

# Fibrés vectoriels et $K$ -théorie topologique

Klaus Niederkrüger

## 1. Préliminaires: topologie, homotopie, CW-complexes, variétés

EXERCICE 1.1. Les topologies finales et initiales existent et sont uniques.

EXERCICE 1.2. Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces, et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Une application  $f: X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  est continue ssi  $f \circ \pi: X \rightarrow Y$  est continue (ou autrement dit, si  $g: X \rightarrow Y$  est continue et constant sur chaque classe d'équivalence alors  $g$  descend à une application  $\bar{g}: X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  qui est continue).

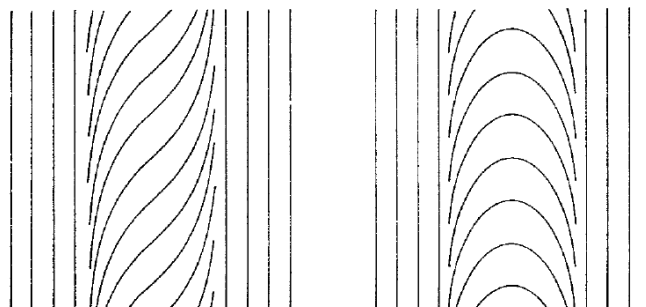
EXERCICE 1.3.  $X/\mathcal{R}$  ne peut pas être séparé s'il au moins une de ses classes d'équivalence n'est pas fermée.

EXERCICE 1.4. Soit  $A$  une partie de  $(X, \mathcal{R})$  ayant tout  $X$  comme saturé et soit  $\mathcal{R}_A$  la restriction de  $\mathcal{R}$  aux points de  $A$ . Alors  $\iota_A: A \hookrightarrow X$  l'application canonique

$$\bar{\iota}_A: A/\mathcal{R}_A \rightarrow X/\mathcal{R}$$

est un homéomorphisme ssi le saturé de toute ouvert (ou fermé) de  $A$  est ouvert (ou fermé) en  $X$ .

EXERCICE 1.5. Soit  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  les relations d'équivalence sur  $\mathbb{R}^2$  représentées par le dessin (a) et (b). Montrer que  $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_1$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , mais que  $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_2$  n'est même pas séparé.



EXERCICE 1.6. Montrer que pour  $X$  compact et  $A \subset X$ ,  $X/A$  est séparé ssi  $A$  est un fermé. Dans ces cas,  $X/A$  est clairement compact.

### 1.1. La compactifié d'Alexandrov.

EXERCICE 1.7. Montrer:  $X^+$  est un espace topologique compact. Qu'est-ce qui se passe si  $X$  n'est pas localement compact? À quoi ressemble  $X^+$  si  $X$  même est déjà compact?

EXERCICE 1.8. Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces localement compacts et soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue. On dit que  $f$  est une **application propre** si l'image réciproque  $f^{-1}(K)$  de tout compact  $K \subset Y$  est compact dans  $X$ .

Montrer que si  $f: X \rightarrow Y$  est propre, alors  $f^+: X^+ \rightarrow Y^+$  définie par  $f^+(\infty) = \infty$  et  $f^+(x) = f(x)$  pour tout  $x \in X$  est une application continue.

EXERCICE 1.9. Montrer que la compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{R}^k$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}^k$ .

Indication: Prouver que la projection stéréographique

$$\Phi: (x_1, \dots, x_{k+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{1-x_{k+1}}, \dots, \frac{x_k}{1-x_{k+1}} \right)$$

est un homéomorphisme entre  $\mathbb{S}^k \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$  et  $\mathbb{R}^k$ . En déduire que  $\mathbb{S}^k$  est homéomorphe à  $(\mathbb{R}^k)^+$ .

EXERCICE 1.10. Montrer que  $\overline{\mathbb{D}}^k / \mathbb{S}^{k-1}$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^k$ .

## 1.2. Homotopie.

### 1.3. CW-complexes.

EXERCICE 1.11. Y a-t-il des CW-complexes qui n'ont pas des cellules de dimension 0?

EXERCICE 1.12. (a) Tout CW-complexe fini est compact.

(b) Pour une décomposition cellulaire qui satisfait l'axiome 1, on obtient déjà que  $f_\alpha(\overline{\mathbb{D}}^{n(\alpha)}) = \bar{e}_\alpha$ . En particulier  $\bar{e}_\alpha \setminus e_\alpha = f_\alpha(\partial \mathbb{D}^{n(\alpha)})$  et compact et se trouve dans le  $(n(\alpha) - 1)$ -squelette de  $X$ .

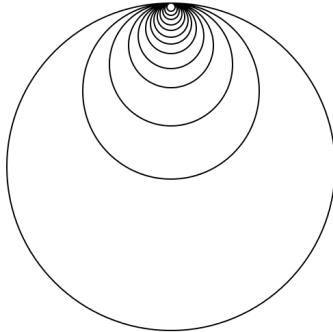
EXERCICE 1.13. L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$  est l'espace de droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$  passant par l'origine. Chaque point de  $\mathbb{R}^{n+1}$  à l'exception de l'origine se trouve sur une seule droite, ce qui nous permet de définir une relation d'équivalence pour  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ :  $x \sim y$  ssi  $x$  et  $y$  se trouvent sur la même droite.

On munit  $\mathbb{R}P^n$  de la topologie quotient induite par  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ .

Par exercice 1.4, nous pouvons aussi regarder la sphère unité  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  à la place. Chaque droite intersecte  $\mathbb{S}^n$  dans deux points antipodaux et  $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{S}^n / \sim$  où  $x \sim x'$  ssi  $x = \pm x'$ .

Trouvez un CW-complexe sur  $\mathbb{R}P^n$  avec une cellule de chaque dimension  $j \leq n$ .

EXERCICE 1.14. Est-ce que les "Boucles d'oreilles hawaïennes" admettent-ils une décomposition en CW-complexe?



EXERCICE 1.15. Est-ce que  $\mathbb{R}^n$  est espace sous-jacent d'un CW-complexe? Même question pour un espace d'Hilbert (de dimension infinie)?

DÉFINITION (Sous-complexe). Soit  $(X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A})$  un CW-complexe et soit  $X' = \cup_{\beta \in B} e_\beta$  pour une partie  $B$  de  $A$ .

$(X', \{e_\beta\}_{\beta \in B})$  est un **sous-complexe** de  $(X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A})$  s'il satisfait une des trois propriétés équivalentes

- (i)  $(X', \{e_\beta\}_{\beta \in B})$  est un CW-complexe.
- (ii)  $X'$  est une partie fermée de  $X$ .
- (iii) pour tout  $\beta \in B$ , on a  $\bar{e}_\beta \subset X'$ .

EXERCICE 1.16. Montrer que les propriétés sont vraiment équivalentes.

REMARQUE 1.17. (1) Toute intersection ou réunion d'une collection des sous-complexes est un sous-complexe (intersection parce que fermée et (ii); réunion par (iii)). (2) Tout squelette est un sous-complexe (par (iii)). (3) L'union de  $X^{(k)}$  est d'une collection de  $k$ -cellules est un sous-complexe. (4) Toute cellule est contenue dans un sous-complexe finie (récurrence sur les bords des cellules).

EXERCICE 1.18. Tout compact  $K \subset (X, \{e_\alpha\}_{\alpha \in A})$  se trouve dans un sous-complexe fini! En particulier les seuls sous-complexes compacts sont ceux qui sont fini.

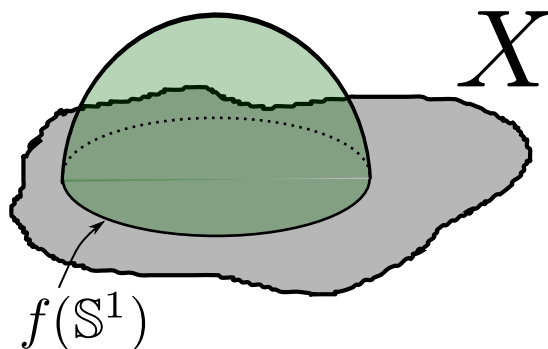
Une façon alternative de regarder un CW-complexe  $X$  est par une construction récurrente: Commence avec le 0-squelette  $X^{(0)}$  comme collection de points isolés. Si  $X^{(k)}$  a déjà été construit, choisie pour chaque  $(k + 1)$ -cellule à recoller une application  $f: \partial \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow X^{(k)}$  pour identifier les points sur son bord avec des points dans  $X^{(k)}$ .

Si  $X$  est un complexe de dimension fini, la construction s'arrête à un moment. Si  $X$  n'est pas un complexe de dimension fini,  $X$  est la limite directe de cette construction.

EXERCICE 1.19. Se convaincre que cette méthode donne précisément les objets obtenus comme de CW-complexes.

EXERCICE 1.20. Soit  $X$  un espace topologique et  $\phi_0: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  and  $\phi_1: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  deux applications homotopiques. Montrer que les espaces  $X_0 := X \cup_{\phi_0} \mathbb{D}^2$  et  $X_1 := X \cup_{\phi_1} \mathbb{D}^2$  sont homotopiquement équivalents.

Écrire les détails de l'idée développée dans le cours.



EXERCICE 1.21. Soit  $\mathbb{S}^\infty = \cup_{j=0}^\infty \mathbb{S}^j$  la "sphère de dimension infinie" obtenue comme CW-complexe en exemple ??.

Démontrer qu'elle est contractile, c'est à dire quelle est homotopiquement équivalente à un point.

THEOREM 1.22. Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue entre deux CW-complexes. Alors  $f$  est homotope a une application cellulaire.

EXERCICE 1.23. Prouver le théorème.

Regarde l'image d'une  $k$ -cellule de  $X$  dans  $Y$  et suppose que son image intersecte l'intérieure d'une cellule  $e_\beta$  sont recouvrir toute la cellule, alors nous pouvons prendre un point de  $e_\beta$  dans le complémentaire de l'image de la  $k$ -cellule et pousser dans la direction radiale.

Maintenant il faut savoir que une application continue de  $\mathbb{R}^k$  vers  $\mathbb{R}^n$  pour  $n > k$  pourrait être surjective (eg. Courbe de Peano), mais qu'il existe toujours une homotopie ("relative au bord") pour que l'image ne soit plus surjective.

Avec ces deux outils (et la stratégie appliquée pour montrer que  $\mathbb{S}^\infty$  est contractile) construire une déformation de  $f$  vers une application cellulaire.

#### 1.4. Variétés.

EXERCICE 1.24. La dimension de  $X$  dans un point  $x \in X$  est la dimension  $k$  d'une carte contenant  $x$ .

Montrer que la dimension dans chaque point est bien-définie et que la dimension est constante sur chaque composante connexe de  $X$ .

EXERCICE 1.25. (1) Trouver un atlas lisse pour la sphère  $\mathbb{S}^k$  (utilise la projection stéréographique introduite en exercice 1.9).

(2) Trouver un atlas lisse pour l'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$  (exercice 1.13) en utilisant des coordonnées homogènes: pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , définir les applications

$$\phi_j : \mathbb{R}P^n \setminus \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid z_j = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right).$$

(K. Niederkrüger) INSTITUT CAMILLE JORDAN, UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1, 43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE

*E-mail address:* `niederkruger@math.univ-lyon1.fr`