1. Fibrés vectoriels : Définitions et constructions de base

Exercice 1.1. Montrer que la dimension des fibres est constante sur chaque composante connexe de B. La dimension des fibres (sur chaque composante) est appelé le **rang** du fibré.

Exemple 1.2. (i) Soit B un espace topologique. Le **fibré trivial** de B de rang n est $(B \times \mathbb{R}^n, B, \pi)$ où π est la projection canonique sur le premier facteur.

(ii) Plonge $\mathbb{S}^{n-1}$ de façon standard dans $\mathbb{R}^n$, alors le **fibré tangent**

$$T\mathbb{S}^{n-1} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}, \mathbf{y} \perp \mathbf{x}\}$$

qui a chaque point $\mathbf{x}$ de la sphère associe les vecteurs qui sont tangents à $\mathbb{S}^{n-1}$ dans ce point forme un fibré vectoriel. La projection est simplement $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

On écrit la fibre à un point $\mathbf{x}$ comme $T_{\mathbf{x}}\mathbb{S}^{n-1}$, l'**espace tangent** à $\mathbf{x}$. La structure linéaire est donnée par $(\mathbf{x}, a\mathbf{y}) + (\mathbf{x}, b\mathbf{y}') = (\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{y}')$.

Pour montrer qu'il existe des trivialisations locales soit $U_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{S}^{n-1} | \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < 1/2\}$ un voisinage de $\mathbf{x}$ et utilise la projection orthogonale

$$h\colon \pi^{-1}(U_{\mathbf{x}}) \mapsto U_{\mathbf{x}} \times \langle \mathbf{x} \rangle^{\perp} \cong U_{\mathbf{x}} \times \mathbb{R}^{n-1},\ (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \mapsto (\mathbf{x}', \mathbf{y}' - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle \, \mathbf{x}) \ .$$

(iii) Le **fibré normal** à $\mathbb{S}^{n-1}$

$$\nu(\mathbb{S}^{n-1}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}, \mathbf{y} \in \langle \mathbf{x} \rangle\}$$

qui a chaque point $\mathbf{x}$ de la sphère associe les vecteurs qui sont orthogonaux à $\mathbb{S}^{n-1}$ forme un fibré vectoriel. La projection est simplement $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Avec le voisinage $U_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{S}^{n-1} | \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < 1/2\}$ de $\mathbf{x}$, on trouve une trivialisation locale par

$$h\colon \pi^{-1}(U_{\mathbf{x}}) \mapsto U_{\mathbf{x}} \times \langle \mathbf{x} \rangle \cong U_{\mathbf{x}} \times \mathbb{R},\ (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \mapsto \big(\mathbf{x}', \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle \cdot \mathbf{x}\big) \ .$$

(iv) **Ruban de Möbius** Identifie $\mathbb{S}^1$ avec $[0,1]/\{0,1\}$ et soit $E = [0,1] \times \mathbb{R}/\sim$ avec la relation d'équivalence $(x, y) \sim (x', y')$ ssi $(x, y) = (x', y')$ ou $x = 0$ et $(x', y') = (1, -y)$.

Le ruban de Möbius est un fibré vectoriel avec la projection $[x, y] \mapsto [x]$ et la structure linéaire $[x, ay] + [x, by'] = [x, ay + by']$.

(v) Soit $B = \mathbb{R}P^n$ l'espace projectif des droites dans $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine. On peut associer à $\mathbb{R}P^n$ le fibré canonique

$$\gamma_n^1 := \{[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{y} \in [\mathbf{x}]\} \ .$$

La projection $\pi([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = [\mathbf{x}]$ est induite par une application continue de $\big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\big) \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$, et la structure linéaire sur les fibres est aussi évidente.

Pour trivialiser localement le fibré, suppose que $[\mathbf{x}]$ est dans une carte homogène $U_j = \{[a_0 : \ldots : a_j : \ldots : a_n)] \in \mathbb{R}P^n \mid a_j \neq 0\} = \{[a_0 : \ldots : a_{j-1} : 1 : a_{j+1} : \ldots : a_n] \in \mathbb{R}P^n\}$.

Sur U_j choisie un $\mathbf{x}$ tq $[\mathbf{x}] \in U_j$. Alors nous pouvons définir une trivialisation locale par

$$h\colon \pi^{-1}(U_j) \mapsto U_j \times \mathbb{R},\ [\mathbf{x}', \mathbf{y}'] \mapsto [\mathbf{x}', \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle] \ .$$

(vi) Nous pouvons aussi considérer sur $\mathbb{R}P^n$, le fibré $(\gamma_n^1)^{\perp}$ qui a comme fibre dans chaque $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n$ le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal à la droite $[\mathbf{x}]$.

Exercice 1.3. Montrer que h dans le exemples (ii) et (iii) sont vraiment des trivialisations locales sur chaque fibre.

Exercice 1.4. Montrer que (vi) est un fibré vectoriel.

Exercice 1.5. Nous pouvons définir $\mathbb{R}P^{\infty}$ comme l'espace obtenu par les plongements canoniques $\mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}P^3 \cdots \mathbb{R}P^{\infty} = \cup \mathbb{R}P^j$ et avec la topologie faible.

Est-ce que le fibré canonique et le fibré qui est orthogonal au fibré canoniques généralisent à $\mathbb{R}P^{\infty}$?

Exercice 1.6. Montre que le fibré tangent d'une variété de classe C^k est un fibré de classe C^{k-1}. Si la variété est complexe, alors son fibré tangent est holomorphe.

1.1. Sections.

Exercice 1.7. Suppose que $\mathbb{S}^n$ admet un champ vecteur (c'est à dire une section de $T\mathbb{S}^n$) qui ne s'annule pas. Alors l'application antipodale $\tau_A\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_{n+1})$ est homotope à l'identité.

Le "dégrée" $\deg\colon C^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \to \mathbb{Z}$ est un invariant par homotopie. Le dégrée de l'identité est 1, mais celui de l'antipodale est $(-1)^{n-1}$. Conclusion ?

1.2. Construction des fibrés vectoriels.

Exercice 1.8. Étudier le produit tensoriel entre fibrés vectoriels sur un espace B. Montrer qu'à isomorphisme près $\otimes\colon \operatorname{Vect}(B) \times \operatorname{Vect}(B) \to \operatorname{Vect}(B)$ est un produit associatif, commutatif et satisfait par rapport à la somme directe la distributivité.

Les classes d'isomorphismes des fibrés de rang 1 sur B forment un groupe abélien par rapport au produit tensoriel. Montrer qu'un fibré de rang 1 admet un produit scalaire ssi il représente un élément d'ordre ≤ 2 dans ce groupe.