Präsentation der polynomialen Poisson-Algebra auf der 2-Sphäre

von
Klaus Niederkrüger

Diplomarbeit im Mathematik
vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften

der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im Dezember 1999

angefertigt am
Lehrstuhl B für Mathematik
bei Prof. Dr. W. Plesken

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit wird eine endliche Präsentation der polynomialen Poisson-Algebra auf der 2-Sphäre ausgerechnet. Dazu benutzt man in der Hauptsache die Darstellungstheorie der $\mathfrak{so}(3)$ bzw. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Nachdem man eine endliche Erzeugermenge für die Poisson-Algebra gefunden hat, geht man zur freien Lie-Algebra auf diesen Elementen über. Man gibt dieser abstrakten Algebra mehr und mehr Relationen, die man aus der Poisson-Algebra übernimmt, bis man glaubt genügend viele Gleichungen gefunden zu haben. Dass diese Relationen ausreichen, wird anschließend gezeigt.

Die gefundene Präsentation hat die Erzeuger $\{X, Y, Z; G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$. Die ersten drei Elemente entsprechen den Polynomen x, y, z, die anderen fünf entsprechen den Kugelfunktionen vom Grad 2.

Man benötigt insgesamt 20 Relationen, von denen aber die meisten eine anschauliche Bedeutung haben:

- Drei Gleichungen identifizieren einen drei dimensionalen Unterraum des Produktes $[G_i, G_j]$ mit den Erzeugern X, Y, Z.

- 15 Relationen dienen dazu, den Erzeugern G_1 bis G_5 eine Modulstruktur bzgl. X, Y, Z zu geben.

Mit diesen Bedingungen wird die Lie-Algebra zum $\mathfrak{so}(3)$-Modul und die Erzeuger X, Y, Z werden zu einer Unteralgebra, die isomorph zur $\mathfrak{so}(3)$ ist.

Nun benötigt man lediglich noch zwei weitere Relationen. Eine bildet einen Untermodul in der dritten Schicht der Präsentation auf Null ab, die andere identifiziert einen fünf dimensionalen Untermoduln in der gleichen Schicht mit den Erzeugern G_1 bis G_5.

Zum leichteren Umgang mit der freien Lie-Algebra wurde noch im Rahmen dieser Diplomarbeit ein Computerprogramm entwickelt, das Ausdrücke in dieser Algebra in eine Normalform transformiert und es einem so erlaubt viele Probleme auf die lineare Algebra zurückzuführen (s. Anhang B).

Ich möchte mich bei meinem Vater bedanken, der mir das Studium ermöglicht hat. Herrn Prof. Plesken danke ich für seine Geduld und die Betreuung bei diesem Problem. Mein Dank gilt auch meinen Kollegen und Freunden am Lehrstuhl, insbesondere danke ich Mohamed Barakat, Gabriele Nebe und Tilman Schulz.

Kapitel 1

Die Poisson-Algebra auf der 2-Sphäre

Abschnitt 1.1 gibt einen knappen Einstieg in das Gebiet der symplektischen Geometrie. Dabei beschränkt er sich hauptsächlich auf Definitionen. Man kann dies z.B. in [1] nachlesen.

Abschnitt 1.2 zitiert die wichtigsten Resultate der Darstellungstheorie der $\mathfrak{so}(3)$. Eine ausführlichere Einleitung in dieses Thema findet man in [4].

Das Hauptergebnis von Abschnitt 1.3 ist das Auffinden einer endlichen Erzeugermenge der Poisson-Algebra auf der Sphäre.

1.1 Symplektische Struktur

Die 2-Sphäre trägt in den Texten der einführenden Mathematik eine **metrische Struktur**, die durch die Einbettung der S^2 in den 3-dimensionalen euklidischen Raum vererbt wird. Weniger bekannt ist, dass diese riemannsche Metrik eine **symplektische Struktur** auf der Kugel induziert. Eine symplektische Struktur auf einer Mannigfaltigkeit ist eine geschlossene, nicht-entartete 2-Form. Z.B. gibt die Volumenform Ω der S^2 eine solche Struktur.

Zunächst werden einige grundlegenden Ergebnisse der Theorie symplektischer Mannigfaltigkeiten zitiert:

1.1.1 Hamiltonsche Vektorfelder

Eine symplektische Struktur Ω auf M bildet – wie in der riemannschen Geometrie die Metrik – einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Vektorfeldern $\mathcal{V}(M)$ und den 1-Formen $\Lambda^1(M)$. Im folgenden ist $X^\dagger$ die zu einem Vektorfeld X gehörige 1-Form $X^\dagger := i_X\Omega$ und $\omega_\dagger$ das zu ω gehörige Vektorfeld mit $\omega = i_{\omega_\dagger}\Omega$.

Ein Vektorfeld $X_H \in \mathcal{V}(\mathcal{M})$ auf M heisst **hamiltonsches Vektorfeld zu einer Energiefunktion** $H : M \to \mathbb{R}$, falls

$$i_{X_H}\Omega = \mathrm{d}H$$

bzw.

$$\mathrm{d}H = X_H^\dagger$$

gilt.

Man sieht leicht, dass die Energiefunktionen H auf den Trajektorien $\gamma(t)$ des zugehörigen Vektorfeldes X_H konstant ist:

$$\frac{d}{dt}H(\gamma(t)) = X_H(H) = \mathrm{d}H(X_H) = X_H^\dagger(X_H) = \Omega(X_H, X_H) = 0. \tag{1.1}$$

Dass zu jeder Funktion $H : M \to \mathbb{R}$ ein hamiltonsches Vektorfeld existiert ist offensichtlich: $X_H := (dH)_\dagger$.

Umgekehrt gilt die Aussage natürlich nicht. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Energiefunktion H zu einem Vektorfeld X lässt sich durch die Gleichung

$$\mathrm{d}(X^\dagger) = \mathrm{d} \circ \mathrm{d}H = 0$$

finden. Lokal existiert zu jedem Vektorfeld, das obige Gleichung erfüllt, eine Energiefunktion H. Um die globale Existenz sicherzustellen muss die Mannigfaltigkeit M einfach zusammenhängend sein.

Man bezeichnet die Hamiltonschen Vektorfelder auf M mit $\mathrm{Ham}(M)$.

1.1.2 Die Poisson-Algebra

Die Vektorfelder bilden mit der Lie-Klammer eine Lie-Algebra. Dies rechnet man leicht nach. Andererseits induziert die symplektische Struktur auf den 1-Formen in natürlicher Weise eine isomorphe Lie-Algebren-Struktur durch die Einführung der sogenannten Poisson-Klammern, die definiert sind durch

$$\{\omega, \mu\} := -[\omega_\dagger, \mu_\dagger]^\dagger \quad \forall \omega, \mu \in \Lambda^1(M). \tag{1.2}$$

Wegen der Identität $(\omega_\dagger)^\dagger = \omega$, erfüllt die Poisson-Klammer die Lie-Algebren-Eigenschaften. Das Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung muss aus Konsistenzgründen für die Definition der Poisson-Klammer für Funktionen (s.u.) dort stehen. Der Lie-Algebrenisomorphismus ist durch

$$X \to -X^\dagger$$

gegeben.

Man kann die Poisson-Klammer auch durch

$$\{f, g\} := \Omega\big((\mathrm{d}f)_\dagger, (\mathrm{d}g)_\dagger\big). \tag{1.3}$$

auf Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ erweitern.

Dies macht den Raum der Funktionen zu einer Lie-Algebra. Dass die Poisson-Klammer glatte Funktionen als Bild glatter Funktionen liefert ist klar, ebenso die Antisymmetrie. Lediglich die Jacobi-Identität bleibt nachzurechnen, wobei man die Gleichung $\{f, g\} = \Omega\big((df)_\dagger, (dg)_\dagger\big) = df((dg)_\dagger) = (dg)_\dagger(f) = \mathcal{L}_{(dg)_\dagger} f$ benutzt:

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\}& \\
+\{h,\{f,g\}\} &= -\mathcal{L}_{df_\dagger}\{g,h\} - \mathcal{L}_{dg_\dagger}\{h,f\} + \mathcal{L}_{(d\{f,g\})_\dagger} h \\
&= \mathcal{L}_{df_\dagger}\mathcal{L}_{dg_\dagger} h - \mathcal{L}_{dg_\dagger}\mathcal{L}_{df_\dagger} h + \mathcal{L}_{d\{f,g\}_\dagger} h \\
&= \left[\mathcal{L}_{df_\dagger}, \mathcal{L}_{dg_\dagger}\right] h + \mathcal{L}_{d\{f,g\}_\dagger} h \\
&= \left(\mathcal{L}_{[df_\dagger, dg_\dagger]} + \mathcal{L}_{d\{f,g\}_\dagger}\right) h \\
&= dh\left(d\{f,g\}_\dagger - \{df, dg\}_\dagger\right) \\
&= \Omega(dh_\dagger, (d\{f,g\} - \{df, dg\})_\dagger)
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathrm{d}\{f, g\} - \{\mathrm{d}f, \mathrm{d}g\}$ verschwindet. Dazu stellt man folgende Rechnung auf, wobei man die Exaktheit der symplektischen Form und die Notation $X_f = (\mathrm{d}f)_\dagger$ benutzt:

$$\begin{aligned}
(d\Omega)(X_f, X_g, Y) &= X_f(\Omega(X_g, Y)) + X_g(\Omega(Y, X_f)) + Y(\Omega(X_f, X_g)) \\
&\quad -\Omega([X_f, X_g], Y) - \Omega([X_g, Y], X_f) - \Omega([Y, X_f], X_g) \\
&= X_f(dg(Y)) - X_g(df(Y)) + Y(\{f,g\}) + \Omega(\{df, dg\}_\dagger, Y) \\
&\quad +df([X_g, Y]) + dg([Y, X_f]) \\
&= X_f(Y(g)) - X_g(Y(f)) + d(\{f,g\})(Y) + \{df, dg\}(Y) \\
&\quad +[X_g, Y]f - [X_f, Y]g
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d(\{f,g\})(Y) + \{df,dg\}(Y) + X_f(Y(g)) - X_g(Y(f)) \\
&\quad + X_g(Y(f)) - Y(X_g(f)) - X_f(Y(g)) + Y(X_f(g)) \\
&= d(\{f,g\})(Y) + \{df,dg\}(Y) - Y(df(X_g)) + Y(dg(X_f)) \\
&= d(\{f,g\})(Y) + \{df,dg\}(Y) - Y(\Omega(X_f,X_g)) + Y(\Omega(X_g,X_f)) \\
&= \{df,dg\}(Y) - d(\{f,g\})(Y) = 0
\end{aligned}
$$

Man sieht auf diese Art und Weise nicht nur, dass die Funktionen mit „der" Poisson-Klammer eine Lie-Algebra bilden, sondern man erhält durch die äußere Ableitung und die Gleichung

$$
\mathrm{d}\{f,g\} = \{\mathrm{d}f, \mathrm{d}g\} \tag{1.4}
$$

einen Lie-Algebren-Morphismus zwischen $\Lambda^0(M)$ und $\Lambda^1(M)$. Beschränkt man sich auf einfach zusammenhängende, symplektische Mannigfaltigkeiten, dann gilt die folgende exakte Lie-Algebren-Sequenz

$$
0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} C^\infty(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{Ham}(M) \longrightarrow 0
$$

wobei man die Hamiltonschen Vektorfelder mit den exakten 1-Formen durch den oben erwähnten Isomorphismus identifiziert. Insbesondere erkennt man hier, dass die Hamiltonschen Vektorfelder eine Unteralgebra aller Vektorfelder bildet.

1.1.3 Folgerungen für den Spezialfall der 2-Sphäre

Es wird nun die symplektische Theorie auf der 2-Sphäre betrachtet. Wie anfangs bemerkt handelt es sich bei der 2-Sphäre um eine symplektische Mannigfaltigkeit bzgl. der Volumenform.

Die Untersuchungen in den folgenden Kapiteln werden nicht mit den Funktionen aus $\mathcal{F}(S^2)$, sondern mit deren Erweiterungen auf $\mathbb{R}^3$ durchgeführt werden.

Es ist nämlich möglich folgendes einfaches Verfahren anzugeben, um die Poissonklammern zweier Polynome auf $\mathbb{R}^3$ auszurechnen, die auf die 2-Sphäre eingeschränkt worden sind.

1. Für die Einschränkung der Funktionen x, y, z gelten folgende Beziehungen

   $$
   \{x,y\} = z, \quad \{y,z\} = x \quad \text{und} \quad \{z,x\} = y.
   $$

   Man sieht, es handelt sich um eine Unteralgebra der Poisson-Algebra, die isomorph zur $\mathfrak{so}(3)$ ist.
   <u>Beweis:</u> Es wird hier nur der erste Fall gezeigt. Die anderen sind vollkommen analog. Wir benutzen im Beweis Kugelkoordinaten.

   $$
   \begin{aligned}
   \{x,y\} &= \{\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta\} = \Omega(dx_\dagger, dy_\dagger) \\
   &= \sin\theta\, d\phi \wedge d\theta(\ \sin\phi\cos\theta\, d\theta_\dagger + \cos\phi\sin\theta\, d\phi_\dagger, \\
   &\qquad\qquad\qquad\quad \cos\phi\cos\theta\, d\theta_\dagger - \sin\phi\sin\theta\, d\phi_\dagger) \\
   &= -\sin^2\theta\cos\theta\, d\phi \wedge d\theta(X_\theta, X_\phi) \\
   &= -\sin^2\theta\cos\theta\, d\phi \wedge d\theta \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \right) \\
   &= \cos\theta = z
   \end{aligned}
   $$

   Man sieht, dass das Rechnen mit Koordinatensystem eine äußerst unangenehme Angelegenheit ist. Mit der hier vorgestellten Methode kann man solche Probleme umgehen.

2. Für festes f_0 und beliebige Funktionen g, h gilt folgende Regel

   $$
   \{f_0, gh\} = \{f_0, g\}h + g\{f_0, h\}.
   $$

Beweis: Mit der Leibnizregel für die äußere Derivation auf Formen und der $C^\infty(M)$-Linearität der Zuordnung zwischen Formen und Vektorfeldern, sieht man obige Gleichung sofort:

$$\begin{aligned}\{f_0, gh\} &= \Omega((\mathrm{d}f_0)_\dagger, \mathrm{d}(gh)_\dagger) \\ &= \Omega((\mathrm{d}f_0)_\dagger, (h\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}h)_\dagger) \\ &= \Omega((\mathrm{d}f_0)_\dagger, h\,(\mathrm{d}g)_\dagger + g\,(\mathrm{d}h)_\dagger) \\ &= \{f_0, g\}h + g\{f_0, h\}.\end{aligned}$$

Mit dieser Methode ist es nun klar, dass man für Polynome die Poisson-Klammer schnell ausrechnen kann. Im Beweis von Punkt eins hat man auch gesehen, wie mühsam das Rechnen mit Koordinatensystemen ist.

Einzig unbefriedigend ist, dass man diese Methode nur für die Einschränkung von Polynomen benutzen kann (deren zugehörige Polynomfunktion man kennt). Außerdem sind die zu einer Funktion passenden Polynome nicht eindeutig. Man kann Schließlich jedes Polynom mit r^2 multiplizieren, ohne dass sich an seiner Einschränkung auf die Sphäre etwas ändert.

Beide Einschränkungen werden im folgenden Kapitel untersucht und für theoretische Betrachtungen gelöst werden. Erstere durch die Feststellung, dass die Polynome eine Basis des Funktionenraums bilden und letztere durch Suchen eines Vertreters für die ganze Klasse, die man in Form der harmonischen Polynome findet.

1.2 Darstellungstheoretische Betrachtungen

Dieser Abschnitt soll einen kurzen Überblick über die Darstellungstheorie der Lie-Gruppe $SO(3)$ geben. Man kann das hier skizzierte nachlesen in [4].

1.2.1 Die Kugelflächenfunktionen

Man kann ein beliebiges, homogenes Polynom $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ in folgender Art eindeutig zerlegen

$$f = f_{2n} + r^2 f_{2n-2} + \cdots + r^{2n} f_0$$

bzw.

$$f = f_{2n+1} + r^2 f_{2n-1} + \cdots + r^{2n} f_1,$$

je nachdem, ob f Grad $2n$ oder $2n+1$ hat. Die f_i sind eindeutig bestimmte homogene harmonische Polynome vom Grad i (harmonisch bedeutet, dass sie im Kern des Laplace-Operators $\triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ liegen).

Im Anhang A wird ein Algorithmus erklärt, der diese Zerlegung berechnet.

Die harmonischen Polynomfunktionen bezeichnet man auch als die **Kugelflächenfunktionen**. Sie sind aus folgenden zwei Gründen wichtig:

1. Schränkt man die Polynome $\mathbb{R}[x, y, z]$ auf die 2-Sphäre ein, bilden die Kugelflächenfunktionen ein Vertretersystem. Die Einschränkung der Polynome auf die Sphäre liegt zudem dicht in $C^\infty(S^2)$.

2. Auf den Polynomen $\mathbb{R}[x, y, z]$ operiert die orthogonale Gruppe $SO(3)$ in natürlicher Weise. Die homogenen Kugelflächenfunktionen von einem festen Grad n bilden einen irreduziblen $SO(3)$-Modul der Dimension $2n+1$. In den harmonischen Polynomen findet man genau einen irreduziblen Untermodul von jedem Isomorphietyp, den die $SO(3)$ als endlich-dimensionale $SO(3)$-Darstellung zulässt.

Die Gruppenoperation induziert eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$. Dies ist insbesondere deshalb wichtig, weil sich die Lie-Algebra komplexifizieren lässt. Man erhält so die $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Die komplexifizierten Kugelflächenfunktionen bilden dann einen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul. Er zerfällt in irreduzible Untermoduln, die aus den (komplexifizierten) homogenen Polynomen von festen Grad bestehen.

Die endlich-dimensionalen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Moduln haben eine einfache Struktur: Man wählt zunächst in der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ eine Basis $\{E_-, H, E_+\}$, deren Elemente folgendermaßen mit einander verknüpft werden:

$$\begin{aligned} [H, E_+] &= E_+ \\ [H, E_-] &= -E_- \\ [E_+, E_-] &= -2H \end{aligned}$$

Eine Wahl dieser Elemente könnte hier lauten:

$$E_+ = x + iy, \quad E_- = x - iy \text{ und } H = iz,$$

wobei die Lie-Klammer natürlich die Poisson-Klammer ist.

In einem endlich-dimensionalen, irreduziblen Modul lässt sich eine Eigenvektorbasis bzgl. H wählen. Die zugehörigen Eigenwerte reichen entweder von $-n$ bis n oder von $-n+\frac{1}{2}$ bis $n-\frac{1}{2}$. In beiden Fällen sind alle Eigenwerte einfach. Die Dimension solcher Moduln beträgt $2n$ bzw. $2n-1$. Wendet man auf den Eigenvektor zu i das Element E_+ an, landet man im Eigenraum zu $i+1$ (oder im Nullraum, wenn i zu groß ist), wendet man auf diesen Vektor E_- an, landet man entsprechend im Eigenraum zu $i-1$ (oder im Nullraum).

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen irreduziblen n-dimensionalen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul.

Die Kugelflächenfunktionen enthalten nur die Moduln mit ganzzahligen Eigenwerten (bzw. ungerader Dimension).

1.3 Die Struktur der Poisson-Algebra

Die Darstellungstheorie erlaubt es, wichtige Ergebnisse über die Struktur der Poisson-Algebra zu finden.

Dazu wird im folgenden oft von den harmonischen Polynomen stellvertretend für deren Einschränkung auf die Sphäre gesprochen. Dies sollte nach dem oben Gesagten beim Leser zu keiner Verwirrung mehr führen.

Die Poissonklammer sieht für die beiden Monome $x^i y^j z^k$ und $x^l y^m z^n$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \{x^i y^j z^k, x^l y^m z^n\} &= i x^{i-1} y^j z^k \{x, x^l y^m z^n\} + j x^i y^{j-1} z^k \{y, x^l y^m z^n\} + \\ &\quad + k x^i y^j z^{k-1} \{z, x^l y^m z^n\} \\ &= \{x, x^l y^m z^n\} \cdot \partial_x (x^i y^j z^k) + \{y, x^l y^m z^n\} \cdot \partial_y (x^i y^j z^k) + \\ &\quad + \{z, x^l y^m z^n\} \cdot \partial_z (x^i y^j z^k) \\ &= \{x, x\} \cdot \partial_x (x^i y^j z^k) \cdot \partial_x (x^l y^m z^n) + \{x, y\} \cdot \partial_x (x^i y^j z^k) \cdot \partial_y (x^l y^m z^n) + \\ &\quad + \{x, z\} \cdot \partial_x (x^i y^j z^k) \cdot \partial_z (x^l y^m z^n) + \\ &\quad + \{y, x\} \cdot \partial_y (x^i y^j z^k) \cdot \partial_x (x^l y^m z^n) + \{y, y\} \cdot \partial_y (x^i y^j z^k) \cdot \partial_y (x^l y^m z^n) + \\ &\quad + \cdots + \{z, z\} \cdot \partial_z (x^i y^j z^k) \cdot \partial_z (x^l y^m z^n) \\ &= \sum_{\alpha,\beta \in \{x,y,z\}} \{\alpha, \beta\} \cdot \frac{\partial x^i y^j z^k}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x^l y^m z^n}{\partial \beta} \end{aligned}$$

Da die Poissonklammer bilinear ist, kann man also für zwei beliebige Polynome f, g, die Poissonklammer ausdrücken durch

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha,\beta \in \{x,y,z\}} \{\alpha, \beta\} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial \beta}.$$

In dieser Schreibweise sieht die Poissonklammer sehr einfach aus, allerdings ist das Ergebnis der Verknüpfung zweier Kugelflächenfunktionen im allgemeinen nicht mehr harmonisch. Da diese Vertreter für die Funktionen auf der Sphäre sind, muss man, um konsistent mit den Kugelflächenfunktionen zu rechnen auf der rechten Seite der obigen Gleichung eine Projektion auf den harmonischen Anteil nachschalten (s. Anhang A).

Aus der obigen Gleichung kann man aber immerhin folgendes Ergebnis extrahieren:

Lemma: Seien f, g jeweils homogene Kugelflächenfunktionen vom Grad i bzw. j. $\{f, g\}$ lässt sich durch ein harmonisches Polynom darstellen, dessen Grad maximal $i + j - 1$ beträgt. Die Differenz zwischen dem Grad der einzelnen Monome und dem Maximalgrad ist eine gerade Zahl.

Beweis: Die Projektion eines Polynoms auf seine harmonischen Anteile kann dessen Grad nicht vergrößern. Das Ergebnis der Poissonklammer von f und g besteht aus Termen der Art $\{\alpha, \beta\}\partial_\alpha f \partial_\beta g$. In 1.1.3 wurde gezeigt, dass die vordere Klammer die Regeln der $\mathfrak{so}(3)$ erfüllt: Sie liefert also Terme vom Grad eins. Die beiden hinteren Faktoren liefern Terme vom Grad $i - 1$ bzw. $j - 1$ oder Null. Die harmonischen Anteile eines homogenen Polynoms fallen jeweils in zweier Schritten des Grads ab. q.e.d.

Für die Herleitung der Präsentation ist es wichtig Erzeuger für die Poisson-Algebra zu finden:

1.3.1 Erzeuger der Poisson-Algebra

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die Kugelflächenfunktionen vom Grad 2 die ganze Poisson-Algebra generieren.

Lemma: Die Poisson-Klammer ist mit der $\mathfrak{so}(3)$-Operation verträglich.

Beweis: Es soll die Verträglichkeit nur für die Operation vom Element $Z \in \mathfrak{so}(3)$ nachgewiesen werden. Da alle Elemente der Lie-Algebra gleichwertig sind, reicht dies auch aus.

Z operiert auf $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend ist die Darstellung von Z auf $\mathcal{F}(M)$ das Vektorfeld $x\partial_y - y\partial_x$. Ein Monom $x^i y^j z^k$ geht also in $i(-y)x^{i-1}y^j z^k + jx^i xy^{j-1}z^k = (jx^2 - iy^2)x^{i-1}y^{j-1}z^k$ über. Man muss die Gleichheit der folgenden beiden Terme

$$\begin{aligned} Z\left\{x^{a_1}y^{b_1}z^{c_1}, x^{a_2}y^{b_2}z^{c2}\right\} &= Z\Big(\big((a_1b_2 - a_2b_1)z^2 - (a_1c_2 - c_1a_2)y^2 \\ &\quad +(b_1c_2 - c_1b_2)x^2\big)x^{a_1+a_2-1}y^{b_1+b_2-1}z^{c_1+c_2-1}\Big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left\{Z(x^{a_1}y^{b_1}z^{c_1}), x^{a_2}y^{b_2}z^{c2}\right\} + \\ &+\left\{x^{a_1}y^{b_1}z^{c_1}, Z(x^{a_2}y^{b_2}z^{c2})\right\} = \left\{(b_1x^2 - a_1y^2)x^{a_1-1}y^{b_1-1}z^{c_1}, x^{a_2}y^{b_2}z^{c2}\right\} + \\ &\qquad + \left\{x^{a_1}y^{b_1}z^{c_1}, (b_2x^2 - a_2y^2)x^{a_2-1}y^{b_2-1}z^{c2}\right\} \end{aligned}$$

prüfen. Die Rechnung ist lang und erfordert keine besonderen Einfälle, deshalb sei hier nur festgehalten, dass die beiden Ausdrücke in der Tat gleich sind. q.e.d.

Die gerade gezeigte Aussage ermöglicht das folgende Lemma.

Lemma: Die Poisson-Klammer bildet einen $\mathfrak{so}(3)$-Morphismus vom Tensorprodukt $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$ in den Raum $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$, wobei mit $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3)$ die Kugelflächenfunktionen bezeichnet seien.

Beweis: Die Poisson-Klammer bildet $f \otimes g$ auf $\{f, g\}$ ab. Sei $X \in \mathfrak{so}(3)$.

$$\begin{aligned} X\big(\{\cdot,\cdot\}(f \otimes g)\big) &= X\{f,g\} = \{Xf, g\} + \{f, Xg\} \\ &= \{\cdot,\cdot\}((Xf) \otimes g) + \{\cdot,\cdot\}(f \otimes (Xg)) \\ &= \{\cdot,\cdot\}((Xf) \otimes g + f \otimes (Xg)) \\ &= \{\cdot,\cdot\}(X(f \otimes g)) \qquad\qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Für die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ kennt man die Zerlegung des Tensorproduktes irreduzibler Moduln in ebensolche. Dies legt es nahe, die Kugelflächenfunktionen zu komplexifizieren und als $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul zu betrachten. Die in diesem Abschnitt bisher gemachten Folgerungen gelten weiterhin, denn die durchgeführten Rechnung sind $\mathbb{C}$-linear.

Die Zerlegung des Tensorproduktes der irreduziblen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Moduln V_i und V_j, wobei der Index den höchsten H-Eigenwert in diesem Raum bezeichnet (siehe oben), lautet

$$V_i \otimes V_j \cong \oplus_{k=|i-j|}^{i+j} V_k.$$

Das Lemma von Schur sagt, dass das Bild eines irreduziblen Moduls unter einem Morphismus entweder zu diesem Raum isomorph oder Null ist.

Nun hat man alle Voraussetzungen gesammelt, um zu zeigen, dass die (komplexifizierten) Kugelflächenfunktionen vom Grad 2 $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ die ganze (komplexifizierte) Poisson-Algebra erzeugen.

Man bilde die Poisson-Klammer aus $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ mit sich selber. Aufgrund der Zerlegung des Tensorproduktes kann sich für das Bild maximal

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{H}_3(\mathbb{R}^3)$$

ergeben.

Lemma:

$$\{\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3), \mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)\} = \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{H}_3(\mathbb{R}^3).$$

Beweis: Es reicht im Bild der Poisson-Klammer je ein Element zu finden, das in $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\mathcal{H}_3(\mathbb{R}^3)$ liegt. Mit dem Schurschen Lemma folgt dann nämlich, dass das Bild nicht Null ist, also dass der ganze irreduzible Modul im Bild liegt. Man berechne die Klammer aus $f = 2x^2 - y^2 - z^2$ und $g = 2y^2 - x^2 - z^2$.

$$\{f, g\} = 36xyz.$$

Hierbei handelt es sich um ein harmonisches Polynom, man hat also ein Element aus $\mathcal{H}_3(\mathbb{R}^3)$ gefunden. Nun bildet man z.B. die Klammer aus $f = xy$ und $g = yz$. Man erhält

$$\{f, g\} = x^2y + yz^2 - y^3 = \frac{2}{5} \cdot (3x^2y + 3yz^2 - 2y^3) - \frac{r^2}{5} \cdot y.$$

Die harmonische Zerlegung zeigt, dass ein Teil des Ergebnisses in $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^3)$ liegt. Aus Dimensionsgründen folgt, dass $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ nicht im Bild liegt. Das antisymmetrische Tensorprodukt eines 5-dimensionalen Vektorraumes mit sich selbst hat nämlich Dimension $5 \cdot (5-1)/2 = 10 = 3 + 7$ und die Poisson-Klammer ist antisymmetrisch. q.e.d.

Lemma: Die Poisson-Klammer aus $\mathcal{H}_{2n}(\mathbb{R}^3)$ und $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ enthält $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Es reicht erneut aus die Existenz eines Elements aus $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$ im Bild zu zeigen. Das folgende Polynom liegt in $\mathcal{H}_{2n}(\mathbb{R}^3)$

$$f_{2n} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{(2(n-i))!} \frac{1}{4^i (i!)^2} (x^2 + y^2)^i z^{2(n-i)}.$$

Um dies zu zeigen benutzt man die Formel

$$\begin{aligned}
\triangle(x^2+y^2)^j &= (\partial_x^2+\partial_y^2)(x^2+y^2)^j \\
&= \partial_x j(x^2+y^2)^{j-1}2x+\partial_y j(x^2+y^2)^{j-1}y \\
&= 2j(x^2+y^2)^{j-1}+2jx(j-1)(x^2+y^2)^{j-2}2x \\
&\qquad +2j(x^2+y^2)^{j-1}+2jy(j-1)(x^2+y^2)^{j-2}2y \\
&= 4j(x^2+y^2)^{j-1}+4j(j-1)(x^2+y^2)^{j-1} \\
&= 4j^2(x^2+y^2)^{j-1}
\end{aligned}$$

und rechnet dann nach

$$\begin{aligned}
\triangle f_{2n} &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}\triangle(x^2+y^2)^i z^{2(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}\Big(z^{2(n-i)}(\partial_x^2+\partial_y^2)(x^2+y^2)^i + \\
&\qquad +(x^2+y^2)^i\partial_z^2 z^{2(n-i)}\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}2(n-i)(2(n-i)-1)(x^2+y^2)^i z^{2(n-i-1)} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}4i^2(x^2+y^2)^{i-1}z^{2(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i-1))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}(x^2+y^2)^i z^{2(n-i-1)} \\
&\quad +\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^{i-1}((i-1)!)^2}(x^2+y^2)^{i-1}z^{2(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i-1))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}(x^2+y^2)^i z^{2(n-i-1)} \\
&\quad +\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{1}{(2(n-(i+1)))!}\frac{1}{4^{i+1-1}((i+1-1)!)^2}(x^2+y^2)^{i+1-1}z^{2(n-(i+1))} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i-1))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}(x^2+y^2)^i z^{2(n-i-1)} \\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i-1))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}(x^2+y^2)^i z^{2(n-i-1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung führt manfolgende Substitutionen durch (auf der Sphäre gilt natürlich die Gleichung $x^2+y^2+z^2=1$)

$$\begin{aligned}
f_{2n} &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}\underbrace{(x^2+y^2)^i}_{(1-z^2)^i}z^{2(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}z^{2j}z^{2(n-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i i!j!(i-j)!}z^{2(n+j-i)}
\end{aligned}$$

Man bildet nun die Klammer $\{E_+f_2, E_-f_{2n}\}$. Dabei benutzt man

$$\begin{aligned} E_+z^n &= \{x+iy, z^n\} = nz^{n-1}(ix-y) \\ E_-z^n &= \{x-iy, z^n\} = -nz^{n-1}(ix+y) \end{aligned}$$

und erhält für E_+f_2 den (harmonischen) Ausdruck $\frac{3}{2}z(ix-y)$. Insgesamt wird die Rechnung also

$$\begin{aligned}
\{3/2 \cdot z(ix-y), E_-f_{2n}\} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}\frac{3}{2(2(n-j))!}\frac{1}{4^j j!k!(j-k)!}\{z(ix-y), E_-z^{2(n+k-j)}\} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k}\frac{3}{2(2(n-j))!}\frac{-2(n+k-j)}{4^j j!k!(j-k)!}\{z(ix-y), (ix+y)z^{2(n+k-j)-1}\} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k+1}\frac{3}{(2(n-j))!}\frac{(n+k-j)}{4^j j!k!(j-k)!}\{z(ix-y), (ix+y)z^{2(n+k-j)-1}\} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k+1}\frac{3}{(2(n-j))!}\frac{(n+k-j)}{4^j j!k!(j-k)!}\cdot\big(\{z(ix-y), ix+y\}+ \\
&\qquad +(2(n+k-j)-1)(ix+y)\{ix-y, z\}\big)z^{2(n+k-j)-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k+1}\frac{3}{(2(n-j))!}\frac{(n+k-j)}{4^j j!k!(j-k)!}\cdot\big(2z^2+(ix-y)(iy-x)- \\
&\qquad -(2(n+k-j)-1)(ix+y)(x+iy)\big)z^{2(n+k-j)-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k+1}\frac{3}{(2(n-j))!}\frac{(n+k-j)}{4^j j!k!(j-k)!}\cdot\big(2z^2- \\
&\qquad -2i(n+k-j)\underbrace{(x^2+y^2)}_{=1-z^2}\big)z^{2(n+k-j)-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k+1}\frac{3}{(2(n-j))!}\frac{(n+k-j)}{4^j j!k!(j-k)!}\cdot \\
&\qquad \cdot\big(2(1+i(n+k-j))z^{2(n+k-j)+1}-2i(n+k-j)z^{2(n+k-j)-1}\big)
\end{aligned}$$

Für das, was zu zeigen ist, spielen nur die Terme von maximalem Grad eine Rolle. Man muss das soeben erhaltene Ergebnis noch auf die harmonischen Anteile projizieren, dabei kann aber der Grad nur verkleinert nie vergrößert werden. Es soll bewiesen werden, dass die Terme von maximalen Grad einen Anteil in $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$ besitzen.

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{2j+1}\frac{3}{(2(n-j))!}\frac{n}{4^j j!j!}\cdot 2(1+ni)z^{2n+1} = -6n(1+in)z^{2n+1}\cdot\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(2(n-j))!}\frac{1}{4^j j!j!}$$

Der Koeffizient von z^{2n+1} ist also ungleich Null. Wenn z^{2n+1} keinen Anteil in $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$ hätte, ließe es sich durch eine Polynomdivision mit $r^2 = (x^2+y^2+z^2)$ teilen. Dies ist aber nicht der Fall. q.e.d.

Analog muss man das gleiche Lemma für die ungeraden Kugelflächenfunktionen zeigen:

Lemma: Die Poisson-Klammer aus $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$ und $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ enthält $\mathcal{H}_{2n+2}(\mathbb{R}^3)$.

Beweis: Man muss die Existenz eines Elements aus $\mathcal{H}_{2n+2}(\mathbb{R}^3)$ im Bild zeigen. Das folgende Polynom liegt in $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$

$$f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{(2(n-i))!}\frac{1}{4^i(i!)^2}(x^2+y^2)^i z^{2(n-i)+1}.$$

Man rechnet nun mit dieser Funktion alles analog zu oben aus. q.e.d.

Fazit: Mit Induktion schließt man jetzt, dass die Kugelflächenfunktionen von Grad 2 mit der Poisson-Klammer alle anderen harmonischen Polynome erzeugen.

Man hat also eine Lie-Algebra mit fünf Generatoren, in der zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ genau ein irreduzibler $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul der Dimension $2n+1$ liegt. Die Verknüpfung des irreduziblen Moduls $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\mathcal{H}_{2n}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{H}_2(\mathbb{R}^3)$ enthält $\mathcal{H}_{2n+2}(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\mathcal{H}_{2n+1}(\mathbb{R}^3)$ als irreduzible Moduln maximaler Dimension.

Die gerade gemachten Aussagen werden sich als die fundamentalen Kriterien im folgenden Kapitel herausstellen. Sie ermöglichen es die Isomorphie zwischen der Poisson-Algebra und der dort vorgestellten Präsentation zu zeigen.

Kapitel 2

Die Präsentation der (polynomialen) Poisson-Algebra auf der 2-Sphäre

In Abschnitt 2.1 wird ein möglicher Kandidat für die Präsentation der Poisson-Algebra "hergeleitet". In der folgenden Sektion wird bewiesen, dass die in 2.1 gefundenen Relationen ausreichend sind.

2.1 Die Relationen

Man betrachtet zunächst einmal die freie Lie-Algebra mit den fünf Erzeugern

$$F_{--}, F_{-}, F_0, F_+ \text{ und } F_{++}.$$

Diese fünf Elemente sollen den fünf-dimensionalen Modul bilden, der in der Poisson-Algebra aus den harmonischen Polynome vom Grad 2 besteht (s. 1.3).

F_0 entspreche dabei dem im Kern von H liegenden Element $z^2 - 1/2(x^2 + y^2)$. Die übrigen Erzeuger seien die Gegenstücke der durch folgende Definitionen festgelegten Polynome:

$$F_- := E_- F_0, \quad F_{--} := E_- F_-, \quad F_+ := E_+ F_0 \text{ und } F_{++} := E_+ F_+.$$

Es gilt nun die freie Lie-Algebra durch Relationen so zu verformen, dass sie zu der Poisson-Algebra isomorph wird.

Das Produkt der Erzeuger untereinander bildet eine Schicht der Dimension 10 $(5 \cdot 4/2)$. In der Poisson-Algebra zerfallen diese Produkte in die harmonischen Polynome vom Grad 3 (also einem 7-dimensionalen Modul) und den Polynomen vom Grad 1 (also einem 3-er Modul).

Die ersten gewählten Relationen werden es ermöglichen, der präsentierten Lie-Algebra die $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul-Struktur zu geben, die man auch im Vorbild wiederfindet.

Man geht von folgenden Beziehungen aus, die man der Poisson-Algebra entnommen hat und deren dortige Gültigkeit man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} 2[F_+, F_-] + [F_{++}, F_{--}] &= -36H \\ 6[F_0, F_+] + [F_-, F_{++}] &= 18E_+ \\ 6[F_0, F_-] + [F_+, F_{--}] &= 18E_- \end{aligned}$$

Der Nachweis der ersten Gleichung soll exemplarisch vorgeführt werden.

$$2\{E_+F_0, E_-F_0\} + \{E_+E_+F_0, E_-E_-F_0\} + 36H \quad =$$

$$
\begin{aligned}
2\Big\{\{x+iy,z^2-1/2x^2-1/2y^2\},\{x-iy,z^2-1/2x^2-1/2y^2\}\Big\}+&\\
+\{E_+E_+F_0,E_-E_-F_0\}+36iz &=\\
=\frac{1}{2}\{6ixz-6yz,-6ixz-6yz\}+\frac{1}{4}\Big\{6\{x+iy,ixz-yz\},-6\{x-iy,ixz+yz\}\Big\}+36iz &=\\
=\{3ixz,-3yz\}+\{-3yz,-3ixz\}-9\{y^2-2ixy-x^2,x^2-2ixy-y^2\}+36iz &=\\
=-36i\{xz,yz\}-9\{y^2,x^2\}+18i\{y^2,xy\}+18i\{xy,x^2\}-&\\
-18i\{xy,y^2\}-18i\{x^2,xy\}-9\{x^2,y^2\}+36iz &=\\
=-36i(z^3-zx^2-y^2z)+36iy\{y^2,x\}+36ix\{y,x^2\}+9iz &=\\
=-36i(z^3-zx^2-y^2z)-72iy^2z-72ix^2z+36iz &=\\
=36iz(-(z^2-x^2-y^2)-2y^2-2x^2+1) &=\\
=-36iz(z^2+y^2+x^2-1) &=\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Die Elemente H, E_+ und E_- sind zunächst einmal in der abstrakten Algebra nicht definiert, aber man weiss, wie deren Wirkung auf die fünf Erzeuger in der Poisson-Algebra aussehen soll. Indem man also die drei obigen Gleichungen auf die Erzeuger anwendet, erhält man die folgenden 15 Gleichungen, die man als erste Relationen in die abstrakte Lie-Algebra einfließen lässt.

$$
\begin{aligned}
2[[F_+,F_-],F_0]+[[F_{++},F_{--}],F_0] &= 0\\
2[[F_+,F_-],F_+]+[[F_{++},F_{--}],F_+] &= -36F_+\\
2[[F_+,F_-],F_{++}]+[[F_{++},F_{--}],F_{++}] &= -72F_{++}\\
2[[F_+,F_-],F_-]+[[F_{++},F_{--}],F_-] &= 36F_-\\
2[[F_+,F_-],F_{--}]+[[F_{++},F_{--}],F_{--}] &= 72F_{--}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[[F_{++},F_-],F_0]+6[[F_+,F_0],F_0] &= -18F_+\\
[[F_{++},F_-],F_+]+6[[F_+,F_0],F_+] &= -18F_{++}\\
[[F_{++},F_-],F_{++}]+6[[F_+,F_0],F_{++}] &= 0\\
[[F_{++},F_-],F_-]+6[[F_+,F_0],F_-] &= 108F_0\\
[[F_{++},F_-],F_{--}]+6[[F_+,F_0],F_{--}] &= 72F_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[[F_+,F_{--}],F_0]+6[[F_0,F_-],F_0] &= 18F_-\\
[[F_+,F_{--}],F_+]+6[[F_0,F_-],F_+] &= -108F_0\\
[[F_+,F_{--}],F_{++}]+6[[F_0,F_-],F_{++}] &= -72F_+\\
[[F_+,F_{--}],F_-]+6[[F_0,F_-],F_-] &= 18F_{--}\\
[[F_+,F_{--}],F_{--}]+6[[F_0,F_-],F_{--}] &= 0
\end{aligned}
$$

Im folgenden wird oft auf Ausdrücke der abstrakten Lie-Algebra eines der Elemente E_-, E_+ oder H angewendet werden. Streng genommen muss man dazu die am Anfang dieses Abschnitts genannten Gleichungen als Definition dieser Operatoren betrachten und dann jeweils den Kommutator mit diesen Termen bilden. Dies ist jedoch für die Rechnung nicht nötig, wenn man einsieht, dass sich die Operatoren mit den 15 obigen Relationen genau so verhalten, wie die entsprechenden in der Poisson-Algebra. Leider wirken obige Gleichungen etwas einschüchternd, was zu einem Teil an der Schreibweise mit Erzeugern liegt, zum anderen daran, dass alle Kombinationen aufgeschrieben werden mussten. Deshalb sollen hier zwei Beispiele angegeben werden, die einem die Angst nehmen sollen:

$$\begin{aligned}
E_+F_{--} &= [\frac{6}{18}[F_0,F_+]+\frac{1}{18}[F_-,F_{++}],F_{--}] \\
&= \frac{6}{18}[[F_0,F_+],F_{--}]+\frac{6}{18}[[F_+,F_0],F_{--}]-\frac{72}{18}F_- \\
&= -4F_- \\
H[F_{--},F_-] &\overset{\text{Jacobi}}{=} [HF_{--},F_-]+[F_{--},HF_-] \\
&= -\frac{72}{36}[F_{--},F_-]-\frac{36}{36}[F_{--},F-] \\
&= -3[F_{--},F_-]
\end{aligned}$$

Die ersten drei Schichten der abstrakten Lie-Algebra haben nun folgende Form, wie man sich mit dem Computer-Programm (siehe Anhang B) ausrechnen lässt:

Schicht	Dimension	Moduln
1	5	5
2	10	3,7
3	25	5, 9, 11

Da in der dritten Schicht, die ja das Produkt aus der zweiten und der ersten Schicht ist, in der Poisson-Algebra lediglich harmonische Polynome vom Grad drei liegen und diese nur einen 9-dimensionalen Modul bilden, nimmt man nun Gleichungen hinzu, um den 11-dimensionalen Modul in der dritten Schicht zu zerstören.

Dies fällt relativ leicht, denn es gibt nur einen Vektor zum H-Eigenwert 5 in der dritten Schicht: $[F_{++},[F_+,F_{++}]]$ (Man kann, um den Eigenwert eines Wortes zu bestimmen, einfach alle Indizes addieren).

Durch sukzessive Anwendung von E_- erhält man alle Basisvektoren dieses Moduls[1].

Die so gebildeten Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
0 &= [F_{++},[F_+,F_{++}]] \\
0 &= 2[F_+,[F_+,F_{++}]]+3[F_{++},[F_0,F_{++}]] \\
0 &= 4[F_0,[F_+,F_{++}]]+4[F_{++},[F_0,F_+]]+ \\
&\quad +8[F_+,[F_0,F_{++}]]-[F_{++},[F_-,F_{++}]] \\
0 &= 8[F_{++},[F_-,F_+]]+12[F_+,[F_-,F_{++}]]- \\
&\quad -48[F_+,[F_0,F_+]]-72[F_0,[F_0,F_{++}]]+ \\
&\quad +4[F_-,[F_+,F_{++}]]-[F_{++},[F_{--},F_{++}]] \\
0 &= [F_{--},[F_+,F_{++}]]-8[F_+,[F_-,F_+]]- \\
&\quad -12[F_{++},[F_-,F_0]]+3[F_{++},[F_{--},F_+]]+ \\
&\quad +144[F_0,[F_0,F_+]]+4[F_+,[F_{--},F_{++}]]- \\
&\quad -24[F_+,[F_-,F_+]]-24[F_-,[F_0,F_{++}]]- \\
&\quad -36[F_0,[F_-,F_{++}]] \\
0 &= 16[F_0,[F_-,F_+]]+8[F_+,[F_-,F_0]] \\
&\quad +8[F_-,[F_0,F_+]]-2[F_+,[F_{--},F_+]] \\
&\quad -2[F_0,[F_{--},F_{++}]]-2[F_-,[F_-,F_{++}]] \\
&\quad -[F_{--},[F_0,F_{++}]]-[F_{++},[F_{--},F_0]] \\
0 &= 144[F_0,[F_-,F_0]]-36[F_0,[F_{--},F_+]]-
\end{aligned}$$

[1] Die Rechenregeln lauten $E_-F_{--}=0$, $E_-F_-=F_{--}$, $E_-F_0=F_-$, $E_-F_+=-6F_0$ und $E_-F_{++}=-4F_+$.

$$
\begin{aligned}
& -24[F_+,[F_{--},F_0]]-12[F_{--},[F_0,F_+]]+\\
& +3[F_{--},[F_-,F_{++}]]+4[F_-,[F_{--},F_{++}]]-\\
& -32[F_-,[F_-,F_+]]+[F_{++},[F_{--},F_-]]\\
0 \;\;=\;\; & 72[F_0,[F_{--},F_0]]+48[F_-,[F_-,F_0]]-\\
& -8[F_{--},[F_-,F_+]]-12[F_-,[F_{--},F_+]]-\\
& -4[F_+,[F_{--},F_-]]+[F_{--},[F_{--},F_{++}]]\\
0 \;\;=\;\; & 8[F_-,[F_{--},F_0]]+4[F_{--},[F_-,F_0]]+\\
& +4[F_0,[F_{--},F_-]]-[F_{--},[F_{--},F_+]]0\\
0 \;\;=\;\; & 3[F_{--},[F_{--},F_0]]+2[F_-,[F_{--},F_-]]\\
0 \;\;=\;\; & [F_{--},[F_{--},F_-]]
\end{aligned}
$$

Für diese 11 Gleichungen und die anderen fünfzehn vorher lohnt es sich die Worte nach einer Hall-Basis (Hall-Basen stellen eine Möglichkeit dar, eine Basis einer freien Lie-Algebra zu berechnen. Siehe dazu auch Anhang B) zu entwickeln und dann das lineare Gleichungssystem einem Gauß-Verfahren zu unterziehen. Man erhält so die Relationen (auf der rechten Seite wäre jeweils "gleich Null" zu ergänzen):

$$
\begin{aligned}
[F_{++},[F_+,F_{++}]]\\
[F_{--},[F_{--},F_-]]\\
[F_0,[F_{--},F_{++}]]\\
[F_0,[F_-,F_+]]\\
2[F_+,[F_+,F_{++}]]+3[F_{++},[F_0,F_{++}]]\\
2[F_+,[F_0,F_{++}]]+[F_{++},[F_0,F_+]]\\
[F_{++},[F_-,F_{++}]]+6[F_{++},[F_0,F_+]]\\
[F_{--},[F_{--},F_+]]-4[F_0,[F_{--},F_-]]\\
-3[F_-,[F_{--},F_0]]+[F_0,[F_{--},F_-]]\\
3[F_{--},[F_{--},F_0]]+2[F_-,[F_{--},F_-]]\\
[F_+,[F_-,F_{++}]]+6[F_+,[F_0,F_+]]+18F_{++}\\
2[F_0,[F_-,F_{++}]]+[F_+,[F_-,F_+]]+18F_+\\
[F_-,[F_-,F_{++}]]-6[F_+,[F_-,F_0]]-108F_0\\
[F_{++},[F_{--},F_{++}]]+2[F_{++},[F_-,F_+]]+72F_{++}\\
[F_+,[F_{--},F_{++}]]+2[F_+,[F_-,F_+]]+36F_+\\
-12[F_0,[F_0,F_+]]+[F_+,[F_-,F_+]]-18F_+\\
[F_{++},[F_{--},F_+]]+6[F_{++},[F_-,F_0]]+72F_+\\
[F_+,[F_{--},F_+]]+6[F_+,[F_-,F_0]]+108F_0\\
5[F_-,[F_{--},F_{++}]]-12[F_+,[F_{--},F_0]]-2[F_{++},[F_{--},F_-]]-144F_-\\
5[F_{--},[F_{--},F_{++}]]+24[F_0,[F_{--},F_0]]-8[F_+,[F_{--},F_-]]-288F_{--}\\
-12[F_0,[F_0,F_{++}]]-24[F_+,[F_0,F_+]]+[F_{++},[F_-,F_+]]-36F_{++}\\
5[F_-,[F_-,F_+]]+6[F_+,[F_{--},F_0]]+[F_{++},[F_{--},F_-]]-18F_-\\
-10[F_0,[F_{--},F_+]]+6[F_+,[F_{--},F_0]]+[F_{++},[F_{--},F_-]]+72F_-\\
-5[F_-,[F_{--},F_+]]+12[F_0,[F_{--},F_0]]+[F_+,[F_{--},F_-]]+36F_{--}\\
60[F_0,[F_-,F_0]]+6[F_+,[F_{--},F_0]]+[F_{++},[F_{--},F_-]]-108F_-\\
30[F_-,[F_-,F_0]]+12[F_0,[F_{--},F_0]]+[F_+,[F_{--},F_-]]-54F_{--}
\end{aligned}
$$

Schaut man sich erneut die ersten drei Schichten der abstrakten Lie-Algebra an, findet man das erwartete Ergebnis. Aber auch in den folgenden drei Schichten scheinen keine größeren Moduln als die erlaubten zu liegen (die n-te Schicht enthält in der Poisson-Algebra nur Polynome von Grad $n+1$ und somit hat der Modul in der entsprechenden Schicht Dimension $2n+1$):

Schicht	Dimension	Moduln
1	5	5
2	10	3,7
3	14	5, 9
4	26	3, 5, 7, 11
5	52	1, 3, 5, 5, 7, 9, 9, 13
6	97	3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 7,
		9, 9, 11, 11, 15

Der nächste (und letzte) Schritt ist wohl klar: Der fünf-dimensionale Modul in der dritten Schicht muss entweder zu Null gesetzt werden oder er muss auf geeignete Weise mit den fünf Erzeugern identifiziert werden.

Durch Nachrechnen in der Poisson-Algebra findet man die folgenden fünf Gleichungen:

$$\begin{aligned}
14[F_+,[F_-,F_{++}]]+[F_{++},[F_{--},F_{++}]]-&\\
-4[F_{++},[F_-,F_+]]-10[F_+,[F_-,F_{++}]]+&\\
+36[F_0,[F_0,F_{++}]]+24[F_+,[F_0,F_+]] &= -360F_{++}\\
3[F_0,[F_-,F_{++}]]+6[F_+,[F_-,F_+]]+&\\
+6[F_{++},[F_-,F_0]]-2[F_{++},[F_{--},F_+]]+&\\
+9[F_-,[F_0,F_{++}]]-72[F_0,[F_0,F_+]] &= 360F_+\\
18[F_{++},[F_{--},F_0]]+14[F_+,[F_{--},F_+]]-&\\
-60[F_+,[F_-,F_0]]+3[F_0,[F_{--},F_{++}]]-&\\
-120[F_0,[F_-,F_+]]+12[F_-,[F_-,F_{++}]]-&\\
-108[F_-,[F_0,F_+]]+9[F_{--},[F_0,F_{++}]] &= -2160F_0\\
6[F_{++},[F_{--},F_-]]-72[F_+,[F_{--},F_0]]-&\\
-72[F_0,[F_{--},F_+]]+360[F_0,[F_-,F_0]]+&\\
+5[F_-,[F_{--},F_{++}]]-92[F_-,[F_-,F_+]]-&\\
-48[F_{--},[F_0,F_+]]+7[F_{--},[F_-,F_{++}]] &= -720F_-\\
306[F_0,[F_{--},F_0]]-24[F_+,[F_{--},F_-]]-&\\
-46[F_-,[F_{--},F_+]]+228[F_-,[F_-,F_0]]+&\\
+3[F_{--},[F_{--},F_{++}]]-42[F_{--},[F_-,F_+]] &= -180F_{--}
\end{aligned}$$

Erneut lohnt es sich für die 31 bisher aufgestellten Relationen die Worte in die Form des Hall-Systems umzuformen und dann das lineare Gleichungssystem einem Gauß-Verfahren zu unterziehen. Man erhält so die endgültigen Relationen:

$$[F_{++},[F_+,F_{++}]] \tag{2.1}$$
$$[F_{--},[F_{--},F_-]] \tag{2.2}$$
$$[F_0,[F_{--},F_{++}]] \tag{2.3}$$
$$[F_0,[F_-,F_+]] \tag{2.4}$$
$$2[F_+,[F_+,F_{++}]]+3[F_{++},[F_0,F_{++}]] \tag{2.5}$$
$$2[F_+,[F_0,F_{++}]]+[F_{++},[F_0,F_+]] \tag{2.6}$$
$$[F_{++},[F_-,F_{++}]]+6[F_{++},[F_0,F_+]] \tag{2.7}$$
$$3[F_{--},[F_{--},F_{++}]]-8[F_+,[F_{--},F_-]] \tag{2.8}$$

$$[F_{--},[F_{--},F_+]]-4[F_0,[F_{--},F_-]] \tag{2.9}$$
$$[F_0,[F_{--},F_-]]-3[F_-,[F_{--},F_0]] \tag{2.10}$$
$$3[F_{--},[F_{--},F_0]]+2[F_-,[F_{--},F_-]] \tag{2.11}$$
$$[F_{++},[F_-,F_+]]-6[F_0,[F_0,F_{++}]]-36F_{++} \tag{2.12}$$
$$[F_{++},[F_-,F_+]]-4[F_+,[F_-,F_{++}]]-108F_{++} \tag{2.13}$$
$$[F_{++},[F_-,F_+]]+24[F_+,[F_0,F_+]]-36F_{++} \tag{2.14}$$
$$[F_{++},[F_{--},F_{++}]]+2[F_{++},[F_-,F_+]]+72F_{++} \tag{2.15}$$
$$4[F_0,[F_-,F_{++}]]+3[F_{++},[F_-,F_0]]-36F_+ \tag{2.16}$$
$$[F_+,[F_{--},F_{++}]]+3[F_{++},[F_-,F_0]]-36F_+ \tag{2.17}$$
$$[F_{++},[F_-,F_0]]-8[F_0,[F_0,F_+]]-36F_+ \tag{2.18}$$
$$3[F_{++},[F_-,F_0]]-2[F_+,[F_-,F_+]]-72F_+ \tag{2.19}$$
$$[F_{++},[F_{--},F_+]]+6[F_{++},[F_-,F_0]]+72F_+ \tag{2.20}$$
$$2[F_+,[F_{--},F_+]]-3[F_{++},[F_{--},F_0]]-432F_0 \tag{2.21}$$
$$[F_{++},[F_{--},F_0]]+4[F_+,[F_-,F_0]]+216F_0 \tag{2.22}$$
$$2[F_-,[F_-,F_{++}]]+3[F_{++},[F_{--},F_0]]+432F_0 \tag{2.23}$$
$$[F_{++},[F_{--},F_-]]+4[F_0,[F_{--},F_+]]+144F_- \tag{2.24}$$
$$[F_{++},[F_{--},F_-]]-24[F_0,[F_-,F_0]]+216F_- \tag{2.25}$$
$$12[F_+,[F_{--},F_0]]+7[F_{++},[F_{--},F_-]]+864F_- \tag{2.26}$$
$$[F_{++},[F_{--},F_-]]-2[F_-,[F_-,F_+]]+180F_- \tag{2.27}$$
$$[F_-,[F_{--},F_{++}]]+[F_{++},[F_{--},F_-]]+144F_- \tag{2.28}$$
$$[F_+,[F_{--},F_-]]-18[F_-,[F_-,F_0]]-54F_{--} \tag{2.29}$$
$$[F_+,[F_{--},F_-]]+3[F_-,[F_{--},F_+]]-108F_{--} \tag{2.30}$$
$$9[F_0,[F_{--},F_0]]+2[F_+,[F_{--},F_-]]-108F_{--} \tag{2.31}$$

Das Computer-Programm liefert für die folgenden Schichten die Modul-Struktur

Schicht	Dimension	Moduln
1	5	5
2	10	3,7
3	9	9
4	11	11
5	13	13
6	15	15

Man scheint also die richtigen Relationen gefunden zu haben. Dies wird sich in dem folgenden Abschnitt bestätigen.

2.2 Beweis

Nachdem ein Kandidat für die Präsentation gefunden ist, besteht die weitere Aufgabe darin, zu zeigen, dass diese Algebra tatsächlich isomorph zu der gegebenen ist.

Mit einer Induktion soll gezeigt werden, dass das Produkt der fünf Erzeuger mit den Elementen der n-ten Schicht nur $2n+3$ neue Wörter liefert und dass diese einen irreduziblen Modul aufspannen.

Die Induktionsvoraussetzungen seien folgende:

1. Jede Schicht i mit $3 \leq i \leq n$ bildet einen irreduziblen Modul. Sein Höchstgewicht ist $i+1$ und seine Dimension entsprechend $2n+3$.

2. Insbesondere gibt es in der i-ten Schicht keine Elemente vom Gewicht $i+2$ oder größer.
3. Es gilt für die folgenden Wörter der Länge $i \geq 3$ die Gleichung

$$[F_0,[F_+,[\cdots[F_+,[F_+,F_{++}]]]]] = \frac{i}{i-2}[F_+,[F_0,[F_+,[\cdots[F_+,F_{++}]]]]].$$

4. Der Höchstgewichtsvektor in der i-ten Schicht lässt sich durch $[F_+,[\cdots[F_+,F_{++}]]]$ repräsentieren.

Induktionsanfang:
1. Die dritte Schicht besteht aus einem irreduziblen Modul der Dimension neun, denn: Weil man 31 Relationen der Länge drei hat und die dritte Schicht in der freien Lie-Algebra Dimension 40 besitzt, beträgt die maximale Dimension 9. Die Irreduzibilität dieses Moduls findet man in der Poisson-Algebra.
2. Für die ersten drei Schichten ist dies in 2.1 geklärt worden.
3. Für Länge drei berechnet man

$$\begin{aligned}
[F_0,[F_+,F_{++}]] &\overset{\text{Jacobi}}{=} [[F_0,F_+],F_{++}] + [F_+,[F_0,F_{++}]] \\
&= -\underbrace{[F_{++},[F_0,F_+]]}_{\overset{(2.6)}{=}-2[F_+,[F_0,F_{++}]]} + [F_+,[F_0,F_{++}]] \\
&= 3[F_+,[F_0,F_{++}]]
\end{aligned}$$

4. Für Länge 1 ist das Wort mit dem größten Eigenwert F_{++}.
Für Länge 2 ist das Wort mit dem größten Eigenwert $[F_+,F_{++}]$, da $[F_{++},F_{++}]=0$.
Für Länge 3 ist das Wort mit dem größten Eigenwert, das in einem Hall-System liegt, $[F_{++},[F_+,F_{++}]] \overset{(2.1)}{=} 0$. Die Elemente, die den nächsthöheren Eigenwert haben, sind

$$[F_+,[F_+,F_{++}]] \text{ und } [F_{++},[F_0,F_{++}]].$$

Wegen (1) ist mindestens einer von ihnen ungleich Null. Mit der Relation (2.5) findet man aber die lineare Abhängigkeit zwischen ihnen.

Induktionsschritt: Die Darstellungstheorie erlaubt es schon eine beträchtliche Einschränkung an das Produkt der 5 Erzeuger und der n-ten Schicht zu machen.

Man kann nämlich eine Eigenvektorbasis bzgl. eines Elements $H \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ für die beiden Moduln wählen und es gilt:

$$H[v_i,w_j] = [Hv_i,w_j] + [v_i,Hw_j] = (i+j)[v_i,w_j],$$

d.h. das Produkt der beiden H-Eigenvektoren ist wieder ein H-Eigenvektor.

Dem entsprechend kann man das Lie-Produkt der beiden Moduln als Untermodul des Tensorproduktes auffassen:

$$[V_5,V_{2n+3}] \subseteq_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})} V_5 \otimes V_{2n+3}.$$

Anhand der folgenden Tabelle sieht man leicht, wie das Tensorprodukt in irreduzible Moduln zerfällt:

	$-n-1$	$-n$	$-n+1$	$-n+2$	$-n+3$	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$n+1$
2	$-n+1$	$-n+2$	$-n+3$	$-n+4$	$-n+5$	$\cdots$	2	$\cdots$	$n+2$	$n+3$
1	$-n$	$-n+1$	$-n+2$	$-n+3$	$-n+4$	$\cdots$	1	$\cdots$	$n+1$	$n+2$
0	$-n-1$	$-n$	$-n+1$	$-n+2$	$-n+3$	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$n+1$
-1	$-n-2$	$-n-1$	$-n$	$-n+1$	$-n+2$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$n-1$	n
-2	$-n-3$	$-n-2$	$-n-1$	$-n$	$-n+1$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$

Die Einträge in der Tabelle sind die Eigenwerte des Tensorproduktes des Elementes in der Spalte mit dem entsprechenden Element in der Zeile. Da die Dimension bzw. die Höchstgewichte den Isomorphietypen eines irreduziblen Moduls schon vollständig charakterisieren ergibt sich die Inklusion (Man darf nicht der Tabelle entnehmen, dass z.B. $[F_{++}, v_{-n+1}]$ im größten Modul liegt. Die Tabelle dient eigentlich nur für das Abzählen der Dimensionen der einzelnen Eigenräume.):

$$[V_5, V_{2n+3}] \subseteq_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})} V_{2n-1} \oplus V_{2n+1} \oplus V_{2n+3} \oplus V_{2n+5} \oplus V_{2n+7}$$

Es reicht zu zeigen, dass genügend viele Höchstgewichtsvektoren im Produkt wegfallen, d.h. im hier behandelten Fall darf der Raum der Vektoren zum Eigenwert $n-1$ (bzw. $-n+1$) höchstens ein-dimensional sein und es darf keinen Vektor zum Eigenwert $n+3$ geben[2].

Zur kompakteren Schreibweise werden die Erzeuger im folgenden abgekürzt:

$$F_{--} = -2 \quad F_{-} = -1 \quad F_0 = 0 \quad F_{+} = 1 \quad F_{++} = 2$$

Zeige Bedingung 3: Es gilt für die Wörter der Länge $n+1$ die Gleichung

$$[0, [1, \cdots [1, 2]]] = \frac{n+1}{n-1}[1, [0, [1, \cdots [1, 2]]]].$$

Beweis: Zunächst gilt wegen der Jacobi-Identität

$$[1, [0, [1, [\cdots]]]] - [0, [1, [\cdots]]] = [[1, 0], [1, [\cdots]]].$$

Es sei angenommen, dass die Gleichung $[[1, 0], [1 \cdots]] = -n[1, [\cdots [1, [0, 2]]]]$ schon bewiesen sei, dann gilt:

$$\begin{aligned}
[1, [0, [1, [\cdots]]]] &= [0, [1, [\cdots]]] - n[1, [\cdots \underbrace{[1, [0, 2]]}_{\substack{=\frac{1}{3}[0,[1,2]] \\ \text{wegen Induktion}}}]] \\
&\overset{\text{Ind.}}{=} [0, [1, [\cdots]]] - \underbrace{n \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}}_{=2n \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}}[1, [0, [1, [\cdots]]]]
\end{aligned}$$

Man erhält so:

$$\begin{aligned}
[0, [1, [\cdots]]] &= \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \cdot [1, [0, [1, [\cdots]]]] \\
&= \frac{n+1}{n-1} \cdot [1, [0, [1, [\cdots]]]]
\end{aligned}$$

Zeige also noch: (Wortlänge $n+1$)

$$[[1, 0], [1, [\cdots]]] = -n \cdot [1, \cdots [1, [0, 2]]]$$

Induktionsanfang: Man muss die Aussage für die Ausdrücke der Länge drei und vier zeigen.

$$\begin{aligned}
[[1, 0], 2] &\overset{\text{Jacobi}}{=} [1, [0, 2]] + [[1, 2], 0] \\
&= [1, [0, 2]] - \underbrace{[0, [1, 2]]}_{=3[1,[0,2]]}
\end{aligned}$$

[2]Klar ist mit diesen Voraussetzungen, dass das Lie-Produkt ein irreduzibler Modul ist und nicht Dimension $2n+7$ hat. Warum aber ist der Modul, wie gewünscht $(2n+5)$-dimensional und nicht z.B. $(2n+1)$-dimensional? Dies liegt daran, dass alle zu der freien Lie-Algebra hinzugenommenen Relationen auch in der Poisson-Algebra gelten. Das Produkt muss also mindestens so groß sein, wie das entsprechende in der Modell-Algebra.

$$
\begin{aligned}
& = && -2[1,[0,2]] \\
[[1,0],[1,2]] & \stackrel{\text{Jacobi}}{=} && [1,\underbrace{[[1,0],2]}_{-2[1,[0,2]]}] + [\underbrace{[1,[0,1]]}_{\stackrel{(2.14)}{=}-\frac{1}{24}[2,[-1,1]]+\frac{3}{2}F_{++}},2] \\
& = && -2[1,[1,[0,2]]] - \frac{1}{24}[[2,[-1,1]],2] \\
& \stackrel{\text{Jacobi}}{=} && -2[1,[1,[0,2]]] - \frac{1}{24}[[[2,-1],1],2] - \frac{1}{24}[[-1,[2,1]],2] \\
& = && -2[1,[1,[0,2]]] + \frac{1}{24}[2,[1,[-1,2]]] + \frac{1}{24}[2,[-1,[2,1]]] \\
& \stackrel{\text{Jacobi}}{=} && -2[1,[1,[0,2]]] + \frac{1}{24}[[2,1],[-1,2]]] + \frac{1}{24}[1,[2,[-1,2]]] + \\
& && +\frac{1}{24}[[2,-1],[2,1]] + \frac{1}{24}[-1,\underbrace{[2,[2,1]]}_{=0}] \\
& = && -2[1,[1,[0,2]]] - \frac{1}{12}[[1,2],[-1,2]]] + \frac{1}{24}[1,\underbrace{[2,[-1,2]]}_{\stackrel{(2.7)}{=}-6[2,[0,1]]}] \\
& = && -2[1,[1,[0,2]]] + \frac{1}{12}[\underbrace{[-1,2]}_{=-6[0,1]+18E_+},[1,2]]] - \frac{1}{4}[1,\underbrace{[2,[0,1]]}_{-2[1,[0,2]]}] \\
& = && -\frac{3}{2}[1,[1,[0,2]]] + \frac{1}{2}[[1,0],[1,2]] \\
\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}[[1,0],[1,2]] & = && -\frac{3}{2}[1,[1,[0,2]]]
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
[[1,0],[1,\cdots]] & \stackrel{\text{Jacobi}}{=} && \big[1,\underbrace{[[1,0],[1,\cdots]]}_{\stackrel{\text{Ind.}}{=}-(n-1)[1,\cdots[1,[0,2]]]}\big] + [[[1,0],1],[1,\cdots]] \\
& = && -(n-1)[1,[1,\cdots[1,[0,2]]]] + [[[1,0],1],[1,\cdots]] \\
& \stackrel{\text{Jacobi}}{=} && -(n-1)[1,[1,\cdots[1,[0,2]]]] + \big[[[[1,0],1],1],[1,\cdots]\big] \\
& && +\big[1,[[[1,0],1],[1,\cdots]]\big]
\end{aligned}
$$

Nach der Induktionsvoraussetzung und durch Wiederholung der gerade gemachten Rechnung für Wörter der Länge n erhält man

$$
\begin{aligned}
-(n-1)[1,\cdots[1,[0,2]]] & \stackrel{\text{Ind.}}{=} && \big[[1,0],[1,\cdots]\big] \\
& = && \big[1,\big[[1,0],[1,\cdots]\big]\big] + \big[[[1,0],1],[1,\cdots]\big] \\
& = && -(n-2)[1,\cdots[1,[0,2]]] + \big[[[1,0],1],[1,\cdots]\big] \\
\Longrightarrow \quad \big[[[1,0],1],[1,\cdots]\big] & = && -[1,\cdots[0,2]]
\end{aligned}
$$

Damit erhält man für die obige Rechnung

$$\big[[1,0],[1,\cdots]\big] = -n[1,[1,\cdots,[1,[0,2]]]] + \big[[[[1,0],1],1],[1,\cdots]\big].$$

Ist der letzte Term Null, ist die Behauptung bewiesen. Man wendet, um dies zu zeigen, E_- auf das Wort $[[[1,0],1],1] = -[1,[1,[0,1]]]$ an.

$$
\begin{aligned}
[E_-,[1,[1,[0,1]]]] & = && -6[0,[1,[0,1]]] - 6[1,[0,[0,1]]] + \\
& && +[1,[1,[-1,1]]] \\
& \stackrel{\text{Jacobi}}{=} && -12[1,[0,[0,1]]] + [1,[1,[-1,1]]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [1,\big([1,[-1,1]] - 12\underbrace{[0,[0,1]]}_{\overset{(2.18)}{=}\frac{1}{8}[2,[-1,0]]-\frac{9}{2}F_+}\big)] \\
&= [1,\big(\underbrace{[1,[-1,1]]}_{\overset{(2.19)}{=}\frac{3}{2}[2,[-1,0]]-36F_+} - \frac{3}{2}[2,[-1,0]] + 54F_+\big)] \\
&= [1,\big(\frac{3}{2}[2,[-1,0]] - 36F_+ - \frac{3}{2}[2,[-1,0]] + 54F_+\big)] \\
&= 18[1,F_+] = 0
\end{aligned}
$$

Wäre der Ausdruck $[[[1,0],1],1]$ ungleich Null, müsste er ein Minimalgewicht sein, aber da er Eigenwert 3 hat, ist dies nicht möglich.

Man hat bisher Teil den dritten Punkt der anfänglichen Induktionsvoraussetzungen gezeigt. Als nächstes soll bewiesen werden, dass sich die Vektoren zum Eigenwert $n+2$, die in der $n+1$-ten Schicht liegen, durch Vielfache von $[F_+,[\cdots[F_+,F_{++}]]]$ repräsentieren lassen.

Zeige Bedingung 4: Der Raum der Vektoren zum Gewicht $n+2$ in der $n+1$-ten Schicht ist eindimensional. Seine Elemente lassen sich durch das Wort

$$[1,[1,[\cdots[1,2]]]]$$

darstellen.

Beweis: Nach den Induktionsvoraussetzungen bildet die n-te Schicht einen irreduziblen Modul mit Höchstgewicht $n+1$ und der Höchstgewichtsvektor lässt sich als $[1,[\cdots[1,2]]]$ darstellen.
Mit der oben aufgeschriebenen Tabellen für das Tensorprodukt sieht man, dass der gesuchte Raum durch die Vektoren $[1,v_{n+1}]$ und $[2,v_n]$ aufgespannt wird. Diese lassen sich durch

$$[1,[1,[\cdots[1,2]]]] \quad \text{bzw.} \quad [2,[E_-[1,[\cdots[1,2]]]]]$$

darstellen. Der zweite Vektor hat die Form

$$
\begin{aligned}
\big[2,\big[E_-,[1,[\cdot[1,2]]]\big]\big] &= -6[2,[0,[1,[\cdots[1,2]]]]] - \ldots \\
&\quad \ldots - 6[2,[1,[\cdots\underbrace{[1,[0,2]]}_{\frac{1}{3}[0,[1,2]]}]]]] \\
&= -6[2,[0,[1,[\cdots[1,2]]]]] - \ldots - 6[2,[0,[1,[\cdots[0,[1,[1,2]]]]]]] - \\
&\quad -6\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot[2,[1,[\cdots[1,[0,[1,2]]]]]] \\
&= -6\cdot\Big(1+\frac{n-3}{n-1}+\ldots \\
&\quad \ldots + \prod_{i=4}^{n-1}\frac{i-2}{i} + \prod_{i=3}^{n-1}\frac{i-2}{i}\Big)\cdot[2,[0,[1,[\cdots[1,2]]]]].
\end{aligned}
$$

Er lässt sich also als Vielfaches von $[2,[0,[1,\cdots[1,2]]]]$ schreiben. Man rechnet folgendermaßen nach, dass die beiden Vektoren linear abhängig sind:

$$
\begin{aligned}
[2,[0,[1,\cdots]]] &\overset{\text{Jacobi}}{=} [0,\underbrace{[2,[1,\cdots]]}_{=0}] + [[2,0],[1,\cdots]] \\
&= [1,[[2,0],[1,\cdots]]] + [\underbrace{[[2,0],1]}_{=-\frac{1}{2}[2,[0,1]]},[1,\cdots]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [1,[[2,0],[1,\cdots]]] - \frac{1}{2}\cdot[2,[[0,1],[1,\cdots]]] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot[[0,1],\underbrace{[2,[1,\cdots]]}_{=0}] \\
&= [1,[[2,0],[1,\cdots]]] - \frac{1}{2}\cdot[2,[0,[1,[1,\cdots]]]] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot[2,\underbrace{[1,[0,[1,\cdots]]]}_{=\frac{n-2}{n}\cdot[0,[1,\cdots]]}] \\
&= [1,[[2,0],[1,\cdots]]] - \frac{1}{2}\cdot(1-\frac{n-2}{n})\cdot[2,[0,[1,[1,\cdots]]]] \\
&= [1,[2,[0,[1,\cdots]]]] - \frac{1}{n}\cdot[2,[0,[1,[1,\cdots]]]] \\
\Longrightarrow \quad [2,[0,[1,[1,\cdots]]]] &= \frac{n}{n+1}\cdot[1,[2,[0,[1,\cdots]]]]
\end{aligned}
$$

Den letzten Wert könnte man nach Induktion zu $c\cdot[1,[1,\cdots]]$ setzen und man wäre fertig. Es soll aber noch die Konstante c ausgerechnet werden:

$$
\begin{aligned}
[2,[0,[1,[1,\cdots]]]] &= \frac{n}{n+1}\cdot[1,\underbrace{[2,[0,[1,\cdots]]]}_{=\frac{n-1}{n}[1,[2,[1,\cdots]]]}] \\
&= \frac{n-1}{n+1}\cdot[1,[1,[2,[0,[1,\cdots]]]]] \\
&= \frac{4}{n+1}\cdot[1,[\cdots[1,[2,[0,[1,2]]]]]] \\
&= \frac{3}{n+1}\cdot[1,[\cdots[1,\underbrace{[2,[0,2]]}_{\overset{(2.5)}{=}-\frac{2}{3}[1,[1,2]]}]]] \\
&= -\frac{2}{n+1}\cdot[1,[\cdots[1,2]]]
\end{aligned}
$$

Die beiden Vektoren sind also linear abhängig.

Zeige Bedingung 2: In der $n+1$-ten Schicht liegt kein Vektor mit Gewicht $n+3$ oder höher.

Beweis: Mit Hilfe der oben gezeigten Tabelle sieht man sofort, dass es keine Vektoren mit Gewichten höher als $n+3$ geben kann und dass der einzige Kandidat für einen Vektor mit Gewicht $n+3$

$$[2,v_{n+1}] = [2,[1,\cdots[1,2]]]$$

ist. Im letzten Beweis wurde gezeigt, dass die Gleichung

$$[2,[0,[1,\cdots]]] + \frac{2}{n+1}[1,\cdots[1,2]] = 0$$

gilt. Wendet man auf diese Gleichung E_+ an, erhält man das gewünschte Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
0 &= \big[E_+,[2,[0,[1,\cdots]]]\big] + \frac{2}{n+1}\big[E_+,[1,\cdots[1,2]]\big] \\
&= \big[2,\big[[E_+,0],[1,\cdots]\big]\big] + \frac{2}{n+1}\big[[E_+,1],[1,\cdots[1,2]]\big] \\
&\quad +[2,[0,\underbrace{[E_+,[1,\cdots[1,2]]]}_{=0}]] + \frac{2}{n+1}[1,\underbrace{[E_+,[1,\cdots[1,2]]]}_{=0}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [2,[1,[1,\cdots]]] + \frac{2}{n+1}[2,[1,\cdots]] \\
&= \frac{n+3}{n+1}[2,[1,\cdots[1,2]]]
\end{aligned}
$$

Alle Voraussetzungen außer der ersten sind nun bewiesen worden.

Zeige Bedingung 1: Die $n+1$-te Schicht bildet einen irreduziblen Modul.

Beweis: Wegen den anfänglichen, darstellungstheoretischen Betrachtungen, genügt es zu zeigen, dass der Raum der Vektoren mit Gewicht $n-1$ ein-dimensional ist. Es gibt insgesamt fünf Vektoren, die diesen Raum aufspannen:

$$[-2, v_{n+1}], \quad [-1, v_n], \quad [0, v_{n-1}], \quad [1, v_{n-2}] \quad \text{und} \quad [2, v_{n-3}].$$

Das Wort v_{n+1} kann man wegen der Voraussetzung 4 folgendermaßen schreiben

$$v_{n+1} = [1, [\cdots[1,2]]].$$

Für die übrigen v_i ergibt sich die Form

$$
\begin{aligned}
v_n &= [0,[1,\cdots[1,2]]], & v_{n-1} &= [-1,[1,\cdots[1,2]]], \\
v_{n-2} &= [-2,[1,\cdots[1,2]]] \quad \text{und} & v_{n-3} &= [-2,[0,[1,\cdots[1,2]]]].
\end{aligned}
$$

Um zu sehen, dass die Vektoren v_i in der obigen Form dargestellt werden können, reicht es zu zeigen, dass diese Worte nicht Null sind (bzw. sich nicht allein durch Ausdrücke aus darunter liegenden Schichten schreiben lassen), denn nach Induktion ist die n-te Schicht ein irreduzibler Modul und dementsprechend ist jeder Raum mit Eigenvektor i ein-dimensional.
Wendet man auf v_n das Element E_+ an, erhält man

$$[1,[\cdots,[1,2]]] + [0, \underbrace{[E_+,[1,\cdots]]}_{=0}] = [1,[\cdots]] = v_{n+1} \neq 0.$$

Da das Bild ungleich Null ist und $[E_+, \cdot]$ eine lineare Abbildung, muss v_n ebenfalls ungleich Null sein. Auch lässt sich v_n nicht durch kürzere Wörter schreiben, denn E_+ verändert nicht die Länge des Ausdrucks und v_{n+1} hat Länge n.
Ebenso verfährt man mit den Vektoren v_{n-1} und v_{n-2}. Für den Fall v_{n-3} geht man umgekehrt vor: Man wendet E_- auf v_{n-2}. Das Ergebnis kann nicht Null sein, da dies gegen die Form der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Moduln verstoßen.

$$[E_-,[-2,[1,[\cdots]]]] = [-2,[E_-,[1,[\cdots]]]] = c[-2,[0,[1,\cdots]]]$$

Der Koeffizient c ist nicht Null, wie man oben gesehen hatte.
Nun muss man also zeigen, dass die fünf Vektoren

$$
\begin{gathered}
[-2,[1,[\cdots]]], \quad [-1,[0,[1,[\cdots]]]], \quad [0,[-1,[1,[\cdots]]]], \\
[1,[-2,[1,[\cdots]]]] \quad \text{und} \quad [2,[-2,[0,[1,\cdots]]]]
\end{gathered}
$$

alle linear abhängig sind. Man sucht vier linear unabhängige Gleichungen in den fünf Worten.
Drei Gleichungen kann man durch Umformen der obigen Ausdrücke aufstellen. Dabei lässt man Ausdrücke der Länge n oder kürzere wegfallen. Diese haben ja keinen Einfluß auf das hier gesuchte Ergebnis und ohne sie verkürzt sich die Rechnungen erheblich.

1.

$$\begin{aligned}
[-2,[1,[\cdots]]] &= [\underbrace{[-2,1]}_{-6[-1,0]+18F_-},[1,[\cdots]]]+[1,[-2,[1,[\cdots]]]] \\
&= -6[[-1,0],[1,[\cdots]]]+\underbrace{18[-1,[1,[\cdots]]]}_{\text{ignoriere.}} \\
&\quad +[1,[-2,[1,[\cdots]]]] \\
&= 6[0,[-1,[1,[\cdots]]]]-6[-1,[0,[1,[\cdots]]]] \\
&\quad +[1,[-2,[1,[\cdots]]]]
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
[2,[-2,[0,[1,\cdots]]]] &= [-2,[2,[0,[1,\cdots]]]]+[[2,-2],[0,[1,\cdots]]] \\
&= [-2,[2,[0,[1,\cdots]]]]+[0,[[2,-2],[1,\cdots]]]- \\
&\quad -[\underbrace{[[2,-2],0]}_{\overset{(2.3)}{=}0},[1,\cdots]] \\
&= [-2,[2,[0,[1,\cdots]]]]+[0,[[2,-2],[1,\cdots]]]
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Ausdrücke kann man umschreiben, denn die n-te Schicht bildet nach Induktionsvoraussetzung einen irreduziblen Modul und deshalb sind alle Vektoren mit den Eigenwerten $n-3$ bis $n+1$ als Vielfache der fünf oben benutzten Vektoren darstellbar.

$$\begin{aligned}
[2,[0,[1,\cdots]]] &= -\frac{2}{n}[1,[1,\cdots]]] \\
[[2,-2],[1,\cdots]] &= d[-1,[1,\cdots]]
\end{aligned}$$

Den Wert von d kann man leicht ausrechnen, indem man auf die letzte Gleichung zwei mal E_+ anwendet:

$$\begin{aligned}
0 &= E_+^2\Big([[2,-2],[1,\cdots]]-d[-1,[1,\cdots]]\Big) \\
&= -4E_+\big[[2,-1],[1,\cdots]\big]+6dE_+[0,[1,\cdots]] \\
&= 24\big[[2,0],[1,\cdots]\big]+6d[1,[1,\cdots]] \\
&= 24\underbrace{[2,[0,[1,\cdots]]]}_{=-\frac{2}{n}[1,[1,\cdots]]}+6d[1,[1,\cdots]] \\
&= 6(d-\frac{8}{n})[1,[1,\cdots]]
\end{aligned}$$

Man setzt nun die Gleichungen

$$\begin{aligned}
[2,[0,[1,\cdots]]] &= -\frac{2}{n}[1,[1,\cdots]]] \\
\big[[2,-2],[1,\cdots]\big] &= \frac{8}{n}[-1,[1,\cdots]]
\end{aligned}$$

oben ein und erhält so

$$[2,[-2,[0,[1,\cdots]]]] = -\frac{2}{n}[-2,[1,[1,\cdots]]]+\frac{8}{n}[0,[-1,[1,[1,\cdots]]]]$$

3.

$$[-1,[0,[1,\cdots]]] = [0,[-1,[1,\cdots]]]+\big[[-1,0],[1,\cdots]\big]$$

$$
\begin{aligned}
&= [0,[-1,[1,\cdots]]] + \big[1,\big[[-1,0],[1,\cdots]\big]\big] \\
&\quad + \big[\underbrace{[[-1,0],1]}_{\overset{(2.22)}{=}\frac{1}{4}[2,[-2,0]]+54F_0},[1,\cdots]\big] \\
&= [0,[-1,[1,\cdots]]] + \big[1,\big[[-1,0],[1,\cdots]\big]\big] \\
&\quad + \frac{1}{4}\big[[2,[-2,0]],[1,\cdots]\big] + 54\underbrace{[0,[1,[\cdots]]]}_{\text{Ignoriert, da kürzer.}} \\
&= [0,[-1,[1,\cdots]]] + \big[1,\big[[-1,0],[1,\cdots]\big]\big] \\
&\quad + \frac{1}{4}\big[2,\big[[-2,0],[1,\cdots]\big]\big] - \frac{1}{4}\big[[-2,0],\underbrace{[2,[1,\cdots]]}_{=0}\big] \\
&= [0,[-1,[1,\cdots]]] + \big[1,\big[[-1,0],[1,\cdots]\big]\big] \\
&\quad + \frac{1}{4}\big[2,\big[[-2,0],[1,\cdots]\big]\big]
\end{aligned}
$$

Die letzten beiden Ausdrücke kann man umschreiben, denn, wie schon unter (2) benutzt, lassen sich die Worte der Länge n und mit Gewicht $n-3$ bis $n+1$ durch v_{n-3} bis v_{n+1} ausdrücken.

$$
\begin{aligned}
\big[[-2,0],[1,\cdots]\big] &= e[-2,[0,[1,\cdots]]] \\
\big[[-1,0],[1,\cdots]\big] &= f[-2,[1,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten f und e lassen sich analog zum d in (2) ausrechnen. Man wendet dazu zwei mal E_+ auf die untere Gleichung bzw. drei mal auf die obere an.

$$
\begin{aligned}
0 &= \big[E_+^2[-1,0],[1,\cdots]\big] - fE_+^2[-2,[1,\cdots]] \\
&= \big[E_+[-1,1],[1,\cdots]\big] - 24f[0,[1,\cdots]] \\
&= \big[\underbrace{[-1,2]}_{-6[0,1]+18E_+},[1,\cdots]\big] - 6\big[[0,1],[1,\cdots]\big] - \\
&\quad -24f[0,[1,\cdots]] \\
&= -12\big[[0,1],[1,\cdots]\big] - 24f[0,[1,\cdots]] \\
&= -12[0,[1,\cdots]] + 12\underbrace{[1,[0,\cdots]]}_{=\frac{n-2}{n}[0,[1,\cdots]]} - \\
&\quad -24f[0,[1,\cdots]] \\
&= -\frac{24}{n}[0,[1,\cdots]] - 24f[0,[1,\cdots]]
\end{aligned}
$$

Man erhält dann also $f = -\frac{1}{n}$.

$$
\begin{aligned}
0 &= E_+^3\big[[-2,0],[1,\cdots]\big] - eE_+^3[-2,[0,[1,\cdots]]] \\
&= E_+^2\big[[-2,1],[1,\cdots]\big] - 4E_+^2\big[[-1,0],[1,\cdots]\big] - \\
&\quad -eE_+^2[-2,[1,[1,\cdots]]] + 4eE_+^2[-1,[0,[1,\cdots]]] \\
&= E_+\big[[-2,2],[1,\cdots]\big] - 8E_+\big[[-1,1],[1,\cdots]\big] + \\
&\quad +8eE_+[-1,[1,[1,\cdots]]] - 24eE_+[0,[0,[1,\cdots]]] \\
&= -4\big[[-1,2],[1,\cdots]\big] - 8\big[[-1,2],[1,\cdots]\big] + 48\big[[0,1],[1,\cdots]\big] - \\
&\quad -48e[0,[1,[1,\cdots]]] - 24e[0,[1,\cdots]] - 24e[1,[0,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -12\big[\underbrace{[-1,2]}_{-6[0,1]},[1,\cdots]\big]+48\big[[0,1],[1,\cdots]\big]-\\
&\quad -72e[0,[1,[1,\cdots]]]-24e\underbrace{[1,[0,[1,\cdots]]]}_{\frac{n-2}{n}[0,[1,\cdots]]}\\
&= 120\big[[0,1],[1,\cdots]\big]-\frac{96n-48}{n}e[0,[1,[1,\cdots]]]\\
&= 120[0,[1,\cdots]]-120\underbrace{[1,[0,[1,\cdots]]]}_{\frac{n-2}{n}[0,[1,\cdots]]}-\\
&\quad -\frac{96n-48}{n}e[0,[1,[1,\cdots]]]\\
&= \frac{240}{n}[0,[1,\cdots]]-\frac{96n-48}{n}e[0,[1,[1,\cdots]]]\\
&= (240-(96n-48)e)[0,[1,[1,\cdots]]]\\
&= 48(5-(2n-1)e)[0,[1,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Also ist $e=\frac{5}{2n-1}$.
Damit erhält man insgesamt die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
[-1,[0,[1,\cdots]]] &= [0,[-1,[1,\cdots]]]+\frac{5}{8n-4}[2,[-2,[0,[1,\cdots]]]]-\\
&\quad -\frac{1}{n}[1,[-2,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Löst man die drei Gleichungen auf, erhält man

$$
\begin{aligned}
[2,[-2,[0,[1,\cdots]]]] &= \frac{8n^2+44n-24}{n(4n+3)}[-1,[0,[1,\cdots]]]+\\
&\quad +\frac{-8n^2-12n+8}{n(4n+3)}[0,[-1,[1,\cdots]]]\\
[1,[-2,[1,\cdots]]] &= \frac{-4n^2+2n+30}{4n+3}[-1,[0,[1,\cdots]]]+\\
&\quad +\frac{4n^2-2n-10}{4n+3}[0,[-1,[1,\cdots]]]\\
[-2,[1,\cdots]] &= \frac{-4n^2-22n+12}{4n+3}[-1,[0,[1,\cdots]]]+\\
&\quad +\frac{4n^2+22n+8}{4n+3}[0,[-1,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Man hat also den obigen Satz von drei linear unabhängigen Gleichungen gefunden. Es fehlt noch eine weitere, um das Gewünschte zu zeigen.
Diese erhält man aus der oben bewiesenen Relation (für Länge $n+1$)

$$[0,[1,\cdots]]=\frac{n+1}{n-1}[1,[0,[1,\cdots]]],$$

indem man zwei mal E_- darauf anwendet. Diese Rechnung ist leider etwas mühsam.

$$
\begin{aligned}
0 &= E_-^2\Big([0,[1,\cdots]]-\frac{n+1}{n-1}[1,[0,[1,\cdots]]]\Big)\\
&= E_-\Big([-1,[1,\cdots]]-6[0,[0,[1,\cdots]]]+[0,[1,[E_-[1,\cdots]]]]+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +6\frac{n+1}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] - \frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] - \frac{n+1}{n-1}[1,[0,[E_-[1,[1\cdots]]]]]\Big) \\
= \quad & E_-\Big([-1,[1,\cdots]] + \frac{12}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] + [0,[1,[E_-[1,\cdots]]]] - \\
& -\frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] - \frac{n+1}{n-1}[1,[0,[E_-[1,[1\cdots]]]]]\Big)
\end{aligned}
$$

Es ist sinnvoll möglichst früh den Term $[E_-[1,\cdots]]$ für Wörter der Länge j auszurechnen ($j \leq n$), um möglichst viele Glieder zusammenfassen zu können.

$$
\begin{aligned}
[E_-[1,\cdots]] \quad = \quad & -6[0,[1,\cdots]] - 6[1,[0,[1,\cdots]]] - \cdots \\
& \cdots - 6[1,[\cdots[1,[0,2]]]] \\
= \quad & -6\Big([0,[1,\cdots]] + \frac{j-2}{j}[0,[1,\cdots]] + \\
& +[1,[1,[0,[1,\cdots]]]] + \cdots + [1,[\cdots[1,[0,2]]]]\Big) \\
= \quad & -6\Big(\frac{2j-2}{j}[0,[1,\cdots]] + \\
& +[1,[1,[0,[1,\cdots]]]] + \cdots + [1,[\cdots[1,[0,2]]]]\Big)
\end{aligned}
$$

Für den letzten Term gilt

$$
\begin{aligned}
[1,[\cdots[1,[0,2]]]] \quad = \quad & \frac{1}{3}[1,[\cdots,[1,[0,[1,2]]]]] = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}[1,[\cdots[1,[0,[1,[1,2]]]]]] \\
= \quad & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdots\frac{j-4}{j-2}\cdot\frac{j-3}{j-1}\cdot\frac{j-2}{j}[0,[1,[1,\cdots]]] \\
= \quad & \frac{1\cdot 2}{(j-1)j}[0,[1,\cdots]]
\end{aligned}
$$

Für den vorletzten Term beginnen die Brüche später und man erhält analog

$$
[1,[\cdots[1,[0,[1,2]]]]] = \frac{2\cdot 3}{(j-1)j}[0,[1,\cdots]],
$$

bzw. im allgemeinen Fall

$$
[1,[\cdots[1,[\underbrace{0}_{(k+1)\text{-te Stelle von hinten}},[1,\cdots[1,[1,2]]]]]]] = \frac{k\cdot(k+1)}{(j-1)j}[0,[1,\cdots]].
$$

Also ist der gesamte Term

$$
\begin{aligned}
[E_-[1,\cdots]] \quad = \quad & -6\Big(\frac{2j-2}{j}[0,[1,\cdots]] + \sum_{i=1}^{j-3}\frac{i(i+1)}{j(j-1)}[0,[1,\cdots]]\Big) \\
= \quad & -6\Big(\frac{2j-2}{j} + \frac{1}{j(j-1)}\cdot\sum_{i=1}^{j-3}(i^2+i)\Big)[0,[1,\cdots]] \\
= \quad & -6\Big(\frac{2j-2}{j} + \frac{j^2-5j+6}{3j(j-1)}\Big)[0,[1,\cdots]] \\
= \quad & -2(j+1)[0,[1,\cdots]]
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis setzt man in die oben begonnene Rechnung für $j = n-1$ ein:

$$
0 \quad = \quad E_-\Big([-1,[1,\cdots]] + \frac{12}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] + [0,[1,[E_-[1,\cdots]]]] -
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] - \frac{n+1}{n-1}[1,[0,[E_-[1,[1\cdots]]]]]\Big) \\
= \quad & E_-\Big([-1,[1,\cdots]] + \frac{12}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] - 2n[0,\underbrace{[1,[0,[1,\cdots]]]}_{=\frac{n-2}{n}[0,[1,\cdots]]}] - \\
& -\frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] + \frac{2n(n+1)}{n-1}[1,[0,[0,[1,\cdots]]]]\Big) \\
= \quad & E_-\Big([-1,[1,\cdots]] + \frac{12}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] - 2(n-2)[0,[0,[1,\cdots]]] - \\
& -\frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] + \frac{2n(n+1)}{n-1}[1,[0,[0,[1,\cdots]]]]\Big) \\
= \quad & E_-\Big([-1,[1,\cdots]] - 2\cdot\frac{n^2-3n-4}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] - \\
& -\frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] + \frac{2n(n+1)}{n-1}[1,[0,[0,[1,\cdots]]]]\Big)
\end{aligned}
$$

Für den letzten Term kann man schreiben (wie bei den Herleitung der anderen drei Gleichungen)

$$[0,[0,[1,\cdots]]] = d[-1,[1,\cdots]],$$

wobei man d durch Anwenden von E_+ auf diese Gleichung erhält.

$$
\begin{aligned}
-6d[0,[1,\cdots]] \quad &= \quad [1,[0,[1,\cdots]]] + [0,[1,\cdots]] \\
&= \quad \left(1+\frac{n-2}{n}\right)\cdot[0,[1,\cdots]] \\
&= \quad \frac{2n-2}{n}\cdot[0,[1,\cdots]]
\end{aligned}
$$

Die obige Rechnung geht dann weiter:

$$
\begin{aligned}
0 \quad = \quad & E_-\Big([-1,[1,\cdots]] - 2\cdot\frac{n^2-3n-4}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] - \\
& -\frac{n+1}{n-1}[1,[-1,[1,\cdots]]] - \frac{2n(n+1)}{n-1}\cdot\frac{2(n-1)}{6n}[1,[-1,[1,\cdots]]]\Big) \\
= \quad & E_-\Big([-1,[1,\cdots]] - 2\cdot\frac{n^2-3n-4}{n-1}[0,[0,[1,\cdots]]] - \\
& -\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-1,[1,\cdots]]]\Big) \\
= \quad & [-2,[1,\cdots]] - 6[-1,[0,[1,\cdots]]] - 2n[-1,[1,[0,[1,\cdots]]]] - \\
& -2\cdot\frac{n^2-3n-4}{n-1}[-1,[0,[1,\cdots]]] - 2\cdot\frac{n^2-3n-4}{n-1}[0,[-1,[1,\cdots]]] + \\
& +4n\cdot\frac{n^2-3n-4}{n-1}[0,\underbrace{[0,[0,[1,\cdots]]]}_{=-\frac{n-1}{3n}[-1,[1,\cdots]]}] + \\
& +2\frac{2n^2+3n+1}{n-1}[0,[-1,[1,\cdots]]] - \frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]] + \\
& +2n\cdot\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-1,[0,[1,\cdots]]]] \\
= \quad & [-2,[1,\cdots]] - 2\cdot\frac{n^2-7}{n-1}[-1,[0,[1,\cdots]]] - 2n\cdot\frac{n-2}{n}[-1,[0,[1,\cdots]]] + \\
& +2\cdot\frac{n^2+6n+5}{n-1}[0,[-1,[1,\cdots]]] - 4\cdot\frac{n^2-3n-4}{3}[0,[-1,[1,\cdots]]] -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]]+2n\cdot\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-1,[0,[1,\cdots]]]] \\
= \; & [-2,[1,\cdots]]-2\cdot\frac{2n^2-3n-5}{n-1}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
& -2\cdot\frac{2n^3-11n^2-20n-7}{3(n-1)}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
& -\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]]+2n\cdot\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-1,[0,[1,\cdots]]]]
\end{aligned}
$$

Den letzten Term kann man ebenfalls umrechnen.

$$[-1,[0,[1,\cdots]]]=e[-2,[1,\cdots]]$$

Man wende zweimal E_+ an und erhält

$$
\begin{aligned}
24e[0,[1,\cdots]] &= E_+[-1,[1,\cdots]]-6E_+[0,[0,[1,\cdots]]] \\
&= -12[0,[1,\cdots]]-6[1,[0,[1,\cdots]]] \\
&= 6\frac{2-3n}{n}[0,[1,\cdots]]
\end{aligned}
$$

Einsetzen liefert:

$$
\begin{aligned}
0 &= [-2,[1,\cdots]]-2\cdot\frac{2n^2-3n-5}{n-1}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -2\cdot\frac{2n^3-11n^2-20n-7}{3(n-1)}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]]+ \\
&\quad +2n\cdot\frac{2n^2+3n+1}{3(n-1)}\cdot\frac{2-3n}{4n}[1,[-2,[1,\cdots]]] \\
&= [-2,[1,\cdots]]-2\cdot\frac{2n^2-3n-5}{n-1}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -2\cdot\frac{2n^3-11n^2-20n-7}{3(n-1)}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -\frac{n(2n^2+3n+1)}{2(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Ersetzen des ersten und letzten Terms durch die drei Gleichungen, die man anfangs erhalten hatte, liefert folgende nicht-triviale Beziehung:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{-4n^2-22n+12}{4n+3}[-1,[0,[1,\cdots]]]+\frac{4n^2+22n+8}{4n+3}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -2\cdot\frac{2n^2-3n-5}{n-1}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -2\cdot\frac{2n^3-11n^2-20n-7}{3(n-1)}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
&\quad -\frac{n(2n^2+3n+1)}{2(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]] \\
&= -2\frac{10n^3+3n^2-46n-9}{(n-1)(4n+3)}[-1,[0,[1,\cdots]]]-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}\cdot\frac{8n^4-44n^3-140n^2-67n-9}{(n-1)(4n+3)}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
& -\frac{n(2n^2+3n+1)}{2(n-1)}[1,[-2,[1,\cdots]]] \\
= \quad & -2\frac{10n^3+3n^2-46n-9}{(n-1)(4n+3)}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
& -\frac{2}{3}\cdot\frac{8n^4-44n^3-140n^2-67n-9}{(n-1)(4n+3)}[0,[-1,[1,\cdots]]]- \\
& -\frac{n(2n^2+3n+1)}{2(n-1)}\cdot\frac{-4n^2+2n+30}{4n+3}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
& -\frac{n(2n^2+3n+1)}{2(n-1)}\cdot\frac{4n^2-2n-10}{4n+3}[0,[-1,[1,\cdots]]] \\
= \quad & \frac{4n^4+8n^3-43n^2-95n-18}{4n+3}[-1,[0,[1,\cdots]]]- \\
& -\frac{12n^5+28n^4-121n^3-328n^2-149n-18}{3(n-1)(4n+3)}[0,[-1,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Man erhält also die Beziehung

$$
\begin{aligned}
& (12n^5+12n^4-153n^3-156n^2+231n+54)[-1,[0,[1,\cdots]]]= \\
& =(12n^5+28n^4-121n^3-328n^2-149n-18)[0,[-1,[1,\cdots]]]
\end{aligned}
$$

Damit die Gleichung nicht-trivial wird, reicht es zu zeigen, dass der Koeffizient des ersten Termes nie verschwindet.

$$
12n^5+12n^4-153n^3-156n^2+231n+54 \quad = \quad 3(n-1)(n+2)(4n^3-43n-9)
$$

Die Ableitung des letzten Faktors ist $12n^2-43$, d.h. dieser Term ist ab ca. 1.9 streng monoton steigend. Für $n=4$ ergibt dieser Term 75, für $n=2$ gibt er -63 und für $n=3$ gibt er -30, d.h. es gibt keine Nullstelle, die hier stören könnte.

Oben wurde gezeigt, dass die endlich präsentierte Algebra

$$
P=\left\langle F_{--},F_{-},F_0,F_{+},F_{++}\middle|\text{Relationen 2.1-2.31}\right\rangle
$$

genau einen irreduziblen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul von jedem ungeradzahlig dimensionalen Isomorphietypen enthält. Dies ermöglicht es sehr leicht die Isomorphie zu der (komplexifizierten) Poisson-Algebra zu beweisen.

Es gibt einen epimorphen Lie-Algebren-Morphismus von der Algebra P auf die Poisson-Algebra, denn alle Relationen, die in P gelten, wurden aus der Poisson-Algebra übernommen.

Man muss also lediglich noch die Injektivität zeigen. Sie ergibt sich aber automatisch, da in beiden Algebren jeder irreduzible Modul der Dimension $2n+1$ genau einmal vorkommt.

Die Unteralgebren $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ werden durch den Epimorphismus auf einander abgebildet und da ihre Operationen auf den jeweiligen Lie-Algebren durch die Kommutatoren induziert werden, handelt es sich bei dem Epimorphismus natürlich auch um einen $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul-Morphismus. Nach dem Schurschen Lemma ist dann aber aber auf Grund der Surjektivität und der Existenz von nur einem irreduziblen Modul von jedem Typ in beiden Lie-Algebren die Injektivität gezeigt.

2.3 Endgültige Form der Präsentation

Ziel dieses Abschnittes ist es, die gefundene Präsentation in eine handlichere Form zu bringen und anschließend durch einen Basiswechsel der Erzeuger eine Präsentation der reellen Poisson-Algebra zu finden.

Von den Relationen dienten 11 Ausdrücke dazu den größten Modul in der dritten Schicht zu Null zu machen. Wegen des Schurschen Lemmas reicht allerdings schon eine einzige Relation dazu aus. Die gewählte Gleichung sei

$$[0,[-1,1]]=0.$$

Für den zuletzt übrigbleibenden fünf dimensionalen Modul in der dritten Schicht reicht ebenfalls eine Relation, um ihn mit den Erzeugern zu identifizieren.

$$[2,[-2,0]]+4[1,[-1,0]]+216F0=0$$

Man hat die Anzahl der Relationen auf 17 reduziert.

$$\begin{array}{r}
[0,[-1,1]]\\
[0,[-2,2]]\\
[2,[-1,2]]+6[2,[0,1]]\\
[-2,[-2,1]]+6[-2,[-1,0]]\\
[1,[-1,2]]+6[1,[0,1]]+18F_{++}\\
[2,[-2,2]]+2[2,[-1,1]]+72F_{++}\\
[0,[-1,2]]+6[0,[0,1]]+18F_{+}\\
[2,[-2,1]]+6[2,[-1,0]]+72F_{+}\\
[1,[-2,2]]+2[1,[-1,1]]+36F_{+}\\
2[-1,[-1,2]]+3[2,[-2,0]]+432F_0\\
4[1,[-1,0]]+[2,[-2,0]]+216F_0\\
2[1,[-2,1]]-3[2,[-2,0]]-432F_0\\
[0,[-2,1]]+6[0,[-1,0]]-18F_{-}\\
2[-1,[-1,1]]+[-1,[-2,2]]-36F_{-}\\
[-1,[-2,1]]+6[-1,[-1,0]]-18F_{--}\\
[-2,[-2,2]]-12[-1,[-1,0]]-2[1,[-2,-1]]-36F_{--}\\
[-1,[-2,2]]-36[0,[-1,0]]-6[1,[-2,0]]-[2,[-2,-1]]+36F_{-}
\end{array}$$

Es soll nun die Erzeugermenge vergrößert werden. Die Relationen werden dadurch zwar zahlreicher, dafür aber gewinnen sie an Übersichtlichkeit, denn man kann so ihre Länge reduzieren.

Man ergänze also die Erzeugermenge um die Elemente E_+, E_- und H.

Diese Elemente identifiziert man mit der 3-dim. Algebra, die in der zweiten Schicht liegt.

$$\begin{array}{rcl}
2[F_+,F_-]+[F_{++},F_{--}] &=& -36H\\
6[F_0,F_+]+[F_-,F_{++}] &=& 18E_+\\
6[F_0,F_-]+[F_+,F_{--}] &=& 18E_-
\end{array}$$

Die Verknüpfung dieser Erzeuger untereinander vergrößert die Lie-Algebra nicht, denn man findet unter Ausnutzen der $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Operation z.B.

$$\begin{array}{rcl}
18[E_+,E_-] &=& [E_+,6[F_0,F_-]+[F_+,F_{--}]]\\
&=& 6[E_+,[F_0,F_-]]+[E_+,[F_+,F_{--}]]\\
&=& 6[F_+,F_-]+[F_{++},F_{--}]-4[F_+,F-]\\
&=& 2[F_+,F_-]+[F_{++},F_{--}]\\
&=& -36H
\end{array}$$

Die 15 Regeln, die die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-Darstellung wiedergeben, kann man in den neuen Erzeugern schreiben. Die Relationen lauten dann:

$$[H,F_{--}]+2F_{--}, \qquad [E_-,F_{--}], \qquad [E_+,F_{--}]+4F_-$$

$$
\begin{array}{rlll}
[H,F_-]+F_-, & [E_-,F_-]-F_{--}, & [E_+,F_-]+6F_0 \\
[H,F_0], & [E_-,F_0]-F_-, & [E_+,F0]-F_+ \\
[H,F_+]-F_+, & [E_-,F_+]+6F_0, & [E_+,F_+]-F_{++} \\
[H,F_{++}]-2F_{++}, & [E_-,F_{++}]+4F_+, & [E_+,F_{++}] \\
2[F_+,F_-]+[F_{++},F_{--}]+36H & & \\
6[F_0,F_+]+[F_-,F_{++}]-18E_+ & & \\
6[F_0,F_-]+[F_+,F_{--}]-18E_- & & \\
[F_0,[F_-,F_+]] & & \\
[F_{++},[F_{--},F_0]]+4[F_+,[F_-,F_0]]+216F_0 & &
\end{array}
$$

Die bisher hergeleitete Präsentation mit acht Erzeugern und 20 Relationen gehört zur komplexifizierten Poisson-Algebra. Im folgenden sollen nun die Relationen in reeller Form geschrieben werden. Dass dies geht, steht außer Frage, denn man hat ja lediglich $\mathbb{C}$ an die Poisson-Algebra tensoriert.

Man muss also für die acht Erzeuger einen Basiswechsel durchführen. Anschließend schreibt man auch die Relationen bzgl. des neuen Erzeugersystems.

Die den Erzeugern F_{--} bis F_{++} und H, E_+ und E_- entsprechenden Polynome haben die Form

$$
\begin{aligned}
H &= iz \\
E_+ &= x+iy \\
E_- &= x-iy \\
F_{--} &= -3(x-iy)^2 \\
F_- &= -3iz(x-iy) \\
F_0 &= z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \\
F_+ &= 3iz(x+iy) \\
F_{++} &= -3(x+iy)^2.
\end{aligned}
$$

Für die neue Basis wählt man folgende harmonische Polynome

$$
\begin{aligned}
X &= x \\
Y &= y \\
Z &= z \\
G_1 &= z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \\
G_2 &= xy \\
G_3 &= xz \\
G_4 &= yz \\
G_5 &= x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2).
\end{aligned}
$$

Die obere Basis kann man in der unteren ausdrücken

$$
\begin{aligned}
E_+ &= X+iY \\
E_- &= X-iY \\
H &= iZ \\
F_{--} &= -2G_1+6iG_2-4G_5 \\
F_- &= -3iG_3-3G_4 \\
F_0 &= G_1 \\
F_+ &= 3iG_3-3G_4 \\
F_{++} &= -2G_1-6iG_2-4G_5.
\end{aligned}
$$

Die transformierten Relationen nehmen die Form

$$[X, G_1] + 3G_4 \tag{2.32}$$
$$[X, G_2] - G_3 \tag{2.33}$$
$$[X, G_3] + G_2 \tag{2.34}$$
$$[X, G_4] - \frac{4}{3}G_1 - \frac{2}{3}G_5 \tag{2.35}$$
$$[X, G_5] \tag{2.36}$$
$$[Y, G_1] - 3G_3 \tag{2.37}$$
$$[Y, G_2] + G_4 \tag{2.38}$$
$$[Y, G_3] + \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}G_5 \tag{2.39}$$
$$[Y, G_4] - G_2 \tag{2.40}$$
$$[Y, G_5] + 3G_3 \tag{2.41}$$
$$[Z, G_1] \tag{2.42}$$
$$[Z, G_2] + \frac{2}{3}G_1 + \frac{4}{3}G_5 \tag{2.43}$$
$$[Z, G_3] - G_4 \tag{2.44}$$
$$[Z, G_4] + G_3 \tag{2.45}$$
$$[Z, G_5] - 3G_2 \tag{2.46}$$

$$2[G_1, G_2] + 3[G_3, G_4] - 4[G_2, G_5] - 3Z \tag{2.47}$$
$$2[G_1, G_3] + 2[G_3, G_5] - 3[G_2, G_4] - 3Y \tag{2.48}$$
$$3[G_2, G_3] - 4[G_1, G_4] + 2[G_4, G_5] + 3X \tag{2.49}$$

$$[G_1, [G_3, G_4]] \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} 2[G_1, [G_1, G_5]] + 9[G_2, [G_1, G_2]] + 9[G_3, [G_1, G_3]] + \\ +9[G_4, [G_1, G_4]] + 4[G_5, [G_1, G_5]] - 54G_1 \end{aligned} \tag{2.51}$$

an.

Die ersten 15 Relationen geben die Operation der $\mathfrak{so}(3)$ auf den Erzeugern $\{G_1, \dots, G_5\}$ wieder, die folgenden drei Relationen identifizieren einen Teil der zweiten Schicht mit der $\mathfrak{so}(3)$, die vorletzte Relation setzt den 11-er Modul in der dritten Schicht zu Null und die letzte Relation identifiziert einen fünf dimensionalen Untermodul in der dritten Schicht mit den fünf Erzeugern G_1 bis G_5.

Anhang A

Algorithmus zur Zerlegung in harmonische Anteile

Im folgenden wird ein effizienter Algorithmus zur Zerlegung eines beliebigen, homogenen Polynoms in seine harmonischen, homogenen Anteile gegeben. Dieser ist in [2] skizziert worden.

Sei f ein Polynom, dessen Zerlegung

$$f = h_n + r^2 h_{n-2} + r^4 h_{n-4} + \ldots + r^{2k} h_{n-2k} + \ldots$$

man berechnen will, wobei die h_i die harmonischen Polynome seien.

A.1 Der Algorithmus

1. Wende auf f den Laplace-Operator N mal an, wobei N die Gleichung $n = 2N$ bzw. $n = 2N + 1$ erfüllt, je nachdem ob der Grad n des Polynoms eine gerade Zahl oder eine ungerade Zahl ist. Behalte alle Zwischenergebnisse $f_i := \triangle^i f$, $i = 1, \ldots N$. Setze $l = N$.

2. $h_{n-2l} = c_l^{-1} f_i$, wobei $c_l = \prod_{j=1}^{l} 2(l - j + 1)(2n - 2l - 2j + 3)$.

3. Ersetze l durch $l - 1$. Falls l kleiner als Null ist, breche den Algorithmus ab.

4. Man erhält nun h_{n-2l} durch

$$h_{n-2l} = \frac{1}{c} \cdot \left(f_l - \sum_{i=1}^{N-l} 2^l \cdot \prod_{j=1}^{l} (l + i - j + 1)(2(n - l - i - j) + 3) r^{2i} h_{n-2(l+i)} \right),$$

mit

$$c := 2^l \cdot \prod_{j=1}^{l} (l - j + 1)(2n - 2l - 2j + 3).$$

5. Gehe anschließend zum dritten Schritt zurück.

Beweis: Bei obiger Schreibweise sind alle h_i harmonische, homogene Polynome vom Grad i. Man rechnet leicht nach, dass

$$\begin{aligned}
\triangle r^{2s} h_k &= \nabla \left((\nabla r^{2s}) h_k + r^{2s} \nabla h_k \right) \\
&= (\triangle r^{2s}) h_k + 2(\nabla r^{2s}) \cdot (\nabla h_k) + r^{2s} \triangle h_k \\
&= 2s(2s + 1) r^{2s-2} h_k + 4sk r^{2s-2} h_k \\
&= 2s(2s + 2k + 1) r^{2(s-1)} h_k.
\end{aligned}$$

Den zweiten Term in der zweiten Zeile berechnet man durch

$$\begin{aligned} \nabla r^{2k} \cdot \nabla x^{s-i-j} y^i z^j &= 2kr^{2k-2}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z) x^{s-i-j} y^i z^j \\ &= 2ksr^{2k-2} x^{s-i-j} y^i z^j. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die l-fache Anwendung dieses Operators

$$\triangle^l r^{2s} h_k = \left(\prod_{i=1}^{l} 2(s-i+1)(2(s-i)+2k+3) \right) r^{2(s-l)} h_k$$

Man sieht, dass bei l-facher Anwendung des Laplace-Operators auf f alle Glieder, deren r-Exponent weniger als $2l$ beträgt, wegfallen. Man startet bei $l = N$ in Schritt Eins und garantiert so, dass $\triangle^N f$ nur noch das harmonische Polynom h_{n-2N} enthält. Den Koeffizienten liest man aus obiger Formel ab. Nun geht man rückwärts hoch, wobei man weiß, dass in jedem f_l nur h_{n-2l} und die schon berechneten h_i eine Rolle spielen. Auch hier werden die Koeffizienten durch die obige Formel bestimmt.

A.2 Eine Implementierung mit Maple

```
# --------------------------------------------
#
#  harmzerlegung(f,[x,y,z])
#
#---------------------------------------------
# f ist das homogene Polynom, das in seine harmonischen Anteile
#  zerlegt werden soll
# x,y,z sind die drei Unbestimmten des Polynoms
# Die Ausgabe ist eine Liste der homogenen,
# harmonischen Polynomen.

harmzerlegung := proc (f::polynom, x::list)
local i, j, l, h, g, N, n, r:

n := degree (f, x):
N := floor (n/2):

r := x[1]^2 + x[2]^2 + x[3]^2:

g[1] := f:
for l from 1 to N do
        g[l+1] := linalg[laplacian] (g[l],x):
od:

h[n-2*N] := (1/2)^N * ( product ((N-j+1) * (2*n-2*j-2*N+3), j=1..N))^(-1) * g[N];

for l from N by -1 to 0 do
        h[n-2*l]:= simplify((1/2)^l * 1/(product ((l-j+1) * (2*n-2*j-2*l+3), j=1..l))
                             * (g[l+1] - 2^l * sum (product ((l+'i'-j+1) *
                                                             (2*n-2*'i'-2*j-2*l+3),
                                                             j=1..l)
                             * r^('i') * h[n-2*(l+'i')], 'i'=1..N-l)));
od:
```

```
RETURN (seq (h[n-2*i], i=0..N));
end:
```

Anhang B

Algorithmus zum Bilden einer Normalform in freien Lie-Algebren

B.1 Hall-Systeme

Wie in [3] nachzulesen ist, sind die freien Lie-Algebren graduiert. Diese Graduierung wird durch die Länge der Wörter gegeben. Man erhält eine Basis durch ein **Hall-System**. Dies ist eine geordnete Teilmenge $M \subset \mathcal{L}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Alle Erzeuger liegen im Hall-System.
- M besteht nur aus einzelnen Worten und ein kürzeres Wort ist (bzgl.der Ordnung) kleiner als ein längeres.
- Das Wort $[A, B]$ liegt in M genau dann, falls
  - $A, B \in M$
  - $A < B$
  - Falls B kein Erzeuger ist, ist $B = [B_1, B_2]$ und es gilt $A \geq B_1$.

Diese Regeln erlauben es induktiv ein Hall-System aufzubauen. Dazu startet man mit den Erzeugern und numeriert diese nach einer beliebigen Ordnung durch. Dann konstruiert man nach und nach jede Schicht unter Beachtung obiger Regeln. Die neue erhaltenen Elemente fügt man an das Ende der Liste der schon vorhandenen hinzu. Man erhält so das System M mit einer entsprechenden Ordnung.

B.2 Eine Normalform für Lie-Ausdrücke

Das Hauptproblem beim Rechnen in der freien Lie-Algebra besteht darin, die Gleichheit zweier Elemente angeben zu können. Hat man dies geschafft, reduzieren sich die meisten anderen Probleme auf die lineare Algebra.

Der hier vorgestellte Algorithmus erlaubt es, beliebige Ausdrücke als Linearkombination bzgl. einem Hall-System M zu entwickeln.

Algorithmus

Der Algorithmus benutzt einen rekursiven Aufruf einer Funktion **func**[1].

Die gesuchte Entwicklung von E erhält man durch **func**(E).

[1] Wenn also z.B. geschrieben wird **func**(A)+**func**(B), ist damit (entsprechend der C++/C-Syntax) gemeint: Bilde die Summe aus dem von **func** zurückgegebenen Wert bei Einsetzen von A und dem von **func** zurückgegeben Wert bei Einsetzen von B.

func(W): Sei $W = \lambda_1 W_1 + \cdots + \lambda_r W_r$, wobei W_i einzelne Wörter seien.
Starte mit $W_i = W_1$.

1. Falls $W_i \in M$:
   (a) Falls $i = r$, dann fertig. RÜGKGABE von **func** ist W.
   (b) Falls $i < r$, setze $i = i + 1$ und gehe zurück zu (1).
2. W_i ist gleich $[A, B]$.
   (a) Falls $A \notin M$ setze in W an Stelle von W_i den Ausdruck $[\textbf{func}(A), B]$. Zerlege das so erhaltene W wieder in einzelne Worte und starte mit diesem W die Funktion von vorne.
   (b) Falls $B \notin M$ setze in W an Stelle von W_i den Ausdruck $[A,\textbf{func}(B)]$. Zerlege das so erhaltene W wieder in einzelne Worte und starte mit diesem W die Funktion von vorne.
3. Falls $A > B$, ersetze W_i durch $-[B, A]$.
4. Falls $W_i \in M$ gehe zurück zu (1).
5. Es ist $W_i = [A, [B_1, B_2]] \notin M$, dann $A < B_1$. Ersetze also W_i durch $[[A, B_1], B_2]+[B_1, [A, B_2]]$ in W und starte die ganze Funktion von vorne.

Beweis: Der Beweis wird mit einer Induktion über die Länge des Wortes geführt.
Das obige Verfahren löse also korrekt alle Terme der Länge n auf. Es sei $[A, B]$ ein Wort der Länge $n+1$. Mit der Induktion erhält man ein Wort $\sum \lambda_\alpha [A_\alpha, B_\alpha]$, wobei $A_\alpha, B_\alpha \in M$ liegen und durch umordnen $A_\alpha < B_\alpha$ ist.
Falls $[A_\alpha, B_\alpha] \notin M$, liegt das daran, dass dieser Ausdruck die Form $[A_\alpha, [C_\alpha, D_\alpha]]$ hat, wobei $A_\alpha, C_\alpha, D_\alpha \in M$, aber $A_\alpha < C_\alpha$ (vergesse im folgenden die "α").
Nach dem obigen Algorithmus wird nun die Jacobi-Identität auf den Ausdruck angewandt:

$$[A, [C, D]] = [[A, C], D] + [C, [A, D]]$$

Untersuche die neu erhaltenen Terme

[[A,C],D]: Falls $[A, C] \notin M$, ersetze nach Induktion durch $\sum c_i [A_i, C_i]$ mit der entsprechenden Eigenschaft.
Betrachte o.B.d.A. ein einziges $[A', C'] \in M$.

Fall 1: $[A', C'] > D$. Der Term hat die Form $-[D, [A', C']]$ mit $D, [A', C'] \in M$. Falls $D \not\geq A'$, findet man hat also wieder die anfänglichen Situation vor, allerdings ist jetzt der links stehende Ausdruck D echt größer als der anfänglich dort stehende Ausdruck A (denn $A < C < D$).

Fall 2: $[A', C'] < D$. Der Term hat die Form $[[A', C'], D] = [[A', C'], [D_1, D_2]]$ mit $[A', C'], D_1, D_2 \in M$. Falls $[A', C'] \not\geq D_1$, findet man hat also wieder die anfängliche Situation vor, allerdings ist jetzt der links stehende Ausdruck $[A', C']$ echt größer als der anfänglich dort stehende Ausdruck A (denn $\mathrm{Lng}[A', C'] = \mathrm{Lng}[A, C] > \mathrm{Lng}A$).

[C,[A,D]]: Falls $[A, D] \notin M$, ersetze nach Induktion durch $\sum c_i [A_i, D_i]$ mit der entsprechenden Eigenschaft.
Betrachte o.B.d.A. ein einziges $[A', D'] \in M$.
Es gilt automatisch $[A', D'] > C$, denn $\mathrm{Lng}[A', D'] = \mathrm{Lng}[A, D] > \mathrm{Lng}D \geq \mathrm{Lng}C$, weshalb nur zwei Möglichkeiten in Frage kommen:

Fall 1: $C \geq A'$. Der Term ist in M.

Fall 2: $C < A'$. Man befindet sich in der anfänglichen Situation, allerdings ist der links stehende Ausdruck C echt größer als der anfänglich dort stehende Ausdruck A.

Der Algorithmus terminiert, denn die links stehenden Ausdrücke sind auf die Länge $n - 1$ beschränkt und folglich können sie nicht beliebig groß werden.

B.3 Rechnen in Präsentationen

Man kann mit gewissen Einschränkungen Aussagen über präsentierte Lie-Algebren mit dem C-Programm treffen.

An dieser Stelle soll erklärt werden, wie dies funktioniert und auf was für Einschränkungen man stößt.

$E_1, \ldots, E_n$ seien die Erzeuger der Lie-Algebra. Es seien $R_1, \ldots, R_r$ die gegebenen Relationen und $s_1, \ldots, s_r$ die Maximallängen der entsprechenden Gleichung.

Man lege eine maximale Größe N fest, bis zu der man Relationen prologieren wird.

1. Setze $a =$<Anzahl der Gleichungen>.

2. Bringe alle gegebenen Gleichungen mit dem oben gegebenen Algorithmus in Normalform bzgl. eines Hall-Systems.

3. Löse das lineare Gleichungssystem mit einem Gauß-Verfahren möglichst weit.

4. Prolongiere nun die Gleichungen, indem man für alle E_i und alle R_j mit $s_j < N$ die Kommutatoren $[E_i, R_j]$ bildet.

5. Bringe alle gegebenen Gleichungen mit dem oben gegebenen Algorithmus in Normalform bzgl. eines Hall-Systems.

6. Löse das lineare Gleichungssystem mit einem Gauß-Verfahren möglichst weit.

7. Falls $a \neq$<neue Anzahl der Gleichungen>. setze $a =$<neue Anzahl der Gleichung> und gehe zurück zu Schritt (4)

Dieses Verfahren ist aber nur bedingt tauglich. Um alle Relationen der Länge n zu finden reicht es nämlich keinesfalls aus bis zur Länge n zu prologieren. Dies soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden:

Betrachte die Präsentation

$$\Big\langle x, y \Big| [x,[x,y]] - x,\ [y,[x,y]] - x \Big\rangle.$$

Man muss die Relationen bis zur Länge vier prologieren, um noch zusätzliche Relationen der Länge eins und zwei zu erhalten.

$$\begin{aligned}
&[x,[x,y]] - x,\ [y,[x,y]] - x \\
&[x,[x,[x,y]]] - [x,x],\ [y,[x,[x,y]]] - [y,x] \\
&[x,[y,[x,y]]] - [x,x],\ [y,[y,[x,y]]] - [y,x]
\end{aligned}$$

Nach zurückführen auf die Normalform erhält man

$$\begin{aligned}
&[x,[x,y]] - x,\ [y,[x,y]] - x \\
&[x,[x,[x,y]]],\ [y,[x,[x,y]]] + [x,y] \\
&[y,[x,[x,y]]] + [[x,y],[x,y]],\ [y,[y,[x,y]]] + [x,y]
\end{aligned}$$

Nach Auflösen der Gleichungen erhält man die Relationen:

$$\begin{aligned}
&[x,y] \\
&[x,[x,y]] - x,\ [y,[x,y]] - x \\
&[x,[x,[x,y]]],\ [y,[x,[x,y]]] \\
&[y,[y,[x,y]]]
\end{aligned}$$

Prolongiert man die erste Gleichung mit x und zieht man diese Gleichung von der zweiten ab, erhält man die Relation $x = 0$, d.h. bei dieser Algebra handelt es sich um die freie Lie-Algebra auf einem Element.

In diesem Beispiel reichte die Prolongation bis zur Länge vier aus, um alle Relationen der Länge eins und zwei zu finden.

Mir ist aber keine obere Schrank $N(n)$ bekannt, bis zu der man im allgemeinen Fall prolongieren müsste, um alle Relationen der Länge n zu finden.

Literaturverzeichnis

[1] Berndt, Rolf: *Einführung in die Symplektische Geometrie*, Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1998

[2] Müller, Claus: *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces*, New York: Springer Verlag, 1998

[3] Serre, J.P.: *Lie Algebras and Lie Groups*, Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verlag, 1991

[4] Vinberg, Ernest B.: *Linear representations of groups*, Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1989

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Aufgabenstellung selbständig bearbeitet und keine außer den angegebenen Hilfsmitteln verwendet habe.

Aachen, den 13. Dezember 1999,

Klaus Niederkrüger