(k)$ est atteint pour un nombre k-h.c.s. supérieur ou égal à N', ou pour un entier inférieur à N'.

D'après le lemme II.3.1, il suffit de démontrer que, pour tout n > N',

$$\log d_k(n) - \varepsilon \log n \leq \log d_k(N) - \varepsilon \log N.$$

Comme n est supérieur à N', log log n sera supérieur à 2. On peut écrire

$$\log d_k(n) - \varepsilon \log n = \left(\log d_k(n) - \lambda_1(k) \log k \frac{\log n}{\log\log n}\right)$$
$$+ \left(\lambda_1(k) \log k \frac{\log n}{\log\log n} - \varepsilon \log n\right).$$

La première parenthèse est négative (par définition de $\lambda_1(k)$ qui est un maximum). La seconde parenthèse vaut $\lambda_1(k) \log k\, F_b(\log\log n)$ avec les notations du lemme III.3.1 et b = log log N. On a donc

$$\log d_k(n) - \varepsilon \log n \leq \lambda_1(k) \log k \frac{\log N}{\log \log N} - \varepsilon \log N = \log d_k(N) - \varepsilon \log N. \qquad \blacksquare$$

<u>Lemme III.3.3</u>.

Soient f et g deux fonctions C^2 définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f soit strictement croissante pour $t \geq t_0$ et gof^{-1} concave sur l'intervalle $[f(t_0), +\infty[$ pour $t \geq t_0$. Si X et x sont supérieurs à t_0 alors

$$g(x) - \frac{g'(X)}{f'(X)} f(x) \leq g(X) - \frac{g'(X)}{f'(X)} f(X).$$

Preuve.

gof^{-1} étant concave, on peut écrire pour y et $Y \geq f(t_0)$,

$$gof^{-1}(y) - gof^{-1}(Y) \leq (y - Y)\,(gof^{-1})'(Y).$$

Il suffit alors de poser $y = f(x)$ et $Y = f(X)$ pour obtenir

$$g(x) - g(X) \geq (f(x) - f(X)) \frac{g'(X)}{f'(X)}$$

qui donne le résultat. $\blacksquare$

<u>Lemme III.3.4</u>.

Soient f et g deux fonctions C^2 définies sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec g croissante positive. Supposons que

1) N maximise $f(n) - \varepsilon' g(n)$ sur $\mathbb{N}^*$ pour $\varepsilon' > 0$,

2) il existe $M > N$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout n supérieur ou égal à N,

$$f(M) - \varepsilon\, g(M) \geq f(n) - \varepsilon\, g(n),$$

alors M maximise $f(n) - \varepsilon\, g(n)$ sur $\mathbb{N}^*$.

Preuve.

La deuxième condition implique que M maximise $f(n) - \varepsilon\, g(n)$ pour $n \geq N$. Il reste à le montrer pour $n < N$.

Dans ce cas, il suffirait de montrer que $f(n) - \varepsilon\, g(n) < f(N) - \varepsilon\, g(N)$, puisque d'après 2) pour $n = N$,

$$f(N) - \varepsilon\, g(N) \leq f(M) - \varepsilon\, g(M). \qquad (a)$$

D'après 1), on a $\qquad f(M) - \varepsilon' g(M) \leq f(N) - \varepsilon' g(N). \qquad (b)$

En sommant (a) et (b) nous obtenons $\varepsilon\,(g(M) - g(N)) \leq \varepsilon'\,(g(M) - g(N))$, soit $\varepsilon' - \varepsilon > 0$, car $g(M) \geq g(N)$.

On sait que $f(n) - \varepsilon' g(n) \leq f(N) - \varepsilon' g(N)$. Puisque $(\varepsilon' - \varepsilon)\, g(n) \leq (\varepsilon' - \varepsilon)\, g(N)$, on obtient :

$$f(n) - \varepsilon' g(n) + (\varepsilon' - \varepsilon)\, g(n) \leq f(N) - \varepsilon' g(N) + (\varepsilon' - \varepsilon)\, g(N)$$

et donc $$f(n) - \varepsilon\, g(n) \leq f(N) - \varepsilon\, g(N) \leq f(M) - \varepsilon\, g(M).$$ ■

Lemme III.3.5.

Si $f(t) = \dfrac{1}{\log t}$ et $g(t) = \dfrac{1}{\log^2 t}$ alors $g \circ f^{-1}$ est concave sur l'intervalle $[f(t_0), +\infty[$ pour $t_0 \geq \exp(2 + \sqrt{2})$.

Preuve.

Démonstration immédiate ■

Lemme III.3.6.

Soit $\lambda > 1$. Si N maximise

$$g_\lambda^{(2)}(n) = \frac{\log d_k(n)}{\log k} - \frac{\log n}{\log \log n} - \lambda \frac{\log n}{(\log \log n)^2},$$

alors il existe M tel que si N > M, alors N maximise

$$g_{\lambda'}^{(1)}(n) = \frac{\log d_k(n)}{\log k} - \lambda' \frac{\log n}{\log \log n}$$

avec $\lambda' = 1 + \lambda \dfrac{\log \log N - 2}{\log \log N\,(\log \log N - 1)}$

Preuve.

On peut écrire $g_{\lambda'}^{(1)}(n) = g_\lambda^{(2)}(n) + (g_{\lambda'}^{(1)}(n) - g_\lambda^{(2)}(n))$.

$$g_{\lambda'}^{(1)}(n) - g_\lambda^{(2)}(n) = \frac{\log d_k(n)}{\log k} - \lambda' \frac{\log n}{\log \log n} - \frac{\log d_k(n)}{\log k} + \frac{\log n}{\log \log n} + \lambda \frac{\log n}{(\log \log n)^2}$$

$$= \lambda \left(\frac{\log n}{(\log \log n)^2} - \frac{\log \log N - 2}{\log \log N\,(\log \log N - 1)} \frac{\log n}{\log \log n} \right)$$

avec λ' donné dans l'énoncé.

On utilise alors le lemme 2.II.4 en posant $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$, $g(x) = \dfrac{x}{\log^2(x)}$ et, grâce au lemme 2.II.6, on a $x_0 = \exp(2 + \sqrt{2})$. On pose aussi $x = \log n$ et $X = \log N$. Soit M le plus petit nombre tel que $\log M > x_0$ et maximisant $g_\mu^{(1)}(n)$ pour une valeur de μ, alors si n et N sont supérieurs à M, le maximum de $g_{\lambda'}^{(1)}(n) - g_\lambda^{(2)}(n)$, sur les n supérieurs à M, se trouve en N. Ceci implique que le maximum de $g_{\lambda'}^{(1)}(n)$ sur les n supérieurs à M est atteint en N. Donc, d'après le lemme II.8, N maximise $g_{\lambda'}^{(1)}(n)$ sur tous les n. ■

Démontrons maintenant la croissance des fonctions $k \to \lambda_1(k)$ et $k \to \lambda_2(k)$:

Lemme III.3.7.

Soient a, b, c, d réels tels que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ avec $b \geq d$, alors $\frac{\log a}{\log b} \leq \frac{\log c}{\log d}$.

Preuve.

$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ implique $\log \frac{a}{b} \leq \log \frac{c}{d}$ et $b \geq d$ implique $\log b \geq \log d$, ce qui entraîne que $\frac{\log \frac{a}{b}}{\log b} \geq \frac{\log \frac{c}{d}}{\log d}$ soit $\frac{\log a}{\log b} - 1 \leq \frac{\log c}{\log d} - 1$, et par suite, $\frac{\log a}{\log b} \leq \frac{\log c}{\log d}$. ■

Proposition III.3.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, la fonction $k \to \frac{\log d_k(n)}{\log k}$ est croissante.

Si n est sans facteur carré, cette fonction est constante, sinon elle est strictement croissante.

Preuve.

Posons $a = d_k(n)$, $c = k$, $b = d_{k+1}(n)$, $d = k + 1$ et $n = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{\alpha_i}$.

On a $d_k(n) < d_{k+1}(n)$, $k < k + 1$ et $d_{k+1}(n) \geq k + 1$ (avec l'égalité uniquement dans le cas où n est premier) ; donc, si $\frac{d_k(n)}{d_{k+1}(n)} \leq \frac{k}{k+1}$, on a avec le lemme précédent,

$$\frac{\log d_k(n)}{\log d_{k+1}(n)} \leq \frac{\log k}{\log (k+1)}.$$

Il reste donc à montrer $\frac{d_k(n)}{d_{k+1}(n)} \leq \frac{k}{k+1}$, soit

$$\frac{d_k(n)}{d_{k+1}(n)} = \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha_i + k - 1}{k - 1}}{\prod_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha_i + k}{k}} = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{k\,(k+1)\ldots(\alpha_i + k - 1)}{\alpha_i!}}{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{(k+1)\,(k+2)\ldots(\alpha_i + k)}{\alpha_i!}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{k}{k+\alpha_i} = \prod_{i=1}^{\omega(n)} \frac{k}{k+\alpha_i},$$

$$\text{or } \prod_{i=1}^{\omega(n)} \frac{k}{k+\alpha_i} \leq \frac{k}{k+\alpha_i} \leq \frac{k}{k+1}.$$

Ceci implique la proposition.

Si n est sans facteur carré, i.e. $n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i$, alors

$$d_k(n) = \prod_{i=1}^{\omega(n)} \binom{k}{k-1} = k^{\omega(n)} \quad \text{et il vient} \quad \frac{\log d_k(n)}{\log k} = \omega(n), \text{ indépendant de k.}$$ ■

Corollaire III.3.1.

Pour tout entier N strictement supérieur à 1, $k \to \Lambda_1(k,N)$ et $k \to \Lambda_2(k,N)$ sont croissantes. Si N est sans facteur carré, ces fonctions sont constantes, sinon elles sont strictement croissantes.

Preuve.

Le corollaire découle immédiatement de la proposition précédente, puisque N est fixé. ■

Corollaire III.3.2.

$k \to \lambda_1(k)$ et $k \to \lambda_2(k)$ sont croissantes.

Preuve.

En effet, pour tout k, supposons que les maxima $\lambda_1(k)$ et $\lambda_1(k+1)$ soient respectivement atteints en N et en N'.

On a par conséquent, pour tout entier n distinct de N',

$$\lambda_1(k+1) = \Lambda_1(k+1,N') > \Lambda_1(k+1,n)$$

et donc notamment, $\lambda_1(k+1) > \Lambda_1(k+1,N)$. (iii)

De plus, d'après le corollaire III.3.1, pour n fixé, $\Lambda_1(k,n)$ est croissante, donc pour n = N

$$\Lambda_1(k+1,N) > \Lambda_1(k,N) = \lambda_1(k) \qquad \text{(iv)}$$

(iii) et (iv) entraînent que $\lambda_1(k+1) > \lambda_1(k)$, et ce quel que soit k.

On procède de manière identique pour $\lambda_2(k)$. ■

III.4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous allons, grâce aux lemmes III.3.2 et III.3.6, donner des majorations de $d_k(n)$ pour k compris entre 2 et 25. Dans tout le paragraphe, nous considérerons k inférieur ou égal à 25 et $x = k^{1/\varepsilon}$ supérieur à 4000.

Lemme III.4.1.

Soit N_ε un nombre k-hautement composé supérieur relatif à ε, alors on a :

$$\log N_\varepsilon \leq c\, x = c\, k^{1/\varepsilon}$$

avec c défini dans le tableau 1 ci-après, en fonction de k.

Preuve.

On a calculé la valeur $l(p,\varepsilon)$ dans le lemme III.3.2. On en déduit que :

$$l(p,\varepsilon) \leq \frac{k-1}{p^{\varepsilon}-1} \leq \frac{k-1}{\varepsilon \log p} \qquad \text{puisque } e^{u} - 1 \geq u.$$

Il vient

$$\log N_\varepsilon = \sum_{p \leq x} l(p,\varepsilon) \log p \leq \theta(x) + \sum_{p \leq x^{v_2}} \frac{k-1}{\varepsilon}$$

$$\leq \theta(x) + (k-1) \frac{\log x}{\log k} \pi(x^{v_2}) - \theta(x^{v_2}).$$

On majore alors $\pi(x^{v_2})$:

$$\pi(x^{v_2}) = \frac{\theta(x^{v_2})}{\log x^{v_2}} + \int_2^{x^{v_2}} \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt \leq \frac{\theta(x^{v_2})}{\log x^{v_2}} + \left[Li(t) - \frac{t}{\log t} \right]_2^{x^{v_2}}$$

$$\leq \frac{\theta(x^{v_2})}{\log x^{v_2}} + \frac{2{,}5\, a\, x^{v_2}}{(\log x^{v_2})^2},$$

en posant a = 1,000081 et en utilisant la majoration $\theta(t) < a\, t$ ([SC76]).

Il vient donc

$$\log N < \theta(x) + \frac{k-1}{\log k} \left[\frac{\theta(x^{v_2})}{v^2} + \frac{2{,}5\, a\, x^{v_2}}{v_2^2} \right] - \theta(x^{v_2})$$

soit, $\log N \leq a\, x \left[1 + \frac{1}{x^{v_2}} \left(\left(\frac{k-1}{v^2 \log k} - 1 \right) + \frac{k-1}{\log k} \frac{2{,}5}{v_2^2 \log x} \right) \right]$

La partie entre crochets décroît suivant x, donc, comme on a x > 4000, il vient

$$\log N \leq a\, x \left[1 + \frac{1}{4000^{v_2}} \left(\left(\frac{k-1}{v^2 \log k} - 1 \right) + \frac{k-1}{\log k} \frac{2{,}5}{v_2^2 \log 4000} \right) \right].$$

On obtient $\log N < c\, x$, avec c donné par le tableau 1, pour $2 \leq k \leq 25$. ∎

Lemme III.4.2.

Pour tous les entiers N_ε k-h.c.s. relatifs à ε, on a

$$\Lambda_1 (k, N_\varepsilon) \leq L_1,$$

avec L_1 donné en fonction de k dans le tableau III.2.

Remarque.

Ces majorations sont loin d'être les meilleures possibles, mais elles suffisent pour la suite.

Preuve.

A partir du lemme III.3.2, avec $x = k^{1/\varepsilon}$ on déduit :

$$\log\log N_\varepsilon \leq \log x + \alpha$$

où α a pour valeur $\log c$, avec c donné par le tableau précédent, suivant k.

La fonction $t \to \dfrac{t^2}{t-1}$ est croissante pour $t \geq 2$, or $\log\log N_\varepsilon > 2$.

On a donc $$\frac{\varepsilon}{\log k}\,\frac{(\log\log N_\varepsilon)^2}{\log\log N_\varepsilon - 1} \leq \frac{(\log x + \alpha)^2}{(\log x)(\log x + \alpha - 1)} = H(\log x)\,,$$

$$\text{avec } H(t) = \frac{(t+\alpha)^2}{t(t+\alpha-1)} = \left(1 + \frac{\alpha}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{t+\alpha-1}\right).$$

$H(t)$ est décroissante dès que $t > 1 - \alpha$, on en déduit pour $x > 4000$,

pour $k \leq 25$, $\quad H(\log x) \leq H(\log 4000) \leq L_1$. ■

k	c	L_1	L_2	k	c	L_1	L_2
2	1,087649	1,147040	1,431274	14	2,125113	1,226437	2,404222
3	1,152962	1,153943	1,510311	15	2,221622	1,231710	2,473780
4	1,226452	1,161259	1,595237	16	2,318654	1,236786	2,541326
5	1,305588	1,168665	1,682413	17	2,416135	1,241676	2,606946
6	1,388814	1,175987	1,769792	18	2,514005	1,246392	2,670727
7	1,475115	1,183131	1,856204	19	2,612210	1,250944	2,732754
8	1,563791	1,190051	1,940984	20	2,710708	1,255342	2,793110
9	1,654346	1,196726	2,023762	21	2,809461	1,259594	2,851874
10	1,746413	1,203149	2,104353	22	2,908437	1,263708	2,909122
11	1,839715	1,209323	2,182681	23	3,007608	1,267693	2,964924
12	1,934038	1,215255	2,258741	24	3,106949	1,271556	3,019348
13	2,029216	1,220956	2,332567	25	3,206440	1,275303	3,072459

Tableau III.2

Il suffit alors de calculer les valeurs de λ_1 pour tous les entiers N_ε k-hautement composés pour k variant de 3 à 25, et tels que $k^{1/\varepsilon} < 4000$. On s'aperçoit alors que le maximum est atteint pour l'une des valeurs que l'on a calculées. Les résultats obtenus au lemme III.4.2 pour les grandes valeurs de N sont inférieurs au maximum trouvé sur l'intervalle étudié expérimentalement.

On procède d'une manière analogue pour $\lambda_2(k)$:

Lemme III.4.3.

Pour tous les entiers N_ε k-h.c.s. relatifs à ε, on a

$$\Lambda_2\,(k,N_\varepsilon) \leq L_2,$$

avec L_2 donné en fonction de k dans le tableau III.2.

Preuve.

Si N est k-h.c.s., pour $x > 4000$, on a, d'après les lemmes III.3.6 et III.3.2,

$$\varepsilon = \left(1 + \Lambda_2\,(k,N_\varepsilon)\,\frac{\log\log N - 2}{\log\log N\,(\log\log N - 1)}\right)\frac{\log\log N - 1}{(\log\log N)^2}.\ \log k.$$

On obtient $\Lambda_2\,(k,N_\varepsilon) = \left(\log\log N\left(\frac{\log\log N}{\log x} - 1\right) + 1\right)\frac{\log\log N}{\log\log N - 2}.$

$N \rightarrow \log\log N\left(\frac{\log\log N}{\log x} - 1\right) + 1$ est croissante et $N \rightarrow \frac{\log\log N}{\log\log N - 2}$ est décroissante.

On a $\log N > \theta(x) > 0{,}970\ x$, pour $x \geq 4000$ ([RS62]).

Donc, $\Lambda_2\,(k,N_\varepsilon) \leq \left(\frac{c^2}{\log x} + c + 1\right)\left(1 + \frac{2}{\log x - 2{,}030459}\right)$, avec c donné dans le tableau 1 en fonction de k. On en déduit les valeurs de L_2. ■

Pour k variant de 2 à 25, on obtient les résultats du tableau et du graphe ci-après.

Description du tableau III.3.

Pour k fixé, on a

$$\log d_k(n) \leq \lambda_1\,\log k\,\frac{\log n}{\log\log n}.$$

On a l'égalité pour le Ω_1 ième nombre k-hautement composé supérieur N_i (donc $\Omega(N_i) = \Omega_1$). En outre, $\omega(N_i) = \omega_1$.

Pour k fixé, on a aussi

$$\log d_k(n) \leq \log k\,\frac{\log n}{\log\log n}\,\left(1 + \frac{\lambda_2}{\log\log n}\right).$$

On a l'égalité pour le Ω_2 ième nombre k-hautement composé supérieur N_i (donc $\Omega(N_i) = \Omega_2$). En outre, $\omega(N_i) = \omega_2$.

On aura

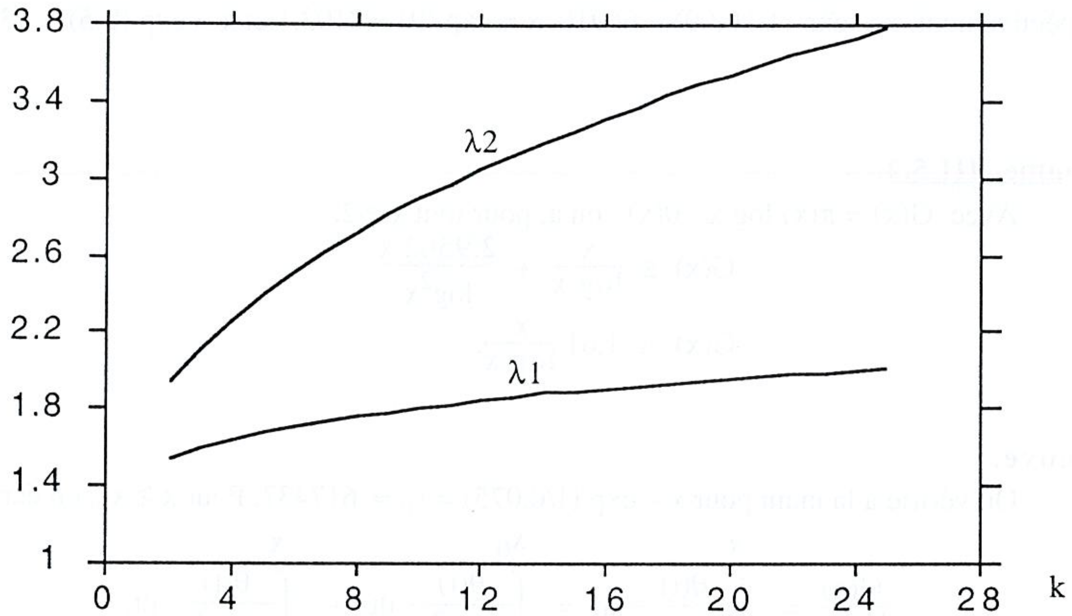
$$\log d_k(n) \leq \log k \frac{\log n}{\log \log n} \left(1 + \frac{2}{\log \log n}\right) \qquad (6)$$

pour tous les entiers supérieurs au $r^{\text{ième}}$ nombre k-h.c.s. qui est peu différent de e^t.

Plus précisément, (6) est vérifiée pour tout n tel que $\log n > t$.

k	λ_1	Ω_1	ω_1	λ_2	Ω_2	ω_2	r	t
2	1,537940	15	8	1,934851	39	23	-	0
3	1,591410	14	6	2,108741	41	21	33	258,106
4	1,633729	16	6	2,262774	40	18	131	472,272
5	1,671436	16	6	2,397857	40	16	179	703,429
6	1,702925	17	6	2,516797	40	15	230	964,250
7	1,729944	17	6	2,623119	42	15	281	1245,516
8	1,754853	17	5	2,720396	44	15	335	1537,471
9	1,778192	17	5	2,811159	48	15	389	1850,378
10	1,799313	19	5	2,896447	49	15	446	2179,352
11	1,819757	19	5	2,975690	50	14	504	2520,528
12	1,838195	19	5	3,051010	51	14	564	2864,949
13	1,855306	20	5	3,122778	48	12	622	3246,159
14	1,871651	19	4	3,190852	48	12	683	3632,683
15	1,888000	19	4	3,256273	51	12	747	4039,874
16	1,902959	19	4	3,319475	52	12	808	4435,086
17	1,916874	20	4	3,379595	51	11	873	4859,265
18	1,930498	20	4	3,437606	52	11	939	5295,116
19	1,943268	20	4	3,493201	54	11	1006	5753,693
20	1,955274	20	4	3,546798	54	11	1074	6198,453
21	1,967050	22	4	3,598219	55	11	1141	6664,362
22	1,978588	22	4	3,647277	56	11	1209	7143,669
23	1,989525	22	4	3,695379	57	11	1278	7615,688
24	1,999960	23	4	3,741739	58	11	1346	8117,174
25	2,010263	23	4	3,787142	64	11	1424	8627,824

Tableau III.3



III.5. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Lemme III.5.1.

a) Pour tout $x \geq \exp(1 / 0{,}09)$,

$$\mathrm{Li}(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2{,}95\, x}{\log^3 x}.$$

b) Pour tout $x \geq \exp(9)$,

$$\mathrm{Li}(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{3}{2}\frac{x}{\log^2 x}.$$

c) Pour tout $x \geq \exp(9{,}5)$,

$$\mathrm{Li}(x) < \frac{x}{\log x} + \frac{4}{3}\frac{x}{\log^2 x}.$$

Preuve.

$\mathrm{Li}(x) - \left(\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2{,}95x}{\log^3 x}\right)$ est une fonction décroissante pour $x > \exp\frac{177}{19}$,

$\mathrm{Li}(x) - \left(\frac{x}{\log x} + \frac{3}{2}\frac{x}{\log^2 x}\right)$ est une fonction décroissante pour $x > e^6$,

$\mathrm{Li}(x) - \left(\frac{x}{\log x} + \frac{4}{3}\frac{x}{\log^2 x}\right)$ est une fonction décroissante pour $x > e^8$.

Grâce aux tables du logarithme intégral, on remarque que ces fonctions sont négatives dès que, respectivement, $x = \exp(1 / 0{,}09) \approx 66910$, $x = \exp(9) \approx 8103{,}1$ et $x = \exp(9{,}5) \approx 13359{,}8$. ■

Lemme III.5.2.

Avec $G(x) = \pi(x) \log x - \theta(x)$ on a, pour tout $x \geq 2$,

$$G(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{2{,}9502\, x}{\log^2 x}$$

$$G(x) \leq 1{,}61 \frac{x}{\log x}.$$

Preuve.

On vérifie à la main pour $x < \exp(1/0{,}075) = x_0 \approx 617437$. Pour $x \geq x_0$, on écrit

$$\frac{G(x)}{\log x} = \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt = \int_2^{x_0} \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt + \int_{x_0}^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t}\, dt.$$

D'après Schoenfeld [SC76], $\theta(t) < t$ pour tout $t < 10^{11}$ et

$$\theta(t) < t + \alpha \frac{t}{\log t} \qquad \text{avec } \alpha = 0{,}000081.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{G(x)}{\log x} \leq \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} + \alpha \int_{x_0}^x \frac{dt}{\log^3 t}$$

$$= \mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} + \alpha\, f(x) + c$$

avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x}\right)$ et $c = \frac{2}{\log 2} - \mathrm{Li}(2) - \alpha f(x_0) < 0$.

Le lemme III.5.1 implique que

$$\frac{G(s)}{\log x} \leq \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2{,}95\, x}{\log^3 x} + \frac{\alpha}{2} \frac{2{,}95\, x}{\log^3 x},$$

d'où $G(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{2{,}9502\, x}{\log^2 x}$.

La seconde inégalité se déduit directement de celle-ci pour tout $x \geq 137$. On vérifie à la main pour $x < 137$. ■

Nous allons maintenant définir une fonction A(L) qui nous permettra de majorer $\sum_{i \geq i_0} G(x^{\nu_i})$

Lemme III.5.3.

$$\text{Soit } A(L) = \sum_{m=2}^{L-1} \pi(m) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right).$$

a) Pour tout $L \geq 3$

$$A(L) < 2{,}1883 \frac{L}{\log^2 L}.$$

b) Pour tout $L \geq 420$

$$A(L) < \frac{2\,L}{\log^2 L}.$$

c) Pour tout $L \geq 903$

$$A(L) < \frac{15}{8} \frac{L}{\log^2 L}.$$

d) Pour tout $L \geq 3$

$$A(L) < \frac{L}{\log^2 L} \left(1 + \frac{6{,}0391}{\log L} \right).$$

Preuve.

Pour $L > e^9$, on écrit :

$$A(L) = \sum_{m=2}^{e^4} \pi(m) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) + \sum_{m=e^4+1}^{L-1} \pi(m) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right).$$

Or

$$\sum_{m=e^4+1}^{L-1} \pi(m) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \leq \sum_{m=e^4+1}^{L-1} \frac{\pi(m)}{m \log m}$$

$$\leq \sum_{m=e^4+1}^{L-1} \frac{1}{\log^2 m} + \frac{3}{2} \sum_{m=e^4+1}^{L-1} \frac{1}{\log^3 m},$$

ceci car $\pi(x) < \frac{x}{\log x} \left(1 + \frac{3}{2 \log x} \right)$ [RS62] ,

soit

$$\sum_{m=e^4+1}^{L-1} \pi(m) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \leq \int_{e^4}^{L-1} \left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{3}{2} \frac{1}{\log^3 x} \right) dx = f((L-1) - f(e^4)$$

avec $f(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} + \frac{3}{4} \left(\mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} \right).$

En outre on constate que $f(e^4) > \sum_{m=2}^{e^4} \pi(m) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right)$

D'après le lemme III.5.1, $Li(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{3}{2} \frac{x}{\log^2 x}$ pour $x > e^9$.

On obtient, par conséquent, que $A(L) \leq f(L) \leq \frac{3}{2} \frac{L}{\log^2 L} + \frac{3}{8} \frac{L}{\log^3 L}$, soit, pour tout $L > e^9$, $A(L) \leq \frac{15}{8} \frac{L}{\log^2 L}$.

La fonction $\frac{\log^2 L}{L} A(L)$ croît de $L = 3$ à $L = 85$, puis décroît de $L = 85$ à $L = 8103$ ($\approx e^9$) pour L entier. Si $L \notin \mathbb{N}$, $\frac{\log^2 L}{L} A(L) \leq \frac{\log^2 [L]}{[L]} A([L])$.

Ceci permet de vérifier (a), (b) et (c) grâce au calcul des valeurs de A(L) pour L entier variant de 1 à 903.

Démontrons (d). En majorant Li(x) par $\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2{,}95\ x}{\log^3 x}$ (lemme 1c), pour $L \geq [\exp(1/0{,}09)]$ on obtient :

$$\begin{aligned} A(L) \leq f(L) &\leq \frac{L}{\log^2 L} + \frac{7}{4} \cdot 2{,}95 \frac{L}{\log^3 L} \\ &\leq \frac{L}{\log^2 L} + 5{,}2 \frac{L}{\log^3 L} \end{aligned}$$

Pour L compris entre 3 et $[\exp(1/0{,}09)] = 66910$, le maximum est atteint pour $L = 405$ et est inférieur à 6,0391. ■

Lemme III.5.4.

a) $\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq 2{,}1883 \frac{k-1}{\log k} \frac{1}{v_{i_0}^2} \frac{x^{v_{i_0}}}{\log x}$.

b) Pour tout x et i_0 vérifiant $x^{v_{i_0}} \geq 419$

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq 2 \frac{k-1}{\log k} \frac{1}{v_{i_0}^2} \frac{x^{v_{i_0}}}{\log x}.$$

c) Pour tout x et i_0 vérifiant $x^{\nu_{i_0}} \geq 902$

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{\nu_i}) \leq \frac{15}{8} \frac{k-1}{\log k} \frac{1}{\nu_{i_0}^2} \frac{x^{\nu_{i_0}}}{\log x}.$$

d) $$\sum_{i \geq i_0} G(x^{\nu_i}) \leq \frac{k-1}{\log k} \frac{1}{\nu_{i_0}^2} \frac{x^{\nu_{i_0}}}{\log x}\left(1 + \frac{6{,}0391}{\nu_{i_0} \log x}\right).$$

Preuve.

Soit $L = [x^{\nu_{i_0}}] + 1$. Pour tout m, $2 \leq m \leq L - 1$, on pose

$$\beta_m = \text{card } \{ i \,/\, m < x^{\nu_i} < L \}.$$

G est une fonction croissante donc

$$m < x^{\nu_i} < m + 1 \quad \Rightarrow \quad G(m) < G(x^{\nu_i}) < G(m + 1)$$

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{\nu_i}) \leq \sum_{m=2}^{L-1} \beta_m \int_m^{m+1} \frac{\pi(t)}{t}\, dt$$

$$\leq \sum_{m=2}^{L-1} \beta_m\, \pi(m) \log \frac{m+1}{m}.$$

Puisque $\nu_i \log x = \log x \,.\log \frac{i+k-1}{i} \Big/ \log k$, $x^{\nu_i} > m$ est équivalent à $\nu_i \log x > \log m$, donc $\log \frac{i+k-1}{i} > \varepsilon \log m$ ce qui implique $\frac{k-1}{i} > \varepsilon \log m$, soit $i < \frac{k-1}{\varepsilon \log m}$ et finalement, $\beta_m < \frac{k-1}{\varepsilon \log m}$.

On obtient

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{\nu_i}) \leq \frac{k-1}{\varepsilon} \sum_{m=2}^{L-1} \pi(m) \frac{\log \frac{m+1}{m}}{\log m}.$$

D'après le lemme III.5.3 a), on a :

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq \frac{k-1}{\varepsilon}\ 2{,}1883\ \frac{L}{\log^2 L},$$

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq 2{,}1883\ \frac{k-1}{\log k}\ \frac{1}{v_{i_0}^2}\ \frac{x^{v_{i_0}}}{\log x}.$$

D'après le lemme III.5.3 b), on a, pour i_0 et x tels que $x^{v_{i_0}} \geq 419$:

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq 2\ \frac{k-1}{\log k}\ \frac{1}{v_{i_0}^2}\ \frac{x^{v_{i_0}}}{\log x}.$$

D'après le lemme III.5.3 c), on a, pour i_0 et x tels que $x^{v_{i_0}} \geq 903$:

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq \frac{15}{8}\ \frac{k-1}{\log k}\ \frac{1}{v_{i_0}^2}\ \frac{x^{v_{i_0}}}{\log x}.$$

D'après le lemme III.5.3 d), on a :

$$\sum_{i \geq i_0} G(x^{v_i}) \leq \frac{k-1}{\log k}\ \frac{1}{v_{i_0}^2}\ \frac{x^{v_{i_0}}}{\log x}\left(1 + \frac{6{,}0391}{v_{i_0} \log x}\right). \qquad \blacksquare$$

Remarque.

Si l'on prend $i_0 = 1$ alors $v_1 = 1$ et le lemme III.5.4 devient :

a) $\displaystyle\sum_{i \geq i} G(x^{v_i}) \leq 2{,}1883\ \frac{k-1}{\log k}\ \frac{x}{\log x}.$

b) Pour tout $x \geq 419$:

$$\sum_{i \geq 1} G(x^{v_i}) \leq 2\ \frac{k-1}{\log k}\ \frac{x}{\log x}.$$

c) Pour tout $x \geq 902$:

$$\sum_{i \geq 1} G(x^{v_i}) \leq \frac{15}{8}\ \frac{k-1}{\log k}\ \frac{x}{\log x}.$$

d) Pour tout $x \geq 2$:

$$\sum_{i \geq 1} G(x^{v_i}) \leq \frac{k-1}{\log k}\ \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{6{,}0391}{\log x}\right).$$

Proposition III.5.1.

On a

$$\log d_k(n) \le \log k \frac{x}{\log x}\left[1+\frac{1}{\log x}\left(1+\frac{2{,}9502}{\log x}+\frac{1{,}61}{v_2 x^{1-v_2}}+\frac{2{,}19\,(k-1)}{v_3^2 \log k\, x^{1-v_3}}\right)\right]$$

avec $x = \log n$, $\qquad v_2 = \dfrac{\log \frac{k+1}{2}}{\log k}$, $\qquad v_3 = \dfrac{\log \frac{k+2}{3}}{\log k}$.

Preuve.

On utilise directement les lemmes III.5.2 (pour majorer $G(x^{v_1})$ et $G(x^{v_2})$) et III.5.4a) pour les autre termes de la somme provenant du théorème II.3.2, d'où

$$\sum_{i \ge i_0} G(x^{v_i}) \le \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{2{,}9502}{\log x}+\frac{1{,}61}{v_2\, x^{1-v_2}}+2{,}1883\,\frac{k-1}{\log k}\,\frac{1}{v_3^2\, x^{1-v_3}}\right). \qquad \blacksquare$$

Remarque.

$$\sum_{i \ge 1} G(x^{v_i}) \le \frac{k-1}{\log k}\,\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{6{,}0391}{\log x}\right).$$

A partir du (d) de la remarque provenant du lemme III.5.4, et grâce au théorème II.3.2, on peut en déduire que pour tout $\lambda > 1$, il existe N tel que, pour tout $n > N$, on ait

$$\log d_k(n) \le \log k \frac{\log n}{\log\log n}\left(1+\frac{k-1}{\log k}\,\frac{\lambda}{\log\log n}\right).$$

III.6. DÉMONSTRATION DU THEOREME III.1.1

Le théorème III.1.1 est une conséquence simple du théorème suivant qui est un peu plus fin.

Théorème III.6.1.

Pour $k \ge 13$ et $\log n > \exp\left(\dfrac{\log^2 k - 0{,}609511 \log k}{\log 2 - \frac{1}{k}}\right)$,

$$\log d_k(n) < \log k \frac{\log n}{\log \log n} \left(1 + \frac{2}{\log \log n}\right).$$

Preuve.

Pour démontrer ce théorème, il suffit, grâce à la proposition III.5.1, de trouver pour chaque k l'ensemble des x tels que

$$1 + \frac{2{,}9502}{\log x} + \frac{1{,}61}{\nu_2 x^{1-\nu_2}} + \frac{2{,}19\,(k-1)}{\nu_3^2\, x^{1-\nu_3} \log k} \le 2.$$

Soit A tel que l'on ait $x = \log n > \exp\left(\dfrac{\log^2 k + A \log k}{\log 2 - \frac{1}{k}}\right)$. Ceci implique que $(1-\nu_2)\log x \ge \log k + A$, et donc que $x^{(1-\nu_2)} \ge k e^A$.

Nous obtenons $(1-\nu_2)\log \dfrac{2k}{k-1} = (1-\nu_3)\log \dfrac{3k}{k-2}$,

$$\text{d'où} \quad (1-\nu_3)\log x \ \ge \ \frac{\log \frac{2k}{k-1}}{\log \frac{3k}{k-2}} (\log k + A).$$

Par conséquent, on a

$$\frac{2{,}9502}{\log x} + \frac{1{,}61}{\nu_2 x^{1-\nu_2}} + \frac{2{,}19\,(k-1)}{\nu_3^2 \log k\; x^{1-\nu_3}} \le$$

$$\frac{2{,}9502\,(\log k - \log \frac{k+1}{2})}{(\log k + A)\log k} + \frac{1{,}61 \log k}{\log \frac{k+1}{2}\, k\, e^A} + \frac{2{,}19\,(k-1)\log k}{\log^2 \frac{k+2}{3} \exp\left(\dfrac{\log \frac{3k}{k+2}}{\log \frac{2k}{k+1}} (\log k + A)\right)}$$

$$\le \frac{2{,}9502\,(\log k - \log \frac{k+1}{2})}{\log(ak)\log k} + \frac{1{,}61 \log k}{k\, a \log \frac{k+1}{2}} + \frac{2{,}19\, k^{1 - \frac{\log 3k - \log (k+2)}{\log 2k - \log (k+1)}} \log k}{\log^2 \frac{k}{3}\; a^{\frac{\log 3k - \log (k+2)}{\log 2k - \log (k+1)}}} \tag{7}$$

où $a = e^A$.

Appelons f(k) la fonction du second membre de l'inégalité (7) : le lemme III.6.1 ci-dessous nous permet de conclure.

Étant donné que l'on connaît, grâce aux résultats expérimentaux, les valeurs de $\lambda_1(k)$ et de $\lambda_2(k)$ pour k allant de 2 à 25, il suffit donc de trouver a convenable pour k supérieur ou égal à 26, donc a tel que :

$$\frac{2{,}9502\,(\log 26 - \log \frac{27}{2})}{\log(26a)\log 26} + \frac{1{,}61 \log 26}{26 \log \frac{27}{2}\, a} + \frac{2{,}19\,.\,26^{1 - \frac{\log 78 - \log 28}{\log 52 - \log 27}} \log 26}{\log^2 \frac{26}{3}\, a^{\frac{\log 78 - \log 28}{\log 52 - \log 27}}} \leq 1.$$

On trouve alors $a = 0{,}543617$, soit $A = -0{,}609511$.
Il suffit de vérifier ensuite, grâce aux résultats expérimentaux, la validité de la formule énoncée dans le théorème, pour $13 \leq k \leq 25$. ■

Lemme III.6.1.

f est une fonction décroissante de k.

Preuve.

Démontrons que chacun des termes de f est décroissant :

- *Premier terme :*

$$\frac{2{,}9502}{\log (ak)} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{\log\frac{k+1}{2}}{\log k}$$ sont décroissante en fonction de k..

donc $$\frac{2{,}9502\,(\log k - \log \frac{k+1}{2})}{\log(ak)\log k}$$ est décroissante suivant k.

- *Second terme :*

$\frac{\log k}{k}$ et $\frac{1}{\log \frac{k+1}{2}}$ sont décroissantes, par suite, $\frac{1{,}61 \log k}{k\, a \log \frac{k+1}{2}}$ est donc décroissante en fonction de k.

- *Troisième terme :*

$\dfrac{\log k}{\log^2(k/3)}$ est décroissante pour tout k entier, et, comme

$$k^2 > 1$$
$$3k^2 + 3 > k^2 + 4$$
$$\frac{3k}{k+2} > \frac{2k}{k+1}$$
$$\log\frac{3k}{k+2} > \log\frac{2k}{k+1},$$

les deux fonctions suivantes sont décroissantes :

$$a^{-\frac{\log 3k - \log(k+2)}{\log 2k - \log(k+1)}} \quad \text{et} \quad k^{1-\frac{\log 3k - \log(k+2)}{\log 2k - \log(k+1)}}.$$

Étant le produit de trois fonctions décroissantes de même signe,

$$\frac{2{,}19\, k^{1-\frac{\log 3k - \log(k+2)}{\log 2k - \log(k+1)}} \log k}{\log^2 \frac{k}{3}\; a^{\frac{\log 3k - \log(k+2)}{\log 2k - \log(k+1)}}}$$ est également décroissante pour tout k entier naturel.

Ceci termine la démonstration du lemme III.6.1. ■

Preuve du théorème III.1.1.

Cherchons β tel que, pour tout k supérieur ou égal à 26,

$$\frac{\log^2 k - 0{,}609511 \log k}{\log 2 - \frac{1}{k}} \leq \beta \log^2 k,$$

$$\text{soit} \quad g(k) = \frac{1 - \frac{0{,}609511}{\log k}}{\log 2 - \frac{1}{k}} \leq \beta.$$

La dérivée de g est positive si $0{,}609511 \log 2 > \dfrac{\log^2 k}{k}$.

Dès que $k \geq 19$, g'(k) est positive, donc f est croissante, par conséquent

$$\beta = \lim_{k \to +\infty} \frac{1 - \frac{0{,}609511}{\log k}}{\log 2 - \frac{1}{k}} = \frac{1}{\log 2}.$$

Ceci implique la première inégalité du théorème, puisque le résultat est vrai pour $11 \leq k \leq 25$ grâce aux résultats expérimentaux.

Comme $\log n > \exp\left(\frac{\log^2 k}{\log 2}\right)$, on a

$$1 + \frac{2}{\log \log n} < 1 + \frac{2 \log 2}{\log^2 k} < \frac{5}{4},$$

ce qui donne la deuxième inégalité du théorème III.1.1. ■

III.7. DÉMONSTRATION DU THEOREME III.1.2

Dans ce qui suit, on suppose $k \geq 26$. Pour $k \leq 25$, on utilise directement les résultats expérimentaux pour vérifier le théorème.

Soit ε tel que N_ε, le nombre k-hautement composé supérieur associé à ε, maximise $\lambda_1(k) = \underset{N \in \mathbb{N}}{\mathrm{Max}}\ \Lambda_1(k,N)$.

a) Si $\log \log N_\varepsilon > \frac{\log^2 k}{\log 2}$ alors $\lambda_1(k) < \frac{5}{4}$ (d'après le théorème III.1.1).

b) Si $\log \log N_\varepsilon < \Gamma \log k$, avec $\Gamma = 1{,}65$,

$$\lambda_1(k) = \Lambda_1(k,N_\varepsilon) = \frac{\log d_k(N_\varepsilon) \log \log N_\varepsilon}{\log k \log N_\varepsilon} \leq \frac{\log \log N_\varepsilon}{\log 2} \leq \Gamma \frac{\log k}{\log 2}$$

$$\left(\text{car } \log d_k(N) \leq \Omega(N) \log k \leq \frac{\log k \log N_\varepsilon}{\log 2}\right)$$

c) Si $\Gamma \log k \leq \log \log N_\varepsilon \leq \frac{\log^2 k}{\log 2}$,

d'après le lemme III.3.2, on sait que $\lambda_1(k) = \frac{1}{\log x} \frac{(\log \log N_\varepsilon)^2}{\log \log N_\varepsilon - 1}$ avec $x = k^{1/e}$

ce qui implique que $\lambda_1(k) < \frac{1}{\log x} \frac{1}{\log^2 2} \frac{\log^4 k}{\frac{\log^2 k}{\log 2} - 1}$

car $\log \log N_\varepsilon \leq \frac{\log^2 k}{\log 2}$ et $\frac{(\log \log N)^2}{\log \log N - 1}$ croît dès que $\log \log N > 2$.

Nous allons montrer en fait que $\frac{1}{\log x}\ \frac{1}{\log^2 2}\ \frac{\log^4 k}{\log^2 k - \log 2} < \Gamma\ \frac{\log k}{\log 2}$.

Ceci signifie que $\log x > \frac{1}{\Gamma}\ \frac{\log^3 k}{\log^2 k - \log 2}$, d'où $\varepsilon < \varepsilon' = \Gamma \frac{\log^2 k - \log 2}{\log^2 k}$

$= \Gamma\left(1 - \frac{\log 2}{\log^2 k}\right)$.

On a $\log N_{\varepsilon'} = \sum_{i=1}^{I} \theta(x'^{\nu_i})$

avec $\log x' = \frac{1}{\Gamma}\ \frac{\log^3 k}{\log^2 k - \log 2}$ et $I = \left[\frac{k-1}{2^{\varepsilon'} - 1}\right] < \frac{k}{2^{\Gamma\left(1 - \frac{\log 2}{\log^2 k}\right)} - 1}$.

On pose $d = \frac{1}{2^{\Gamma\left(1 - \frac{\log 2}{\log^2 k}\right)} - 1} < 0.532$, donc $I < dk$.

Par conséquent, $\log N_{\varepsilon'} < I\,\theta(x')$ (car pour tout i, $x^{\nu_i} < x$)

$< dk\,\alpha\,x'$ (car $\theta(x) < \alpha\,x$ pour tout x, avec $\alpha = 1{,}01624$ ([RS62])

$< 0.532\ k\,.\,k^{\left(\frac{1}{\Gamma}\ \frac{\log^2 k}{\log^2 k - \log 2}\right)} < 0.532\ k^{1.6484}$.

On a donc $\log N_{\varepsilon'} < k^{\Gamma} \leq \log N_{\varepsilon}$ d'où $N_{\varepsilon'} < N_{\varepsilon}$ ce qui implique $\varepsilon < \varepsilon'$.

On procède différemment pour la seconde majoration.

* Si $\log n < \exp\left(\frac{\log^2 k}{\log 2}\right)$ alors $\frac{\log^2 k}{\log 2\ \log\log n} > 1$.

$$\frac{(\log\log n)^2 \log d_k(n)}{\log k \log n} - \log\log n = \log\log n\left(\frac{\log\log n \log d_k(n)}{\log k \log n} - 1\right).$$

En majorant $\log\log n$ par $\frac{\log^2 k}{\log 2}$ et $\log d_k(n)$ par $\frac{\Gamma}{\log 2}\log^2 k\,\frac{\log n}{\log\log n}$, on obtient

$$\log\log n\left(\frac{\log\log n \log d_k(n)}{\log k \log n} - 1\right) < \frac{\log^2 k}{\log 2}\left(\Gamma\,\frac{\log k}{\log 2} - 1\right) < \frac{\log^3 k}{\log^2 2}.$$

* Si $\log n \geq \exp\left(\frac{\log^2 k}{\log 2}\right)$ et $k \geq 11$,

$$\log d_k(n) < \log k \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \frac{2}{\log\log n}\right) < \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \Gamma \frac{\log^3 k}{\log^2 k} \frac{1}{\log\log n}\right),$$

d'après le théorème III.1.1.

Si $2 < k < 11$, il suffit de vérifier expérimentalement, et l'on obtient la seconde partie du théorème.

Chapitre IV

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS $d_k(n)$

Dans ce chapitre, nous montrons que pour k suffisamment grand fixé, les fonctions $\Lambda_1(n,k)$ et $\Lambda_2(n,k)$, définies au troisième chapitre, ont pour maxima des nombres respectivement de la forme $2^a.3^b$ et $2^a.3^b.5^c.7^d$. On en déduit des équivalents de $\lambda_1(k)$ et de $\lambda_2(k)$:

$$\lambda_1(k) \sim \frac{\log k}{4 \log 2} \quad \text{et} \quad \lambda_2(k) \sim \frac{4 \log^2 k}{27 \log 2}$$

Nous avons vu dans le premier chapitre que les fonctions $d_k(n)$ peuvent être définies grâce à la fonction ζ de Riemann, ce qui permet de définir $d_k(n)$ pour k réel ou complexe. A partir de cette définition, on obtient une majoration élémentaire du module de $d_k(n)$, ainsi qu'une majoration pour k réel.

IV.1. <u>$\lambda_1(k)$ ET $\lambda_2(k)$ A L'INFINI</u>

Començons par étudier la forme des entiers maximisant $\Lambda_1(n,k)$ et $\Lambda_2(n,k)$ pour k fixé suffisamment grand.

<u>Théorème IV.1.1.</u>

Pour k suffisamment grand, le nombre N_ε k-hautement composé supérieur maximisant $\Lambda_1(n,k)$ est atteint pour $\varepsilon = \frac{\log k}{\log 4}$.

Il est alors de la forme $N_\varepsilon = 2^{I_1} . 3^{I_2}$ avec $I_1 = \left[\frac{k - 1}{\sqrt{k} - 1}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 3 / \log 4} - 1}\right]$.

<u>Théorème IV.1.2.</u>

Pour k suffisamment grand, le nombre N_ε k-hautement composé supérieur maximisant $\Lambda_2(n,k)$ est atteint pour $\varepsilon = \frac{\log k}{\log 8}$.

Il est de la forme $N_\varepsilon = 2^{I_1} . 3^{I_2} . 5^{I_3} . 7^{I_4}$ avec $I_1 = \left[\frac{k - 1}{\sqrt[3]{k} - 1}\right]$, $I_2 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 3 / \log 8} - 1}\right]$,

$$I_3 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 5 / \log 8} - 1}\right] \quad \text{et} \quad I_4 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 7 / \log 8} - 1}\right].$$

On peut déduire directement des équivalents de $\lambda_1(k)$ et de $\lambda_2(k)$ à partir des théorèmes précédents :

Théorème IV.1.3.

$$\lambda_1(k) \sim \frac{\log k}{4 \log 2}$$

et

$$\lambda_2(k) \sim \frac{4 \log^2 k}{27 \log 2}.$$

Preuve du théorème IV.1.1.

D'après le lemme III.3.2, si N_ε est le nombre k-hautement composé supérieur maximisant $\Lambda_1(k,n)$ pour n entier, alors pour tout N, on aura

$$\Lambda_1(k,N) \leq \lambda_1(k) = \frac{1}{\log x} \frac{(\log \log N_\varepsilon)^2}{\log \log N_\varepsilon - 1}.$$

Or $\log N_\varepsilon = \sum_{i=1}^{I} \theta\left(x^{v_i}\right) < I \alpha x$ (car $\theta(x) < \alpha x$ pour tout x, avec $\alpha = 1{,}01624$ [RS62]).

$$x = k^{1/e}$$

$$I = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 2 / \log x} - 1}\right] < \beta\, k^{1 - \frac{\log 2}{\log x}} < \beta k$$

On a $\alpha \beta < e$.

Nous obtenons $\log N_\varepsilon < e\, k^{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$, ce qui implique que $\log \log N_\varepsilon < 1 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \log k$.

$$\lambda_1(k) \leq \frac{1}{\log x} \frac{(1 + \log k + \log x)^2}{\log k + \log x} \quad \text{(car la fonction } t \to \frac{t^2}{t - 1} \text{ croît dès que } t > 2)$$

$$\leq \frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{\log k + \log x} + 2 + \log k + \log x\right)$$

Soit maintenant $J = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 2 / \log 3} - 1}\right] \sim k^\beta$, avec $\beta = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}$,

alors $\lambda_1(k) \geq \Lambda_1(k,2^J) = \frac{\log d_k(2^J) \log\log 2^J}{\log k \log 2^J}$;

comme $J \sim k^\beta$, on a $\log 2^J \sim k^\beta \log 2$ et $\log\log 2^J \sim \beta \log k$;

$$\log d_k(2^J) \sim \log \binom{k + k^\beta - 1}{k - 1} \sim k \log \frac{k + k^\beta}{k} + k^\beta \log \frac{k + k^\beta}{k^\beta}$$

$$\sim k^\beta (1 - \beta) \log k$$

d'où $\Lambda_1(k,2^J) \sim \frac{(1 - \beta)\, \beta \log k}{\log 2}$.

On en déduit que, pour k suffisamment grand,

$$\lambda_1(k) \geq \left(\frac{1}{\log 3} - \frac{\log 2}{\log^2 3}\right) \log k > \frac{1}{3} \log k.$$

On a donc, pour $k > K_0$ grand,

$$\frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{\log k + \log x} + 2 + \log k + \log x\right) > \frac{1}{3} \log k.$$

Pour $k \geq 10^{75}$, il faut avoir $\log x < 3{,}1$ pour que l'inégalité soit vérifiée.

Cela signifie que pour k grand, c'est-à-dire $k > \max(K_0, 10^{75})$, le maximum sur $\mathbb{N}$ de $\Lambda_1(k,N)$ ne peut être atteint que pour $\log x < 3{,}1$, soit $x < e^{3,1}$ # 22,2 : seuls les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 peuvent donc intervenir dans la décomposition en facteurs premiers de N_ε.

Soit $x' < 22{,}2$. On appelle $N_{(x')}$ le nombre k-h. c. s. associé à $\varepsilon' = \frac{\log k}{\log x'}$, alors

$N_{(x')} = 2^{I'_1} . 3^{I'_2} . 5^{I'_3} . 7^{I'_4} . 11^{I'_5} . 13^{I'_6} . 17^{I'_7} . 19^{I'_8}$

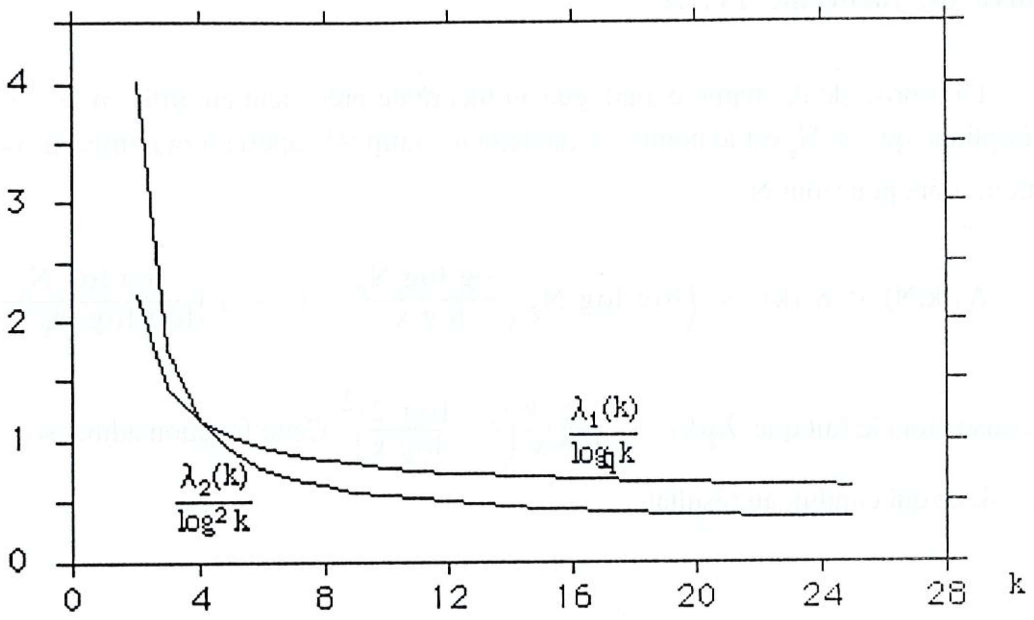
$$\text{avec} \quad I'_i = \left[\frac{k - 1}{k^{1 - \frac{\log p_i}{\log x'}}}\right] \quad \text{si } x' \geq p_i,$$

$$= 0 \qquad \text{sinon.}$$

$I'_1 \sim k^{1 - \frac{\log p_i}{\log x'}}$. Posons $\beta_i = 1 - \frac{\log p_i}{\log x'}$.

k	$\lambda_1(k)$	$\dfrac{\lambda_1(k)}{\log k}$	$\lambda_2(k)$	$\dfrac{\lambda_2(k)}{\log^2 k}$
2	1,537940	2,218778	1,934851	4,027139
3	1,591410	1,448564	2,108741	1,747167
4	1,633729	1,178486	2,262774	1,177417
5	1,671436	1,038522	2,397857	0,925710
6	1,702925	0,952421	2,516797	0,783951
7	1,729944	0,889015	2,623119	0,692743
8	1,754853	0,843906	2,720396	0,629128
9	1,778192	0,809290	2,811159	0,582286
10	1,799313	0,781432	2,896447	0,540364
11	1,819757	0,758899	2,975690	0,517521
12	1,838195	0,739784	3,051010	0,494110
13	1,855306	0,723330	3,122778	0,474661
14	1,871651	0,709212	3,190852	0,458151
15	1,888000	0,697180	3,256273	0,444025
16	1,902959	0,686340	3,319475	0,431816
17	1,916874	0,676572	3,379595	0,421023
18	1,930498	0,667606	3,437606	0,411480
19	1,943268	0,659979	3,493201	0,402920
20	1,955274	0,652686	3,546798	0,395212
21	1,967050	0,646095	3,598219	0,388194
22	1,978588	0,640104	3,647277	0,381732
23	1,989525	0,634517	3,695379	0,375878
24	1,999960	0,629303	3,741739	0,376468
25	2,010263	0,624523	3,787142	0,366513
239	2,635362	0,481216		
240	2,636632	0,481081		
52745	4,431465	0,407558		
∞	-	0,360673	-	0,213733

Tableau IV.1



Représentation de $\frac{\lambda_1(k)}{\log k}$ *et de* $\frac{\lambda_2(k)}{\log^2 k}$ *en fonction de k.*

$$\Lambda_1(k,N_{(x')}) \sim \frac{\left[\log\binom{k+I'_1-1}{k-1}+\ldots+\log\binom{k+I'_8-1}{k-1}\right]\log\left(I'_1\log 2+\ldots+I'_8\log 19\right)}{\log k\left(I'_1\log 2+\ldots+I'_8\log 19\right)}$$

$$\sim \frac{\left(k^{\beta_1}(1-\beta_1)\log k+\ldots+k^{\beta_8}(1-\beta_8)\log k\right)\log\left(k^{\beta_1}\log 2+\ldots+k^{\beta_8}\log 19\right)}{\log k\left(k^{\beta_1}\log 2+\ldots+k^{\beta_8}\log 19\right)}$$

$$\sim \frac{k^{\beta_1}(1-\beta_1)\log k\log\left(k^{\beta_1}\log 2\right)}{\log k\, k^{\beta_1}\log 2}$$

$$\sim \frac{(1-\beta_1)\,\beta_1\log k}{\log 2}$$

$$= \frac{1}{\log x'}\left[1-\frac{\log 2}{\log x'}\right]\log k.$$

La fonction $X \rightarrow \frac{1}{X}\left[1-\frac{\log 2}{X}\right]$ est croissante dès que $X < 2\log 2$.

Par conséquent, le maximum de $\Lambda_1(k,N_{(x')})$ pour k grand sera atteint pour $x' = 4$. ■

Preuve du théorème IV.1.2.

L'on procède de manière analogue au théorème précédent en utilisant le lemme III.3.6 qui implique que, si N_ε est le nombre k-hautement composé supérieur maximisant $\Lambda_2(k,n)$ pour n entier, alors pour tout N,

$$\Lambda_2(k,N) < \lambda_2(k) = \left(\log \log N_\varepsilon \left(\frac{\log \log N_\varepsilon}{\log x} - 1\right) + 1\right)\frac{\log \log N_\varepsilon}{\log \log N_\varepsilon - 2}.$$

On utilise alors le fait que $\lambda_2(k) \sim \frac{\log^2 k}{\log x}\left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)^2$. Cette fonction admet son maximum en x = 8, ce qui conduit au résultat. ■

Preuve du théorème IV.1.3

Puisque $\lambda_1(k)$, pour k suffisamment grand, est atteint pour $N_\varepsilon = 2^{I_1} . 3^{I_2}$ avec $I_1 = \left[\frac{k - 1}{\sqrt{k} - 1}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 3 / \log 4} - 1}\right]$, on a

$$\lambda_1(k) \sim \frac{\log k}{4 \log 2} \quad \# \; 0{,}36067 \log k.$$

Puisque $\lambda_2(k)$, pour k suffisamment grand, est atteint pour $N_\varepsilon = 2^{I_1} . 3^{I_2} . 5^{I_3} . 7^{I_4}$ avec $I_1 = \left[\frac{k - 1}{\sqrt[3]{k} - 1}\right]$, $I_2 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 3 / \log 8} - 1}\right]$, $I_1 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 5 / \log 8} - 1}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{k - 1}{k^{\log 7 / \log 8} - 1}\right]$, on a

$$\lambda_2(k) \sim \frac{4 \log^2 k}{27 \log 2} \quad \# \; 0{,}213733 \log^2 k.$$

■

IV.2. <u>LES FONCTIONS $d_k(n)$ POUR k RÉEL OU COMPLEXE</u>

a) Définition de $d_k(n)$ pour k complexe.

Les fonctions $d_k(n)$ peuvent donc être définies à partir de la fonction ζ de Riemann donnée par la formule $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, grâce à la relation

$$\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}.$$

En effet, $\zeta(s)^k = \prod_p \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^k} = \prod_p \sum_{a=0}^{+\infty} \frac{d_k(p^a)}{p^{as}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_k(n)}{n^s}.$

Or pour tout k complexe, on a

$$\frac{1}{(1-x)^k} = 1 + kx + \ldots + \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+\alpha-1)}{\alpha!} x^\alpha + \ldots .$$

Par identification dans la formule précédente, il suffit alors de poser pour k complexe, a premier et pour tout p premier,

$$d_k(p^\alpha) = \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+\alpha-1)}{\alpha!}$$

dk(n) est multiplicative.

On vérifie aisément que si l'on se restreint à k entier positif, on retrouve la définition de $d_k(n)$ vue au premier chapitre.

Pour certaines valeurs de k, nous pouvons retrouver des fonctions connues :

$d_0(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\qquad d_0(n) = \delta(n)$, avec $\delta(n)$ identité pour le produit de convolution.

$d_1(n) = 1$, pour tout n.

$$d_{-1}(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ (-1)^{\omega(n)} \text{ si n est sans facteur carré} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$d_{-k}(n) = \mu_k(n) = \prod_{i=1}^{r} (-1)^{a_i} \binom{k}{a_i}$ lorsque $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$, pour k positif. Celles-ci furent étudiées par A. Fleck [DI71b].

b) Majoration élémentaire du module de $d_k(n)$.

Il est facile d'établir une majoration simple du module de $d_k(n)$:

<u>**Proposition IV.2.1.**</u>

Pour tout k complexe et pour tout n entier,

$$|d_k(n)| \leq d_{|k|}(n).$$

Preuve.

$$|d_k(p^\alpha)| = \left|\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+\alpha-1)}{\alpha!}\right| = \frac{|k||k+1||k+2|\ldots|k+\alpha-1|}{\alpha!}$$
$$\leq \frac{|k|(|k|+1)(|k|+2)\ldots(|k|+\alpha-1)}{\alpha!} = d_{|k|}(p^\alpha).$$

soit, pour tout k complexe et pour tout n entier, $|d_k(n)| \leq d_{|k|}(n)$. ■

c) Une majoration de $d_k(n)$ pour k réel positif.

<u>**Proposition IV.2.1.**</u>

Pour tout k réel positif et pour tout n,

$$\log d_k(n) \leq \log n + 2k \log\log n.$$

Preuve.

D'après la relation définissant les fonctions $d_k(n)$ à partir de la fonction ζ nous avons :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^k} = \sum_{a=0}^{+\infty} \frac{d_k(p^a)}{p^{as}}.$$

On peut en déduire
$$\frac{d_k(p^a)}{p^{as}} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^k},$$

soit
$$\log d_k(p^a) \leq a\, s \log p - k \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Le second terme sera minimum pour s = 1 :

$$\log d_k(n) \le \sum_{p_i^{a_i} \| n} \left[a_i \log p_i - k \log\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right]$$

$$\log d_k(n) \le \log n - \sum_{p_i^{a_i} \| n} k \log\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\le \log n + k \sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} \log\left(\frac{p}{p-1}\right).$$

Or $\log\left(\frac{p}{p-1}\right) < \frac{1}{p-1}$.

Pour tout p, $\frac{1}{p-1} \le \frac{2}{p}$, donc $\sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p-1} \le 2 \sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p}$.

Mais, il vient $\sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \le \sum_{\substack{p \le \sqrt{n} \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p} \le \log \log \sqrt{n}$.

D'où $\sum_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{p-1} \le 2 \log \log n - 2 \log 2 < 2 \log \log n$.

On obtient $\log d_k(n) \le \log n + 2k \log \log n$ ■

Chapitre V

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES FONCTIONS $d_k(n)$ DANS LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

Nous allons maintenant appliquer la méthode que nous avons développée au cours du chapitre III, aux fonctions $d_{k;j,\ell}$, analogues aux fonctions d_k, mais ne faisant intervenir que les nombres premiers d'une progression arithmétique, pour obtenir des majorations de ces fonctions.

Nous donnons au paragraphe 2 un ordre maximal de ces fonctions, puis nous définissons les nombres k-(j,ℓ)-hautement composés supérieurs pour en déduire des majorations, de manière analogue à $d_k(n)$.

En utilisant les mêmes propriétés, nous affinons ces résultats pour le cas des progressions arithmétiques de raison 3.

V.1. DÉFINITION DE $d_{k;j,\ell}(n)$

On pose pour $(j,\ell) = 1$,

$$d_{k;j,\ell}(n) = \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p \equiv \ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} \binom{k+\alpha-1}{k-1}$$

$d_{k;j,\ell}$ est une fonction multiplicative.

C'est une généralisation de $d_k(n)$, puisque

$$d_k(n) = d_{k;1,0}(n).$$

Nous allons appliquer à ces fonctions la méthode qui nous a permis de trouver des majorations de $d_k(n)$.

V.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $d_{k;j,\ell}(n)$

Commençons par chercher le comportement asymptotique des fonctions $d_{k;j,\ell}(n)$.

Définissons $\pi(x;j,\ell) = \sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} 1$ et $\theta(x;j,\ell) = \sum_{\substack{p\le x \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} \log p$

Soit $\varphi(j)$ la fonction d'Euler, c'est-à-dire le nombre d'entiers naturels plus petits que j et premiers avec lui,

Théorème V.2.1.

Un ordre maximal de $\log d_{k;j,\ell}(n)$ est $\dfrac{\log k \log n}{\log\log n}$.

Preuve.

Nous allons d'abord majorer $d_{k;j,\ell}(n)$:

$$d_{k;j,\ell}(n) = \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} \binom{k+\alpha-1}{k-1} \le \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p\le t}} \binom{k+\alpha-1}{k-1} \cdot \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p\le t}} k^\alpha,$$

pour tout paramètre t compris entre 2 et n.

$$d_{k;j,\ell}(n) \le \binom{k+\alpha-1}{k-1}^t \cdot \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p\le t}} k^{(\alpha\log p)/\log t}$$

$$\le \binom{k+\alpha-1}{k-1}^t \cdot \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p\equiv\ell \bmod j \\ p\le t}} k^{(\alpha\log p)/\log t} \le (1+\alpha)^{(k-1)t} \cdot \left(\prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha\right)^{\log k/\log t}$$

$$\le \left(1+\frac{\log n}{\log 2}\right)^{(k-1)t} \cdot \left(\prod_{p^\alpha \| n} p^\alpha\right)^{\log k/\log t}.$$

On obtient $\quad \log d_{k;j,\ell}(n) \le (k-1)t(2+\log\log n) + \dfrac{\log k \log n}{\log t}$.

En choisissant $t = \dfrac{\log n}{(\log\log n)^3}$, on a

$$\log d_{k;j,\ell}(n) \leq \frac{\log k \log n}{\log\log n}\left(1 + O\left(\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\right)\right). \qquad (1)$$

Il nous reste à trouver une minoration de log $d_{k;j,\ell}$ (n). Si l'on choisit les entiers de la forme $n_r = \prod_{\substack{i=1 \\ p\equiv j \bmod \ell}}^{r} p_i$, p_i désignant le $i^{\text{ième}}$ nombre premier, on a $\log d_{k;j,\ell}(n_r) = k^{\pi(p_r;j,\ell)}$. Donc

$$\log n_r = \theta(p_r; j,\ell) \leq \pi(p_r; j,\ell) \log p_r .$$

On obtient $\log d_{k;j,\ell}(n_r) \geq \dfrac{\log k \log n_r}{\log p_r}$.

Or, pour x grand, il existe t inférieur à 1 tel que $\theta(p_r; j,\ell) > \dfrac{t\, p_r}{\varphi(j)}$ (Cf [MC84a]).

Donc $\log p_r \leq \log\left(\dfrac{\varphi(j)}{t} \log n_r\right)$.

Ceci implique que

$$\log d_{k;j,\ell}(n_r) \geq \frac{\log k \log n_r}{\log\log n_r}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log n_r}\right)\right). \qquad (2)$$

(1) et (2) conduisent au résultat. ■

V.3. LES NOMBRES k-(j,ℓ)-HAUTEMENT COMPOSÉS SUPÉRIEURS

Nous généralisons maintenant les nombres k-h.c.s. pour les progressions arithmétiques puis nous en déduisons la forme de majorations des fonctions $d_{k;j,\ell}$ (n).

Définition V.3.1.

Un entier N est dit **k,(j,ℓ)-hautement composé supérieur**, s'il existe ε réel positif tel que la fonction $\dfrac{\log d_{k;j,\ell}(n)}{\log k} - \varepsilon \log n$ admette un maximum en n = N.

L'enveloppe convexe des points (log n, log $d_{k;j,\ell}$ (n)) est une ligne brisée concave dont les sommets on pour abscisses les valeurs de log N ou N est k,(j,ℓ)-h.c.s. Nous allons donc majorer $d_{k;j,\ell}$ (n) de la même manière que d_k (n).

On peut généraliser le programme de recherche des nombres k-h.c.s. pour ainsi trouver les nombres k,(j,ℓ)-h.c.s. (Cf annexe 2).

__Lemme V.3.1.__

Étant donné ε et $k \geq 2$, soit N_ε le nombre $k,(j,\ell)$-hautement composé supérieur associé à ε, alors

$$N_\varepsilon = \prod_{p \leq k^{1/\varepsilon}} p^{l(p,\varepsilon)}$$

$$\text{avec } l(p,\varepsilon) = \begin{cases} \left[\dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1}\right] \text{ si } \dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1} \notin \mathbb{N} \text{ et } p \equiv \ell \bmod j \\ \left[\dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1}\right] \text{ ou } \left[\dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1} - 1\right] \text{ si } \dfrac{k-1}{p^\varepsilon - 1} \in \mathbb{N} \text{ et } p \equiv \ell \bmod j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve.

Il suffit, comme pour le lemme II.3.3, d'appliquer le lemme II.3.2 à la fonction $g(n) = \dfrac{d_{k;j,l}(n)}{n^\varepsilon}$. ■

__Lemme V.3.2.__

Les nombres premiers p qui interviennent dans la décomposition de N_ε, à la puissance i sont tels que $x^{v_{i+1}} < p \leq x^{v_i}$, pour $p \equiv \ell \bmod j$.

Preuve.

La démonstration est identique à celle du lemme II.3.4, avec les mêmes notations. ■

__Lemme V.3.3.__

$$\log d_{k;j,\ell}(N_\varepsilon) - \varepsilon \log N_\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} G(x^{v_i}\,; j, \ell)$$

avec $G(x^{v_i}\,; j, \ell) = \pi(x^{v_i}\,; j, \ell) \log x^{v_i} - \theta(x^{v_i}\,; j, \ell)$

Preuve.

La démonstration est identique à celle du théorème II.3.1. ■

__Théorème V.3.1.__

Pour tout n entier, $\log d_{k;j,\ell}(n) \leq \log k \dfrac{\log n}{\log\log n}\left(1 + \dfrac{1}{\log n}\sum_{i=1}^{I} G(\log^{v_i} n; j, \ell)\right)$

avec $I = \left\lceil \dfrac{k-1}{\dfrac{\log k}{2^{\log\log n}} - 1} \right\rceil$ et $\nu_i = \log \dfrac{i+k-1}{i} \Big/ \log k$,

Preuve.

$$\log d_{k;j,\ell}(n) - \varepsilon \log n \leq \log d_{k;j,\ell}(N) - \varepsilon \log N$$

$$\text{donc } \log d_{k;j,\ell}(n) \leq \varepsilon \left(\log n + \sum_{i=1}^{I} G(x^{\nu_i}; j, \ell) \right).$$

On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{\log k}{\log\log n}$ dans le lemme précédent pour conclure. ∎

V.4. MAJORATION DE $d_{k;j,\ell}(n)$

Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème V.4.1.

Pour tout n tel que $\log\log n \geq c \log^2 j$ et pour tout $j \geq 10$, on a

$$d_{k;j,\ell}(n) \leq \log k \frac{\log n}{\log\log n} \left(1 + \frac{k-1}{\log k} \frac{2}{\varphi(j)} \left(\frac{1}{\log\log n} + \frac{4,9 + B(j)}{(\log\log n)^2} \right) \right)$$

avec $B(j) = 0,784\,(\varphi(j) - 2)\,(\log c + 2 \log\log j) \log (\log c + 2 \log\log j)$
et c donné par McCurley [MC84] p 266.

On peut choisir, par exemple, pour tout $j \geq 10$, $c = 34,13$ et pour tout $j \geq 100$, $c = 20,62$.

Soit $x(j) = \exp(c \log^2 j)$.
McCurley a montré ([MC84a]) que pour tout $x \geq x(j)$, $\theta(x; j, \ell) \leq \dfrac{2x}{\varphi(j)}$.

Lemme V.4.1.

Pour tout $x \geq x(j)$, on a

$$\pi(x; j, \ell) \leq \frac{2}{\varphi(j)} \left(\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2,95x}{\log^3 x} \right) + \left(1 - \frac{2}{\varphi(j)} \right) \left(\frac{x(j)}{\log^2 x(j)} + \frac{2,95x(j)}{\log^3 x(j)} \right).$$

Preuve.

$$\pi(x; j, \ell) = \frac{\theta(x;j,\ell)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t;j,\ell)}{t\log^2 t}\,dt\,.$$

Donc, si $x \geq x(j)$, on obtient

$$\pi(x; j, \ell) \leq \frac{2}{\varphi(j)}\frac{x}{\log x} + \int_2^{x(j)} \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt + \frac{2}{\varphi(j)}\int_{x(j)}^{x} \frac{dt}{\log^2 t}.$$

D'après le lemme III.5.2, $\displaystyle\int_2^{x(j)} \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}\,dt = \frac{G(x(j))}{\log x(j)} \leq \frac{x(j)}{\log^2 x(j)} + \frac{2,95x(j)}{\log^3 x(j)}$, ce qui conduit au lemme. ■

Posons $F(j) = \left(1 - \dfrac{2}{\varphi(j)}\right)\left[\dfrac{x(j)}{\log^2 x(j)} + \dfrac{2,95x(j)}{\log^3 x(j)}\right]$

et $A(L;j,\ell) = \displaystyle\sum_{m=2}^{L-1}\left[\pi(m;j,\ell)\left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1\right)\right].$

Lemme V.4.2.

Pour tout $x \geq x(j)$, on a

$$A(L;j,\ell) \leq \frac{2}{\varphi(j)}\left(\frac{L}{\log^2 L} + \frac{(4,9 + B(j))L}{\log^3 L}\right)$$

avec $B(j) = 0,784\,(\varphi(j) - 2)\,(\log c + 2\log\log j)\log(\log c + 2\log\log j)$ et c donné par McCurley [MC84a] p 266.

Preuve.

$$A(L;j,\ell) = \sum_{m=2}^{[x(j)]-1}\left[\pi(m;j,\ell)\left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1\right)\right] + \sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\left[\pi(m;j,\ell)\left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1\right)\right].$$

$$\sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\left[\pi(m;j,\ell)\left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1\right)\right] \leq \sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\frac{\pi(m;j,\ell)}{m\log m}$$

$$\leq \frac{2}{\varphi(j)}\left(\sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\frac{1}{\log^2 m} + \sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\frac{1}{\log^3 m} + \sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\frac{2,95}{\log^4 m}\right) + F(j)\sum_{m=[x(j)]}^{L-1}\frac{1}{m\log m}$$

$$\leq \frac{2}{\varphi(j)}\int_{[x(j)]}^{L-1}\left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{\log^3 x} + \frac{2,95}{\log^4 x}\right)dx + F(j)\int_{[x(j)]}^{L-1}\frac{dx}{x\log x}$$

On utilise le théorème V.3.1 et le lemme V.4.3 pour conclure.

V.5. MAJORATION DE $d_{k;3,\ell}(n)$

Grâce aux majorations de McCurley [MC84b], nous pouvons obtenir des majorations plus précises pour j = 3.

Théorème V.5.1.

Pour tout n ≥ exp (884),

$$\log d_{k;3,2}(n) \leq \log k \frac{\log n}{\log \log n}\left(1 + \frac{k-1}{\log k}\frac{1}{\log \log n}\right).$$

Théorème V.4.2.

Pour tout n ≥ 2,

$$\log d_{k;3,2}(n) \leq \log k \frac{\log n}{\log \log n}\left(1 + \frac{13}{10}\frac{k-1}{\log k}\frac{1}{\log \log n}\right),$$

$$\log d_{k;3,1}(n) \leq \log k \frac{\log n}{\log \log n}\left(1 + \frac{4}{5}\frac{k-1}{\log k}\frac{1}{\log \log n}\right).$$

$\ell = 1$	$\ell = 2$
7	2
91	4
1729	20
12103	40
375193	80
13882141	880
596932063	1760

Liste des premiers nombres 2-(3,ℓ)-h.c.s.

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder de manière analogue à la démonstration du théorème V.4.1 dans le cas particulier de j = 3 en remplaçant les résultats des lemmes V.4.1, V.4.2 et V.4.3 par les lemmes suivants.

Nous utiliserons les résultats de McCurley ([MC84b] p288) :

Pour tout x positif, $\theta(x;3,\ell) \leq \tau_\ell . x$ avec $\tau_2 = 0,5040354$ et $\tau_1 = 0,50933118$.

Lemme V.5.1.

Pour tout $x \geq e^{9,5} \# 13360$, on a

$$\pi(x;3,\ell) \leq \tau_\ell \left(\frac{x}{\log x} + \frac{4}{3} \frac{x}{\log^2 x} \right).$$

Preuve.

$$\pi(x;3,\ell) = \frac{\theta(x;3,\ell)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t;3,\ell)}{t \log^2 t} dt.$$

La majoration de McCurley nous permet d'écrire

$$\pi(x;3,\ell) \leq \tau_\ell \left(\frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \right) \leq \tau_\ell \left(\frac{x}{\log x} + \frac{4}{3} \frac{x}{\log^2 x} \right) \text{ pour tout } x \geq e^{9,5}.$$

Car, d'après le lemme III.5.1, pour tout $x \geq e^{9,5}$, $\mathrm{Li}(x) \leq \frac{x}{\log x} + \frac{4}{3} \frac{x}{\log^2 x}$. ■

Posons comme précédemment $A(L;3,\ell) = \sum_{m=2}^{L-1} \left[\pi(m;3,\ell) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \right]$.

Lemme V.5.2.

Pour tout $L \geq 884$,

$$A(L;3,2) \leq \frac{L}{\log^2 L};$$

Pour tout L,

$$A(L;3,2) \leq 1,254 \frac{L}{\log^2 L},$$

$$A(L;3,1) \leq \frac{4}{5} \frac{L}{\log^2 L}.$$

Preuve.

$$A(L;3,\ell) = \sum_{m=2}^{[e^4]-1} \left[\pi(m;3,\ell) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \right] + \sum_{m=[e^4]}^{L-1} \left[\pi(m;3,\ell) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \right].$$

$$\sum_{m=[e^4]}^{L-1} \left[\pi(m;3,\ell) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \right] \leq \sum_{m=[e^4]}^{L-1} \frac{\pi(m;3,\ell)}{m \log m}$$

$$\leq \tau_\ell \sum_{m=[e^4]}^{L-1} \left(\frac{1}{\log^2 m} + \frac{4}{3} \frac{1}{\log^3 m} \right)$$
$$\leq \tau_\ell \int_{e^4}^{L} \left(\frac{1}{\log^2 x} + \frac{4}{3} \frac{1}{\log^3 x} \right) dx$$
$$\leq \tau_\ell \big(f(L) - f(e^4) \big)$$

pour tout $L \geq e^{9,5}$ d'après le lemme précédent,
avec $f(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} + \frac{2}{3}\left(\mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} \right)$.

En constatant que $\tau_\ell f(e^4) > \sum_{m=2}^{[e^4]-1} \left[\pi(m;3,\ell) \left(\frac{\log(m+1)}{\log m} - 1 \right) \right] dx$, on obtient

$$A(L;3,\ell) \leq \tau_\ell \left(\frac{4}{3} \frac{L}{\log^2 L} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \frac{L}{\log^2 L} \right)$$
$$\leq \tau_\ell \frac{14}{9} \frac{L}{\log^2 L},$$

ceci pour tout $L \geq e^{9,5}$.

Pour $L < e^{9,5}$, on vérifie expérimentalement que :
pour tout $L \geq 884$, $A(L;3,2) \leq \frac{L}{\log^2 L}$,
pour tout L, $A(L;3,2) \leq 1,254 \frac{L}{\log^2 L}$ (le maximum de $\frac{\log^2 L}{L} A(L;3,2)$ est atteint pour $L = 64$),
pour tout L, $A(L;3,1) \leq 0,781 \frac{L}{\log^2 L}$ (le maximum de $\frac{\log^2 L}{L} A(L;3,1)$ est atteint pour $L = 905$).
Pour cette dernière inégalité, on voit que $0,781 < \frac{14}{9} \tau_1 < \frac{4}{5}$, d'où les résultats. ■

Lemme V.5.3.

Pour tout $x \geq 884$,
$$\sum_{i \geq 1} G(x^{\nu_i};3,2) \leq \frac{k-1}{\log k} \frac{x}{\log x};$$
pour tout L,
$$\sum_{i \geq 1} G(x^{\nu_i};3,2) \leq 1,254 \frac{k-1}{\log k} \frac{x}{\log x},$$
$$\sum_{i \geq 1} G(x^{\nu_i};3,1) \leq \frac{4}{5} \frac{k-1}{\log k} \frac{x}{\log x}.$$

Preuve.

Comme $\sum_{i\geq 1} G(x^{v_i};3,1) \leq \dfrac{k-1}{\log k} \log x \, A(x;3,1)$ (Cf lemme V.5.3), les inégalités du lemme se déduisent directement. ∎

Il ne reste plus qu'à combiner le lemme précédent et le théorème V.3.1 pour obtenir les majorations du théorème.

Annexe 1

ENCADREMENTS DE Li(x) ET DE Ei(x)

De nombreux problèmes font intervenir la fonction logarithme intégral. Aussi est-il intéressant de posséder des encadrements à la fois simples et précis de cette fonction. Ceux-ci se déduisent des comportements asymptotiques de Li(x) et de Ei(x), l'exponentielle intégrale..

A.1. INTRODUCTION

On désire donc trouver des encadrements du logarithme intégral défini par :

$$\text{pour tout } x > 1, \qquad Li(x) = \fint_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

où $\fint_0^x$ désigne la valeur principale de l'intégrale indéfinie.

Pour ce faire, on encadrera l'exponentielle intégrale Ei (x) définie par :

$$\text{pour tout } x > 0, \qquad Ei(x) = \fint_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$$

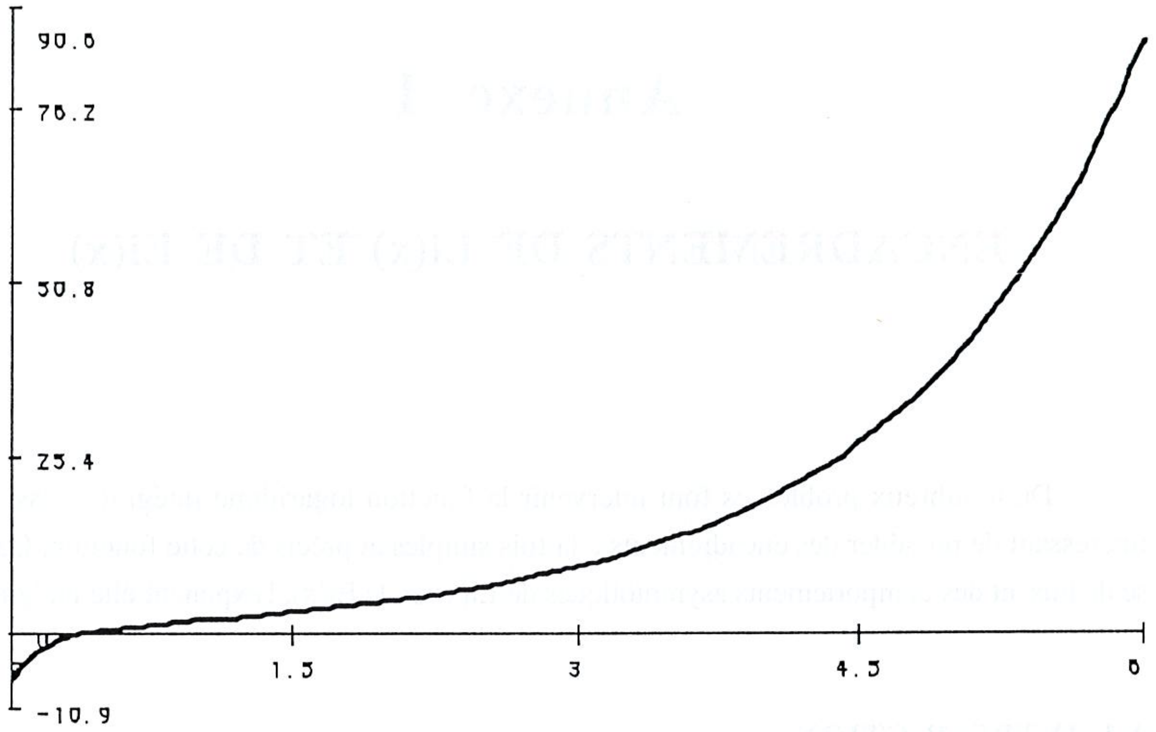
puisque, pour $x > 1$, $Li(x) = Ei(\log x)$ où $\log x$ désigne le logarithme népérien de x.

On peut généraliser la définition en posant, pour tout x négatif

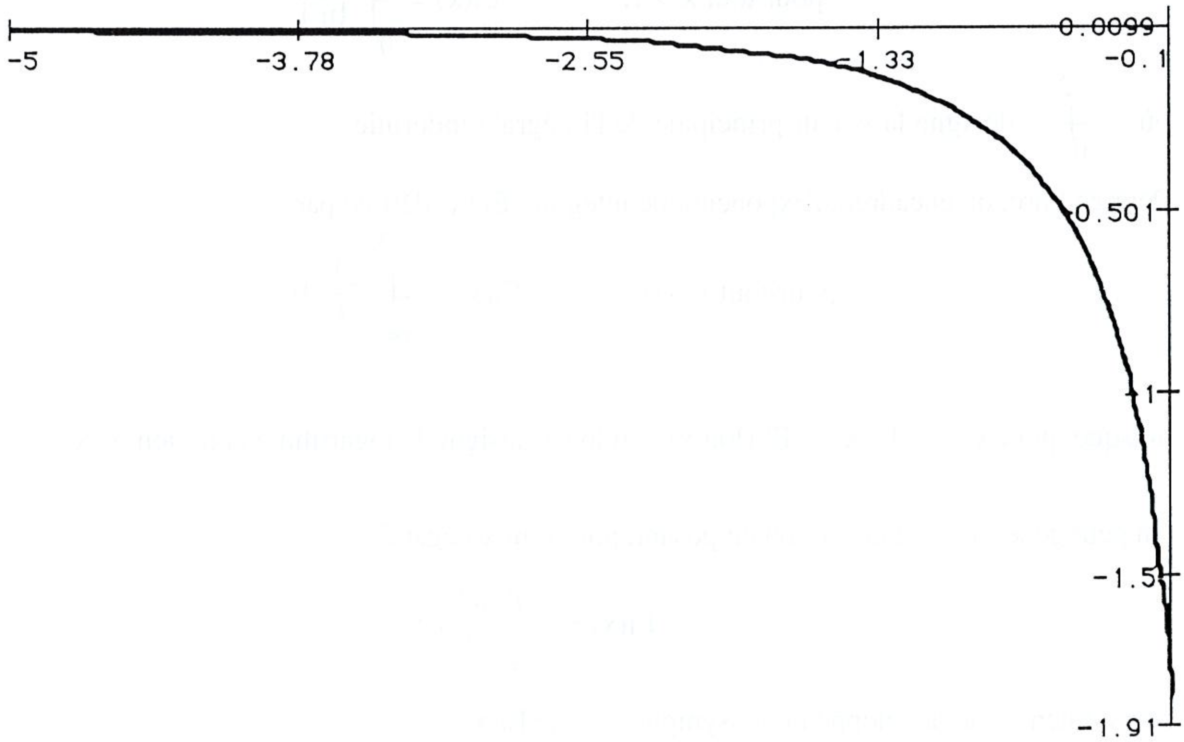
$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$$

Nous obtenons le développement asymptotique de Ei(x) :

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)!\, \frac{e^x}{x^k} + (K-1)! \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t^K}\, dt.$$



l'exponentielle intégrale pour x positif



l'exponentielle intégrale pour x négatif

Nous nous proposons de démontrer les résultats suivants :

Posons $\quad f_K(x) = \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + K! \left(\alpha_1 - 1 + \frac{1}{K} \right) \frac{e^x}{x^K}$

avec α_1 # 1,484081.

Théorème A.1.1.

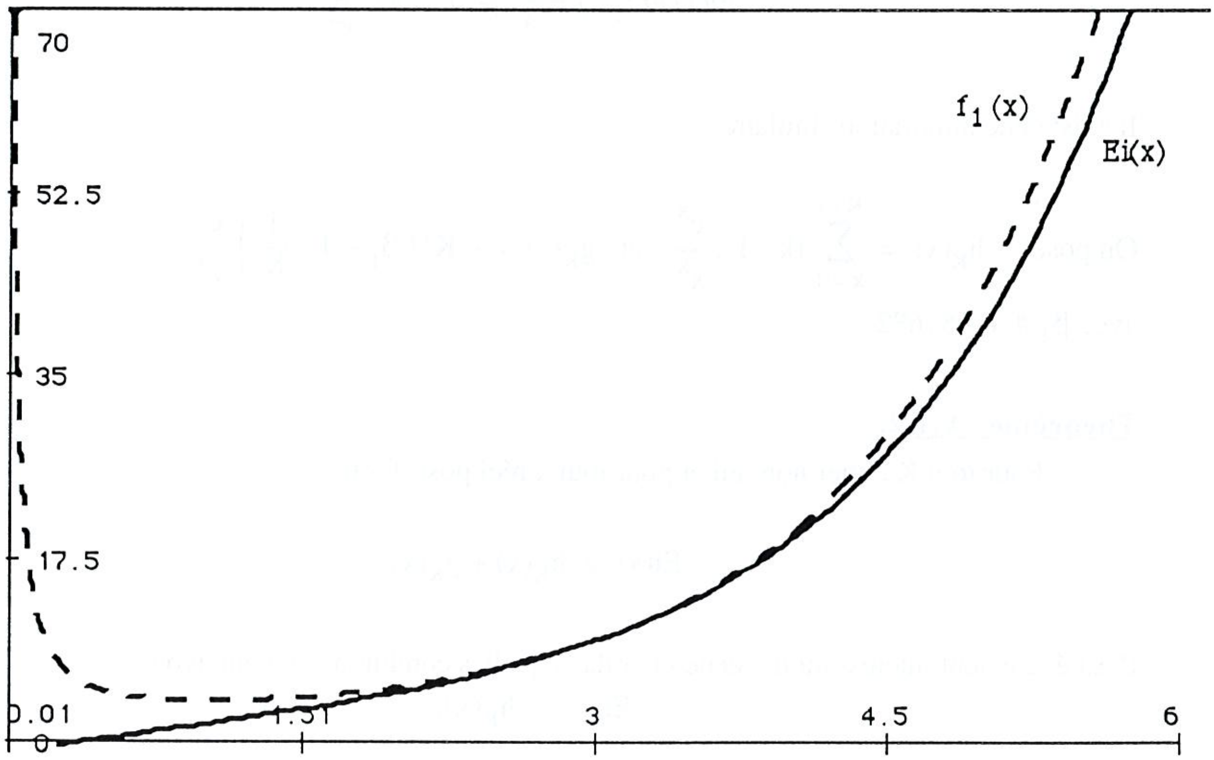
Pour tout K entier non nul et pour tout x réel positif, on a

$$Ei(x) \leq f_K(x)$$

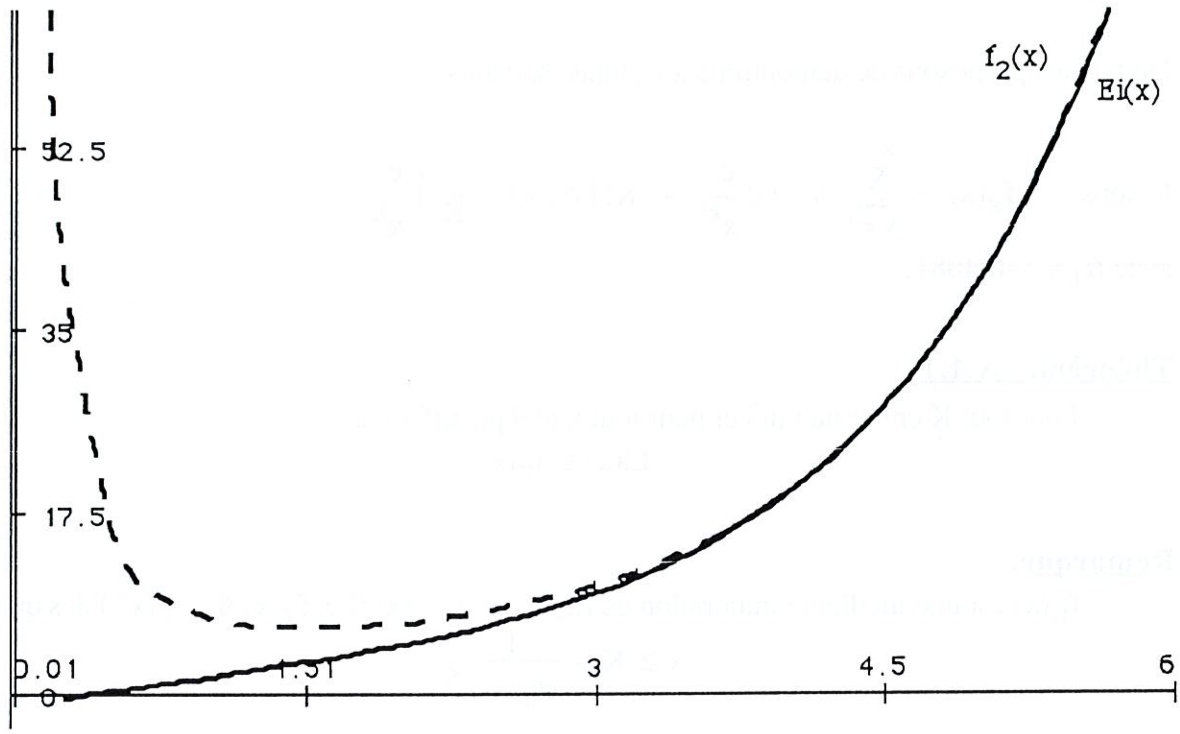
Remarque.

$f_K(x)$ est une meilleure majoration de Ei(x) que $f_{K-1}(x)$ (i.e. $f_K(x) \leq f_{K-1}(x)$) dès que

$$x \geq K + \frac{1}{\alpha_1 - 1^K}$$



Ei(x) et $f_1(x) = 1{,}484081 \frac{e^x}{x}$



$$Ei(x) \text{ et } f_2(x) = \frac{e^x}{x} + 1{,}7842\,\frac{e^x}{x^2}$$

Il existe une minoration similaire.

On pose $\quad h_K(x) = \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)!\,\frac{e^x}{x^k} \quad$ et $\quad g_K(x) = -\,K!\left(\beta_1 + 1 - \frac{1}{K}\right)\frac{e^x}{x^K}$

avec β_1 # 0,151682.

Théorème A.1.2.

Pour tout K entier non nul et pour tout x réel positif, on a

$$Ei(x) \geq h_K(x) + g_K(x).$$

Il est également intéressant de rechercher dans quelles conditions on peut avoir

$$Ei(x) \geq h_K(x).$$

Théorème A.1.3.

Pour tout K entier non nul et pour tout réel $x \geq K + 2 + \frac{1}{K}$, on a

$$Ei(x) \geq h_K(x).$$

De même dans le cas où x est négatif, on peut montrer

De même dans le cas où x est négatif, on peut montrer

Lemme A.1.1.

Pour tout K entier non nul et pour tout réel x négatif, on a

$$h_{2K}(x) \leq Ei(x) \leq h_{2K+1}(x).$$

D'où on déduit le théorème suivant :

Théorème A.1.4.

Pour tout réel x négatif, on a

$$h_{2M}(x) \leq Ei(x) \leq h_{2N+1}(x)$$

avec $M = \left\lceil -\frac{x}{2} \right\rceil$ et $N = \left\lceil -\frac{x+1}{2} \right\rceil$, où $\lceil y \rceil$ (plafond de y) représente la partie entière de (y + 1) si y n'appartient pas à $\mathbb{Z}$, y sinon.

Remarques.

1) On a M = N + 1, si $\left\lfloor -\frac{x}{2} \right\rfloor < -\frac{x}{2} \leq \left\lfloor -\frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}$, sinon M = N.

2) Dans le lemme I.1, lorsque l'on fait varier K de 1 à M, on obtient des encadrements de plus en plus précis. Au delà de M, les deux sommes s'éloignent de Ei(x), (cf le graphe de la page suivante).

Grâce au changement de variable $x \to \ln x$, on obtient :

Théorème A.1.5.

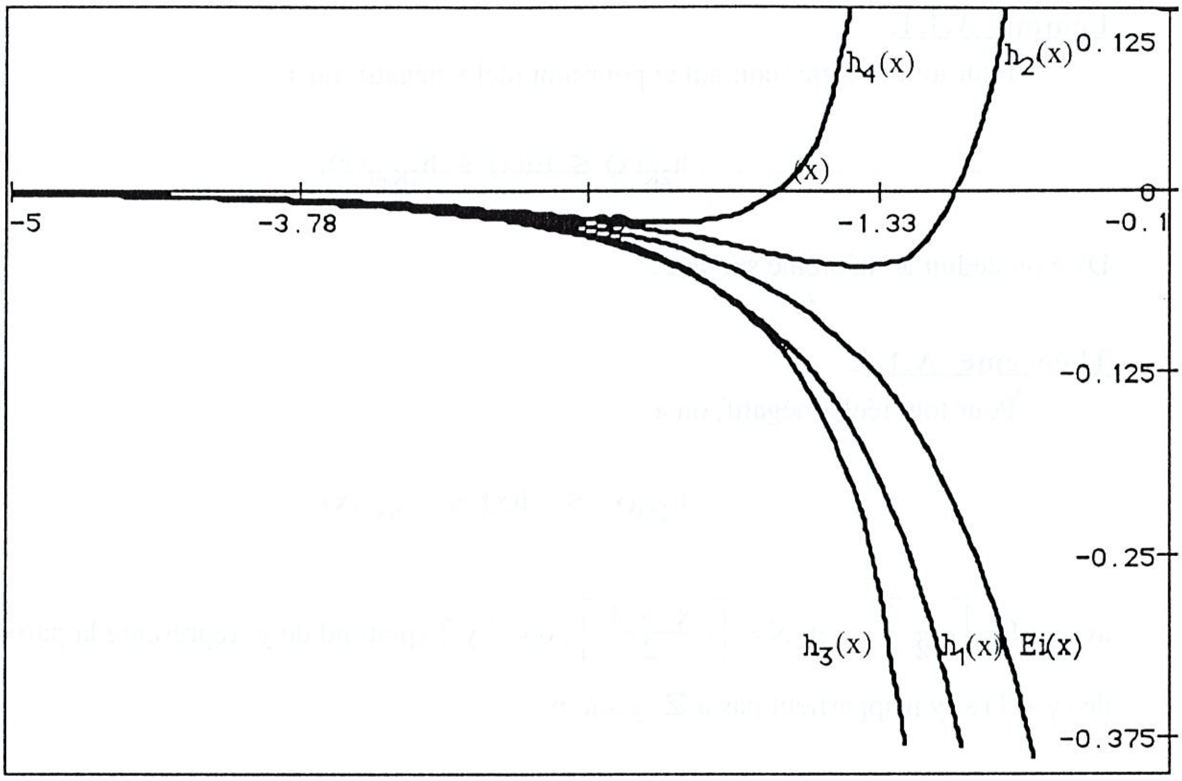
Pour tout K entier non nul et pour tout réel x > 1, on a

$$Li(x) - \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{x}{(\ln x)^k} \leq K! \left(\alpha_1 - 1 + \frac{1}{K} \right) \frac{x}{(\ln x)^K}.$$

Théorème A.1.6.

Pour tout K entier non nul et pour tout réel x > 1, on a

$$Li(x) - \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{x}{(\ln x)^k} \geq -K! \left(\beta_1 + 1 - \frac{1}{K} \right) \frac{x}{(\ln x)^K}.$$



$$Ei(x) \text{ et } h_K(x) = \sum_{k=1}^{K} (k-1)! \frac{e^x}{x^k}$$

Théorème A.1.7.

Pour tout K entier non nul et pour tout réel $x \geq \ln\left(K + 2 + \frac{1}{K}\right)$, on a

$$\mathrm{Li}(x) \geq \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{x}{(\ln x)^k}.$$

Théorème A.1.8.

Pour tout réel positif $x < 1$, on a , avec $M = \left\lceil -\frac{x}{2} \right\rceil$ et $N = \left\lceil -\frac{x+1}{2} \right\rceil$

$$\sum_{k=1}^{2M-1} (k-1)! \frac{x}{(\ln x)^k} \leq \mathrm{Li}(x) \leq \sum_{k=1}^{2N} (k-1)! \frac{x}{(\ln x)^k}.$$

A.2. CALCULS PRÉLIMINAIRES

On considère la fonction Ei(x) pour des valeurs positives de x et l'on recherche α_K et β_K des constantes telles que

$$\mathrm{Ei}(x) - \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} \leq K! \; \alpha_K \frac{e^x}{x^K} \qquad (1)$$

$$\mathrm{Ei}(x) - \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} \geq - K! \; \beta_K \frac{e^x}{x^K} \qquad (2)$$

On s'intéresse d'abord à la première inégalité.

En intégrant par parties $\int \frac{e^t}{t} dt$ entre 1 et x et en simplifiant, on obtient

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + (K-1)! \int_1^x \frac{e^t}{t^K} dt.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + (K-1)! \int_1^x \frac{e^t}{t^K} dt + \mathrm{Ei}\,(1) - e \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)!$$

soit, en remplaçant dans (1) Ei (x) par sa valeur et en simplifiant ensuite par (K - 1)!, on trouve que (1) est équivalent à

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^K} dt - K \alpha_K \frac{e^x}{x^K} + \frac{\mathrm{Ei}\,(1)}{(K-1)!} - e \sum_{k=1}^{K-1} \frac{(k-1)!}{(K-1)!} \leq 0 \qquad (3)$$

avec Ei (1) # 1,8951178.

Posons alors $\Gamma(K) = \dfrac{\mathrm{Ei}\,(1)}{(K-1)!}$,

$$s(K) = \sum_{k=1}^{K-1} \frac{(k-1)!}{(K-1)!}, \qquad s(1) = 0$$

$$\Lambda_K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^K} dt - K \alpha_K \frac{e^x}{x^K} + \Gamma(K) - e\, s(K)$$

et (3) est équivalente à $\lambda_K(x) \leq 0$.

De manière analogue, on définit λ_K, relatif à β_K :

$$\lambda_K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^K}\,dt + K\,\beta_K \frac{e^x}{x^K} + \Gamma(K) - e\,s(K)$$

On remarque que $\Gamma(K+1) = \frac{\Gamma(K)}{K}$ et que $\Gamma(K)$ est strictement décroissante de $\Gamma(2) = \mathrm{Ei}(1)$ à $\lim_{K\to\infty} \Gamma(K) = 0^+$.

$$\begin{aligned}
\text{En outre, } s(K+1) - s(K) &= \frac{1}{K!}\sum_{k=1}^{K}(k-1)! - \frac{1}{(K-1)!}\sum_{k=1}^{K-1}(k-1)! \\
&= \frac{1}{K!}\left(\sum_{k=1}^{K}(k-1)! - K\sum_{k=1}^{K-1}(k-1)!\right) \\
&= \frac{1}{K!}\left(\left(\sum_{k=1}^{K-1}(k-1)!\right)(1-K) + (K-1)!\right) \\
&= \frac{1-K}{K}\,s(K) + \frac{1}{K} \leq 0,
\end{aligned}$$

car $s(K) > \frac{1}{K-1}$, pour $K > 1$.

Par conséquent, pour tout $K \geq 3$, $s(K+1) = \frac{s(K)+1}{K}$ et $s(K)$ est strictement décroissante pour $K \geq 3$, de $s(3) = 1$ à $\lim_{K\to\infty} s(K) = 0$.

Étude de $\Lambda_K(x)$ pour x positif :

La dérivée $\Lambda'_K(x) = \frac{e^x}{x^K} - K\,\alpha_K \frac{e^x}{x^{2K}}(x^K - Kx^{K-1})$ est positive dès que l'on a $x \leq \frac{\alpha_K K^2}{K\alpha_K - 1}$. Ainsi, $\Lambda_K(x)$ atteint son maximum pour $x = x_K = \frac{\alpha_K K^2}{K\alpha_K - 1}$.

Il suffit donc, pour trouver α_K convenable pour la majoration quel que soit x, de le chercher tel que $\Lambda_K(x_K) \leq 0$. On vérifie que, pour $K = 1$, $\alpha_1 = 1{,}484081$ (si l'on prenait $\alpha_1 = 1{,}484080$ alors $\Lambda_1(x_1)$ serait positif).

A.3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Pour calculer Ei(x), on utilise la formule, (cf [HW60]),

$$Ei(x) = \gamma + \ln x + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{i!\,i}$$

où γ désigne la constante d'Euler (γ # 0,577215665).

Le tableau suivant donne les valeurs des constantes α_K vérifiant (3)

K	α_K
1	1,484081
2	0,8921
3	0,6735
4	0,5556
5	0,4799
6	0,4268
7	0,3870
8	0,3560
9	0,3309
10	0,3102
11	0,2926
12	0,2776
13	0,2645
14	0,2530
15	0,2428

De même,

K	β_K
1	0,151682

A.4. PREUVE DES THEOREMES A.1.1 ET A.1.2

Nous allons démontrer ces théorèmes par récurrence.

Supposons que l'on ait $\Lambda_K(x_K) \leq 0$, c'est-à-dire

$$\int_1^{x_K} \frac{e^t}{t^K}\,dt + \Gamma(K) - e\,s(K) - K\,\alpha_K \frac{e^{x_K}}{x_K^K} \leq 0$$

avec $x_K = \dfrac{\alpha_K K^2}{K\alpha_K - 1}$.

Cela entraîne que, pour tout x positif, $\Lambda_K(x)$ est négatif, ce que l'on désire. C'est donc vrai en particulier pour $x_{K+1} = \dfrac{\alpha_{K+1}(K+1)^2}{(K+1)\alpha_{K+1} - 1}$, à condition que l'on ait $x_{K+1} > 0$, soit $\alpha_{K+1} > \dfrac{1}{K+1}$.

$$\text{donc} \quad \int_1^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^K}\,dt + \Gamma(K) - e\,s(K) - K\alpha_K \frac{e^{x_{K+1}}}{x_{K+1}^K} \leq 0 \qquad (4)$$

Or, par intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^K}\,dt = \left[\frac{e^t}{t^K}\right]_1^x + K\int_1^x \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt$$

ce qui entraîne

$$K\int_1^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt + \Gamma(K) - e\,s(K) - e - (K\alpha_K - 1)\frac{e^{x_{K+1}}}{x_{K+1}^K} \leq 0$$

soit, en simplifiant :

$$\int_1^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt + \Gamma(K+1) - e\,s(K+1) - e - (\alpha_K - \frac{1}{K})\frac{e^{x_{K+1}}}{x_{K+1}^K} \leq 0.$$

Or on cherche α_{K+1} tel que

$$\int_1^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt + \Gamma(K) - e\,s(K) - (K+1)\alpha_{K+1}\frac{e^{x_{K+1}}}{x_{K+1}^{K+1}} \leq 0.$$

Il suffit donc d'avoir

$$-(K+1)\alpha_{K+1}\frac{e^{x_{K+1}}}{x_{K+1}^{K+1}} \leq -\frac{e^{x_{K+1}}}{x_{K+1}^K}(\alpha_K - \frac{1}{K})$$

soit $$\frac{\alpha_{K+1}}{x_{K+1}} \geq \frac{1}{K+1} (\alpha_K - \frac{1}{K})$$

donc $$\alpha_{K+1} \geq \alpha_K - \frac{1}{K(K+1)} .$$

Par conséquent, pour tout K, il suffit de prendre
$$\alpha_K \geq \alpha_1 - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{i(i+1)} = \alpha_1 - 1 + \frac{1}{K},$$

donc $\alpha_K \geq \alpha_1 - 1 + \frac{1}{K}$ convient.

$\alpha_K = \alpha_1 - 1 + \frac{1}{K}$ permet donc de majorer Ei(x) puisque l'on connaît une valeur approchée de α_1.

On procède de manière similaire avec $\lambda_K(x)$ et l'on trouve $\beta_K \geq -(-\beta_1 - 1 + \frac{1}{K})$ avec $\beta_1 = 0{,}151682$. ■

A.5. DÉMONSTRATION DU THEOREME A.1.3

Dans l'expression de $\lambda_K(x)$ (paragraphe II), on suppose $\beta_K = 0$ pour tout K, soit :
$$\lambda_K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^K} dt + \Gamma(K) - e\, s(K).$$

On cherche alors pour quels x on aura $\lambda_K(x) \geq 0$.

Comme $\frac{e^t}{t^K}$ est positive pour tout t positif, $\lambda_K(x)$ est croissante en fonction de x, donc l'ensemble des x tels que $\lambda_K(x) \geq 0$ est de la forme $[x_K, +\infty[$.

On suppose connu x_K tel que pour tout x supérieur ou égal à x_K, $\lambda_K(x) \geq 0$.
Ceci revient à dire que, pour tout $x \geq x_K$
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^K} dt + \Gamma(K) - e\, s(K) \geq 0.$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt + \Gamma(K+1) - e\,s(K+1) + \frac{1}{K}\frac{e^x}{x^K} \geq 0$$

et donc en particulier pour $x = x_K$

$$\int_1^{x_K} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt + \Gamma(K+1) - e\,s(K+1) + \frac{1}{K}\frac{e^{x_K}}{x_K^K} \geq 0.$$

Or on souhaiterait avoir $\lambda_{K+1}(x) \geq 0$. pour tout x supérieur ou égal à x_{K+1}. Soit x_{K+1} tel que

$$\int_1^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt + \Gamma(K+1) - e\,s(K+1) \geq 0.$$

Il suffit de trouver x_{K+1} tel que

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt - \frac{e^{x_K}}{K\,x_K^K} \geq 0. \qquad (5)$$

Dérivons $\frac{e^t}{t^{K+1}}$ ce qui donne $\frac{e^t}{t^K}$ (t - K - 1). Pour t positif, la fonction $\frac{e^t}{t^{K+1}}$ est donc décroissante jusqu'à t = K + 1, puis croissante.

Par conséquent, en supposant $x_K \geq K + 1$, on obtient

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} \frac{e^t}{t^{K+1}}\,dt \geq (x_{K+1} - x_K)\,\frac{e^{x_K}}{x_K^{K+1}}.$$

D'où (5) est impliqué par $(x_{K+1} - x_K)\,\frac{e^{x_K}}{x_K^{K+1}} - \frac{e^{x_K}}{K\,x_K^K} \geq 0$

ce qui sera vérifié, puisque $\frac{e^{x_K}}{x_K^{K+1}}$ est positif, dès lors que l'on aura

$$\left(x_{K+1} - x_K - \frac{x_K}{K}\right) \geq 0$$

soit $\quad \dfrac{x_{K+1}}{x_K} \geq \dfrac{K+1}{K}$ et donc $\quad x_{K+1} \geq \dfrac{K+1}{K}\, x_K.$

Comme on a supposé $x_K \geq K+1$, alors $x_{K+1} \geq \dfrac{(K+1)^2}{K}.$

Il ne reste plus à vérifier que $x_1 = 4$ convient et que pour tout $K \geq 2$, $x_K = \dfrac{K^2}{K-1}$ est supérieur ou égal à $K+1$, ce qui termine la démonstration du théorème I.3. ■

A.6. ENCADREMENTS DE Ei(x) POUR x NÉGATIF (THEOREME A.1.4)

Démontrons tout d'abord le lemme A.1.1.

Par intégrations par parties successives, on obtient pour tout x négatif

$$Ei(x) = \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} + (K-1)! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^K}\, dt \,.$$

Comme on peut vérifier facilement que, pour x négatif et K impair

$$\frac{e^x}{x^K} \leq \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^K}\, dt \leq 0$$

et que pour x négatif et K pair,

$$0 \leq \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t^K}\, dt \leq \frac{e^x}{x^K},$$

nous obtenons

$$(K-1)! \frac{e^x}{x^K} \leq Ei(x) - \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} \leq 0, \quad \text{si K est impair,}$$

et

$$0 \leq Ei(x) - \sum_{k=1}^{K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} \leq (K-1)! \frac{e^x}{x^K}, \quad \text{si K est pair.}$$

Par conséquent, pour tout K entier non nul et pour tout réel x négatif, on a

$$\sum_{k=1}^{2K-1} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} \leq Ei(x) \leq \sum_{k=1}^{2K} (k-1)! \frac{e^x}{x^k} \,.$$

soit

$$h_{2K}(x) \leq Ei(x) \leq h_{2K+1}(x).$$

■

On remarque alors que $h_{2K+1}(x) > h_{2K-1}(x)$ si $x + 2K - 1$ est positif, soit lorsque $K > \frac{1 - x}{2}$. En posant $N = \left\lceil - \frac{x + 1}{2} \right\rceil$, on a $h_{2N+1}(x) \geq h_{2K+1}(x)$ pour tout K et $h_{2N+1}(x)$ donne donc la meilleure majoration.

De même $h_{2K}(x) < h_{2K-2}(x)$ lorsque $x + 2K - 2$ est positif, soit lorsque $K > \frac{2 - x}{2}$. En posant $M = \left\lceil - \frac{x}{2} \right\rceil$, il vient $h_{2M}(x) \leq h_{2K+1}(x)$ pour tout K et $h_{2M}(x)$ donne la meilleure minoration.

Ceci termine la démonstration du théorème A.1.4. ■

Annexe 2

PROGRAMME DE RECHERCHE DES NOMBRES k-HAUTEMENTS COMPOSÉS SUPÉRIEURS ET k,(j,ℓ)-HAUTEMENTS COMPOSÉS SUPÉRIEURS

Voici un programme écrit en Think Pascal permettant de rechercher les nombres k,(j,ℓ)-hautement composés supérieurs et donc, en prenant $j = 1$ et $\ell = 0$, des nombres k-h.c.s.

```
{    liste des nombres hautement composés supérieurs dans une progression arithmétique   }
{                               Think Pascal 4  -  version 3.1                            }

program HCSUP;

        const
                MAX = 2000;

        type
                HCS = array[1..MAX] of integer;

        var
                N: HCS;
                TP: array[1..1000] of boolean;
                PREM: array[1..MAX] of longint;
                EPSILON, EPS1, EPS2, EP, ESTI, MAXL1: extended;
                L, R, OMEGA, OM, MAXOM, PRECED, I, J, K, MAXI, MINI: integer;
                IP, P: longint;
                B, B2: boolean;
                Car: char;
                NOM: string[10];
                F: text;

    function PREMIER (N: longint): boolean;
  {  Sortie : true si N est premier, false sinon  }

                var
                        T: longint;
                        B: boolean;
```

```
begin
	B := true;
	if N = 1 then
		B := false
	else if (N = 2) or (N = 3) then
		B := true
	else
		for T := 2 to round(sqrt(N)) do
			if N mod T = 0 then
				B := false;
	PREMIER := B
end;


procedure PREMSUIVANT (J: integer; var IP: longint);

begin
	repeat
		IP := IP + J
	until PREMIER(IP);
end;


function ESTIME (N: HCS): extended;

	var
		II, JJ: integer;
		PROD: extended;

begin
	PROD := 1;
	JJ := 1;
	while (N[JJ] <> 0) and (JJ <= MAX) do
		begin
			for II := 1 to N[JJ] do
				PROD := PROD * PREM[JJ];
			JJ := JJ + 1;
		end;
	ESTIME := PROD;
end;


function LAMBDA (N: HCS; OM: integer): extended;

	var
		L, L1, LD, FACT: extended;
		P: longint;
		T, U: integer;

begin
	L := 0;
	LD := 0;
	FACT := 1;
	for T := 2 to K - 1 do
		FACT := FACT * T;
	FACT := ln(FACT);
	for T := 1 to I do
		begin
			P := PREM[T];
			L := L + (N[T] * ln(P));
			for U := 1 to K - 1 do
				LD := LD + ln(N[T] + U);
```

```
                    LD := LD - FACT
            end;
        L1 := LD * ln(L) / L / ln(K);
        LAMBDA := L1;
        if L1 > MAXL1 then
            begin
                MAXL1 := L1;
                MAXOM := OM;
            end;
end;


procedure IMPRIME (N: HCS; OM: integer; EPS: real);

    var
        JJ: integer;

begin
    if TP[OM] then
        begin
            JJ := 1;
            write(OM, ' ième ', '(', J : 1, ',', L : 1, ')', K : 1, '-h.c.s.    ');
            write(F, OM, ' ième ', '(', J : 1, ',', L : 1, ')', K : 1, '-h.c.s.    ');
            while (N[JJ] <> 0) and (JJ <= MAX) do
                begin
                    write(' ', N[JJ] : 2);
                    write(F, ' ', N[JJ] : 2);
                    JJ := JJ + 1
                end;
            TP[OM] := false;
            if B then
                begin
                    write('    Lambda1 = ', LAMBDA(N, OM) : 7 : 6);
                    write(F, '    Lambda1 = ', LAMBDA(N, OM) : 7 : 6);
                end;
            if B2 then
                begin
                    write('    Eps = ', EPS : 7 : 6);
                    write(F, '    Eps = ', EPS : 7 : 6);
                end;
            ESTI := ESTIME(N);
            if ESTI < 1E19 then
                begin
                    writeln('                --> ', ESTIME(N) : 1 : 0);
                    writeln(F, '                --> ', ESTIME(N) : 1 : 0);
                end
            else
                begin
                    writeln;
                    writeln(F);
                end;
        end
end;


procedure PUISHCS (EPS: real; var OM: integer; var N: HCS);

    var
        II: integer;

begin
    OM := 0;
    for II := 1 to MAX do
```

```
                N[II] := 0;
            for II := 1 to I do
                begin
                    N[II] := trunc((K - 1) / (exp(EPS * ln(K) * ln(PREM[II])) - 1));
                    OM := OM + N[II];
                end;
            IMPRIME(N, OM, EPS);
    end;


    procedure RECHERCHE (EPS1, EPS2: real; OMEG, PREC: integer);

    begin
        if (OMEG > PREC + 1) and (EPS1 - EPS2 > 0.000001) then
            begin
                EP := (EPS1 + EPS2) / 2;
                PUISHCS(EP, OM, N);
                RECHERCHE(EP, EPS2, OMEG, OM);
                RECHERCHE(EPS1, EP, OM, PREC);
            end
    end;


begin
    { assignation des fichiers et initialisation }

    writeln(' Nombres k-h.c.s dans la progression arithmétique jx + l. ');
    writeln('Entrer k, j et l séparés par des blancs');
    readln(k, j, l);
    writeln('Nombre minimum (généralement1) puis maximum de nombres premiers désirés pour
fabriquer les k-hcs (< ', MAX : 1, ')');
    readln(MINI, MAXI);
    writeln('Entrer le nom du fichier contenant le résultat');
    readln(NOM);
    rewrite(F, NOM);
    writeln('Voulez-vous calculer Lambda1 ? (O/N)');
    readln(Car);
    if (Car = 'O') or (Car = 'o') then
        B := true
    else
        B := false;
    writeln('Voulez-vous connaître epsilon correspondant à N k-hcs ? (O/N)');
    readln(Car);
    if (Car = 'O') or (Car = 'o') then
        B2 := true
    else
        B2 := false;
    MAXL1 := 0;
    for I := 1 to 1000 do
        TP[I] := true;
    writeln('   Liste des nombres (', J : 1, ',', L : 1, ')', K : 1, '-hautement composés supérieurs');
    writeln(F, '   Liste des nombres  ( ', J : 1, ' , ', L : 1, ' ) ', K : 1, ' - hautement composés supérieurs ');
    writeln(F);
    writeln(F);
    PRECED := 0;
    write('                              ');
    write(F, 'Nb premiers consdérés       ');
    IP := L;
    if not (PREMIER(L)) then
        PREMSUIVANT(J, IP);
    for I := 1 to MAXi do
        begin
```

```
                    write(IP : 3, ' ');
                    write(F, IP : 3, ' ');
                    PREM[I] := IP;
                    PREMSUIVANT(J, IP);
            end;
    PREM[MAXI + 1] := IP;
    writeln;
    writeln(F);
    writeln(F);
    P := PREM[MINI];
    for I := MINI to MAXI + 1 do
            begin
                    IP := PREM[I];
                    PUISHCS(1 / ln(IP), OMEGA, N);
                    EPS1 := 1 / ln(P);
                    EPS2 := 1 / ln(IP);
                    RECHERCHE(EPS1, EPS2, OMEGA, PRECED);
                    P := IP;
            end;
    writeln('Maximum de Lambda1 : ', MAXL1 : 7 : 6, ' au ', MAXOM : 1, 'ième khcs');
    writeln(F, 'Maximum de Lambda1 : ', MAXL1 : 7 : 6, ' au ', MAXOM : 1, 'ième khcs');
    close(F);
    note(500, 100, 10);
end.
```

Bibliographie

[AE44] : L. ALAOGLU & P. ERDÖS, *On highly composite and similar numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 56 (1944), pp 448-469.

[DI71a] : L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers,* Chelsea Publishing Company, vol. 1, p 291.

[DI71b] : L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers,* Chelsea Publishing Company, vol. 1, p 448.

[EL76] : W. J. ELLISON & M. MENDES-FRANCE, *Les nombres premiers*, Hermann, Actualités scientifiques et industrielles n°1366 (1975).

[EN75] : P. ERDÖS & J.-L. NICOLAS, *Sur les nombres super-abondants*, Bull. de la Soc. Math. de France, vol. 103 (1975), pp 65-90.

[ER44] : P. ERDÖS, *Composite numbers*, J. London Math. Soc. vol.19 (1944), pp 130-133.

[HA82] : J. L. HAFNER, *On the average order of a class of arithmetical functions*, J. of Numb. Theory, Vol 15, (1982), pp 36-76.

[HR17] : G. H. HARDY & S. RAMANUJAN, *The normal numbers of prime factors of a number n,* Quaterly Journal of Mathematica, XLVIII, (1917), pp 76-92.

[HW60] : G. H. HARDY & E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers,* 4th édition, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[MC84a] : K. McCURLEY, *Explicits estimates for the error term in the prime number theorem for arithmetic progression*, Math. of Comp. Vol. 42, Numb. 165, (1984), pp 265-285.

[MC84b] : K. McCURLEY, *Explicits estimates for $\theta(x;3,l)$ and $\psi(x;3,l)$*, Math. of Comp. Vol. 42, Numb. 165, (1984), pp 287-296.

[NI71] : J.-L. NICOLAS, *Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan,* Can J. Math. vol. III, n°1 (1971), pp 116-130.

[NI80] : J.-L. NICOLAS, *Grandes valeurs d'une certaine classe de fonctions arithmétiques*, Studia Sci. Math. Hungar. 15 (1980), pp 71-77.

[NO85] : K. NORTON, *Upper bounds for sums of powers of divisor functions*

[NR83] : J.-L. NICOLAS & G. ROBIN, *Majorations explicites du nombre de diviseurs d'un entier*. Can. Math. Bul. Vol. 26, (4), (1983), pp 485-492.

[RA15a] : S. RAMANUJAN, *On the number of divisors of a number*, J. of the Indian Math. Soc. VII, (1915), pp 131-133.

[RA15b] : S. RAMANUJAN, *Highly composite numbers*. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 14, (1915), pp 347-400.

[RO83a] : G. ROBIN, *Méthodes d'optimisation pour un problème de théorie des nombres*, R.A.I.R.O. informatique théorique, vol. 17 n°3 (1983), pp 239-247.

[RO83b] : G. ROBIN, *Grandes valeurs de fonctions arithmétiques et problèmes d'optimisation en nombres entiers,* Studia scient. math. hungarica, vol 23 (1988), pp 61-71.

[RO88] : G. ROBIN, *Sur une famille de nombres hautement composés supérieurs,* thèse présentée à l'Université de Limoges (1983).

[RS62] : J. B. ROSSER & L. SCHOENFELD, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Jour. Math., (1962), tome 6, pp 64-94.

[SC76] : L. SCHOENFELD, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II*, Math. of Comp. Vol. 30, Numb. 134, (1976), pp 337-360.

[TE90] : G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Institut Elie Cartan, n°13 (1990).

[WI06] : S. WIGERT, *Sur l'ordre de grandeur du nombre des diviseurs d'un entier*, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd 3 n°18, 95 (1906-1907).

Notations

p	désigne un nombre premier.
n, N	désignent des nombres entiers.
$a \mid n$	a divise n.
$p^\alpha \parallel n$	p^α divise n et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas n.
$\log x$	logarithme népérien de x.
$[x]$	partie entière de x.
$\lceil x \rceil$	plafond de x : partie entière de $(x+1)$ si x n'appartient pas à $\mathbb{Z}$, x sinon.
$\lfloor x \rfloor$	plancher de x.
$\binom{n}{r}$	coefficient binomial : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.
$v_p(n)$	valuation p-adique de n, c'est-à-dire α tel que $p^\alpha \parallel n$.
N_ε	désigne un nombre k-hautement composé supérieur relatif au réel ε.
$d(n)$	nombre de diviseurs de n.
$d_k(n)$	nombre de manière d'écrire n comme produit de k facteurs. $d_k(n) = \sum_{\delta_1.\delta_2\ldots\delta_k = n} 1$.

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, fonction de Riemann.

$\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1$.

$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha \parallel n} \alpha$.

$x = k^{1/\varepsilon}$.

$v_i = \log \frac{i+k-1}{i} \Big/ \log k$.

$$I = \left\lceil \frac{k-1}{2^\varepsilon - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{k-1}{k^{\frac{\log 2}{\log x}} - 1} \right\rceil.$$

$\pi(x) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \text{ premier}}} 1$.

$$\theta(x) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \text{ premier}}} \log p.$$

$$G(x) = \pi(x) \log x - \theta(x).$$

$$\Lambda_1(k,N) = \frac{\log\log N \log d_k(N)}{\log k \log N}.$$

$$\Lambda_2(k,N) = \frac{(\log\log N)^2 \log d_k(N)}{\log k \log N} - \log\log N.$$

$$\lambda_1(k) = \operatorname*{Max}_{N \in \mathbb{N}} \Lambda_1(k,N).$$

$$\lambda_2(k) = \operatorname*{Max}_{N \in \mathbb{N}} \Lambda_2(k,N).$$

$$d_{k;j,\ell}(n) = \prod_{\substack{p^\alpha \| n \\ p \equiv \ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} \binom{k+\alpha-1}{k-1}.$$

$$\pi(x;j,\ell) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv \ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} 1.$$

$$\theta(x;j,\ell) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv \ell \bmod j \\ p \text{ premier}}} \log p.$$

$$G(x;j,\ell) = \pi(x;j,\ell) \log x - \theta(x;j,\ell).$$

$\varphi(j)$ fonction d'Euler, c'est-à-dire le nombre d'entiers naturels plus petits que j et premiers avec lui.

$\displaystyle ⨍_0^x f$ partie principale de l'intégrale de f(t).

Li(x) logarithme intégral ; $\mathrm{Li}(x) = \displaystyle ⨍_0^x \frac{dt}{\log t}$.

Ei(x) exponentielle intégrale ; $\mathrm{Ei}(x) = \displaystyle ⨍_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$.

γ désigne la constante d'Euler (γ # 0,577215665).

Résumé :

Le but de cette thèse est d'étudier la fonction qui compte le nombre de façons de représenter un entier comme produit de k facteurs et notamment d'obtenir des majorations de celle-ci.

Le premier chapitre présente les définitions, principales propriétés et majorations simples de cette fonction. Nous déterminons ses ordres moyen, normal et maximal.

Le second chapitre contient les définitions et quelques propriétés des nombres k-hautement composés et k-hautement composés supérieurs. L'utilisation de propriétés de ces derniers permet, au troisième chapitre, de déterminer des majorations effectives de la fonction étudiée.

Le quatrième chapitre étudie la forme des nombres pour lesquels les majorations trouvées sont atteintes, lorsque k est grand.

On généralise également la fonction étudiée pour k réel et complexe, et l'on obtient une majoration simple dans ce cas.

Nous étudions au cinquième chapitre le nombre de façons de représenter un entier comme produit de k facteurs lorsque ceux-ci ont des diviseurs premiers dans une progression arithmétique donnée.

En annexe sont présentés des encadrements des fonctions logarithme intégral et exponentielle intégrale, ainsi qu'un programme de recherche des nombres k-hautement composés supérieurs.

Mots-Clés :

Théorie des nombres
Nombre de diviseurs d'un entier
Nombres hautement composés
Majorations
Fonctions arithmétiques
Ramanujan
Logarithme intégral
Progressions arithmétiques

Title :

Study of the function number of ways to represente an integer as a product of k factors.

Abstract :

The aim of this thesis is to study the function who counts the number of ways to represente an integer as a product of k factors and especialy to find its upper bounds .
The first chapter exposes definitions, principal properties and some simple upper bounds. We determine its average, normal and maximal orders.
The second chapter contains definitions and some properties of the k-highly composite numbers and k-superior highly composite numbers. The use of the properties of these numbers allows in the third chapter to deteminate the effective upper bounds of the studied function.
The fourth chapter presents the form of the k-superior highly composite numbers for wich the found upper bounds are reached, for all sufficiently large values of k.
We generalize the studied function for k real and complex, and we obtain a simple upper bound in this case.
We study in the fifth chapter the number of ways to represente an integer as a product of k factors when these have got their prime factors in a given arithmetic progression.

In appendixes are presented upper bounds and lower bounds of the functions integral logarithm and integral exponential, and a program of searching the k-superior highly composite numbers.