Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n°2,3,4:
Séance du 31/03/2010

Les exercices marqués d'une étoile sont les exercices traités en TD.

1 Feuille de TD2

Exercice 5.*

1. On va noter $X(t) = (x(t), x'(t); x''(t))$: dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&X_1'(t) = x'(t) = X_2(t),\\
&X_2'(t) = x''(t) = X_3(t),\\
&X_3'(t) = x^{(3)}(t) = -x''(t) + x'(t) + x(t) = -X_3(t) + X_2(t) + X_1(t).
\end{aligned}$$

   Ce qui s'écrit aussi matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \\ X_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{pmatrix}$$

2. D'après l'exercice 3 du TD2, le polynôme caractéristique de la matrice compagnon A est donné par

$$P_A(X) = X^3 + X^2 - X - 1 = X^2(X+1) - (X+1) = (X+1)(X^2-1) = (X+1)^2(X-1).$$

3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$ donc $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} P_A(A)$. En appliquant le lemme des noyaux, on obtient $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A-1) \oplus \operatorname{Ker}(A+1)^2$. D'après l'exercice 3, on sait que les espaces propres sont au plus de dimension 1. On a donc d'une part un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre 1: $Av_1 = v_1$. D'autre part il existe une base de $\operatorname{Ker}(A+1)^2$ formée d'une part d'un vecteur propre v_2 tel que $Av_2 = -v_2$ et d'autre part $(A+1)v_3 = v_2$. Ce qui donne l'existence d'une matrice de passage P telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J.$$

   En s'inspirant du calcul de l'exercice 1 c), on obtient la base de solution associée au système $X'(t) = JX(t)$.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & t\,e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

La base de solution associée à $X'(t) = AX(t)$ en ensuite donnée par la matrice fondamentale $\Psi(t) = P\Phi(t)$.

Exercice 6.* (seulement les questions 2 et 3)

1. On cherche une solution de $x^{(3)}(t) - x'(t) = 0$ sous la forme $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$. On calcule aisément les dérivées successives de x:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n, \\ x''(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n, \\ x^{(3)}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3}t^n. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation $x^{(3)}(t) - x'(t) = 0$, on obtient la relation de récurrence

$$a_{n+3} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence, on montre aisément que

$$a_{2n+1} = \frac{a_1}{(2n+1)!}, \quad a_{2(n+1)} = \frac{2a_2}{(2n+2)!}.$$

Donc x peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \sum_{n=0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + 2a_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ x(t) &= a_0 - 2\,a_2 + a_1 \sinh(t) + 2a_2 \cosh(t). \end{aligned}$$

Le rayon de convergence des séries étudiées est évidemment $R = \infty$: les solutions trouvées sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'espace vectoriel des solutions de $x^{(3)}(t) - x'(t) = 0$ étant de dimension 3, on a trouvé ici une base de solutions: $(1, \cosh(t), \sinh(t)$.

2. On cherche des solutions de $y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0$ sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On calcule $y''(x)$ et $xy'(x)$:

$$\begin{aligned} xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation $y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0$, on obtient la relation de récurrence

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = 2(n-\alpha)\, a_n.$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors par récurrence, on montre que y s'écrit

$$y(x) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \Pi_{k=0}^{n-1}(2k+1-\alpha)}{(2n+1)!} x^{2n+1} + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \Pi_{k=0}^{n-1}(2k-\alpha)}{(2n)!} x^{2n}.$$

On peut vérifier que le rayon de convergence de chaque série est $R = \infty$. L'espace vectoriel des solutions de $y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x)$ étant de dimension 2, on a bien obtenu une base de solutions de l'équation.

3. Si $\alpha = N$, montrons qu'une des solutions est un polynôme: on suppose que $N = 2k$ est pair. On choisit par la suite $a_1 = 0$ de sorte que $a_{2n+1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ensuite, la récurrence donne immédiatement $a_{2k+2} = 0$ et par récurrence $a_{2n} = 0$ pour tout $n \geq 2k+2$: les coefficients de la série s'annulant à partir d'un certain range, on obtient bien une solution polynomiale.

Exercice 7. (correction du 1)

1. On cherche à résoudre $a_0 t^2 z''(t) + b_0 t z'(t) + c_0 z(t) = 0$. Pour cela, on cherche une solution sous la forme $z(t) = t^\lambda$. Dans ce cas, z est solution si et seulement si

$$a_0 \lambda(\lambda - 1) + b_0 \lambda + c_0 = 0.$$

Si on note λ_1, λ_2 les racines de ce polynome, on a 2 situations possibles. Ou bien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et dans ce cas $t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}$ forment une base de solutions. Ou bien $\lambda_1 = \lambda_2$ et dans ce cas, on n'obtient qu'une solution $z(t) = t^{\lambda_1}$. Pour retrouver une autre solution de l'équation qui soit linéairement indépdenante, on cherche la solution sous la forme $z(t) = t^{\lambda_1} y(t)$ et on cherche une équation différentielle sur y. On obtient

$$a_0 t y''(t) + (2\lambda_1 a_0 + b_0) y'(t) = 0.$$

La racine λ_1 est double et s'écrit $\lambda_1 = -\frac{b_0 - a_0}{2a_0}$ d'où $2\lambda_1 a_0 + b_0 = a_0$ et y vérifie $ty''(t) + y'(t) = 0$. On obtient alors $y(t) = \log(t)$. Dans ce cas, la base de solution est donnée par t^{λ_1}, $t^{\lambda_1}\log(t)$.

2 Feuille de TD3

Exercice 1* (les 2 premiers exemples)

1. Résolution de $xy'(x) = \frac{1}{x^2 y^2(x)}$: on remarque qu'en posant $z(x) = xy(x)$, on obtient pour z l'équation différentielle $z'(x) = \dfrac{1}{z^2(x)}$. On peut également écrire $z^2(x)z'(x) = 1$. Donc en intégrant entre x_0 et x, on obtient

$$\frac{z^3(x)}{3} - \frac{z^3(x_0)}{3} = (x - x_0).$$

On peut inverser cette relation pour obtenir $z(x)$ et donc $y(x)$: après calcul, on obtient $y(x) = x^{-1}\big(x_0^3 y(x_0)^3 + 3(x - x_0)\big)^{1/3}$.

2. Résolution de $x+y=\left(\frac{y'(x)-1}{y'(x)+1}\right)^2$. On pose $z(x)=x+y(x)$. L'équation s'écrit alors

$$z=(1-\frac{2}{z'(x)})^2, \quad (1-\sqrt{z(x)})z'(x)=2.$$

En intégrant entre x_0 et x, on obtient

$$z(x)-\frac{2}{3}z(x)^{3/2}=2(x-x_0)+z(x_0)-\frac{2}{3}z(x_0)^{3/2}.$$

Cette relation s'écrit $F(z(x))=g(x)$: on peut inverser cette relation si F est inversible. On a $F'(z)=1-\sqrt{z}$: si $z(x_0)\neq 1$, cette relation est donc inversible localement.

Exercice 2 (le premier exemple)

Résolution de $xy(x)y'(x)-y^2=(x+y(x))^2e^{-y(x)/x}$: on divise cette équation par x^2, on obtient

$$\frac{y(x)}{x}y'(x)=(\frac{y(x)}{x})^2+(1+\frac{y(x)}{x})^2e^{-y(x)/x}.$$

On pose $z(x)=y(x)/x$: alors on a l'équation différentielle $x\,z'(x)=f(z(x))-z(x)$ avec $f(z)=z^{-1}\Big((1+z)^2e^{-z}+z^2\Big)$. Soit G une primitve de $(f(z)-z)^{-1}$, on a, en intégrant l'équation différentielle sur z entre x_0 et x: $G(z(x))-G(z(x_0))=\log(x/x_0)$. En inversant la fonction G, on obtient $z(x)$ puis $y(x)$.

Exercice 3 *

On souhaite résoudre l'équation de Bernouilli $y'(x)=p(x)y(x)+q(x)y(x)^\alpha$ avec $\alpha\neq 1$.

1. On suppose $y>0$ et on pose $z(x)=y^{1-\alpha}(x)$ alors $z'(x)=(1-\alpha)\frac{y'(x)}{y(x)^\alpha}$. Comme y est solution de l'équation de Bernouilli, on a

$$z'(x)=(1-\alpha)\Big(p(x)z(x)+q(x)\Big).$$

2. La fonction z est donc solution d'une *équation différentielle linéaire*. En utilisant une méthode de variation de la constante, on obtient aisément que

$$z(x)=e^{\int_{x_0}^x(1-\alpha)p(y)dy}z(x_0)+\int_{x_0}^x e^{\int_y^x(1-\alpha)p(u)du}(1-\alpha)q(y)dy.$$

Ce qui donne alors $y(x)=z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

3. On traite succintement l'exemple $\sqrt{x}y'(x)-y(x)+(x+2\sqrt{x})\sqrt{y}=0$. On réécrit cette équation sous la forme

$$y'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}y(x)-(2+\frac{1}{\sqrt{x}})\sqrt{y(x)}.$$

On pose alors $z(x) = \sqrt{y(x)}$: z vérifie l'équation différentielle

$$z'(x) = \frac{z(x)}{2\sqrt{x}} - (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}).$$

La fonction $z_0(x) = Ke^{\sqrt{x}}$ est solution du problème homogène. On conclut ensuite à l'aide d'une méthode de variatio nde la constante.

Exercice 4 *

On souhaite résoudre l'équation de Ricatti $y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$.

1. On suppose connue une solution particulière de l'équation et notée y_p. On cherche ensuite la solution générale sous la forme $y(x) = y_p(x) + z(x)$. Alors

$$\begin{aligned}&y'(x) = y_p'(x) + z'(x),\\ &a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x) = y_p'(x) + a(x)z^2(x) + (2a(x)y_p(x) + b(x))z(x).\end{aligned}$$

   En écrivant que y est solution de l'équation de Ricatti, on obtient $z'(x) = (2a(x)y_p(x) + b(x))z(x) + a(x)z^2(x)$ qui est une équation de Bernouilli qu'on sait résoudre.

2. Résolution de $(1-x^3)y'(x) + x^2y(x) + y^2(x) - 2x = 0$, sachant que $x \mapsto x^2$ est solution. On pose $y(x) = x^2 + z(x)$ alors z vérifie

$$z'(x) = \frac{3x^2}{x^3-1}z(x) + \frac{z^2}{x^3-1}.$$

   Alors $w(x) = z^{1-2}(x)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$w'(x) + \frac{3x^2}{x^3-1}w(x) = -\frac{1}{x^3-1}.$$

   On résout ensuite cette équation à l'aide de la méthode de variation des constantes.

3 Feuille de TD4

Exercice 1: cet exercice est donné en DM

Exercice 2*

1. Les solutions stationnaires de $x'(t) = \mu x(t) - Kx(t)^2$ sont clairement les fonctions $x(t) = x_p$ tel que $\mu x_p - Kx_p^2 = 0$. On obtient facilement $x_p = 0$ et $x_p = \frac{\mu}{K}$. Les solutions d'une équation homogène ne s'intersectant pas si $x(0) > 0$ alors sur tout l'intervalle d'existence de la solution, on a $x(t) > 0$. Si en plus $x(0) < \mu/K$ alors $x(t) < \mu/K$. Dans le cas où $x(0) \neq 0, \mu/K$, et en posant $X = \mu/K$, on peut écrire

$$\frac{x'(t)}{x(t)(X - x(t))} = \frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{x'(t)}{X - x(t)} = \mu X.$$

En intégrant cette équation entre 0 et t, on obtient

$$\log \frac{x(t)}{x_0} - \log \frac{X - x(t)}{X - x_0} = \mu X t.$$

D'où

$$x(t) = X\Big(1 + \frac{X - x_0}{x_0} e^{-\mu X t}\Big)^{-1}.$$

et $\lim_{t\to\infty} x(t) = X$.

2. Les solutions stationnaires (x_p, y_p) du système de Lotka Volterra vérifient

$$a x_p - b x_p\, y_p = 0, \quad c x_p y_p - d y_p = 0.$$

On trouve aisément les couples $(0, 0)$ et $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$.

3. On peut montrer que $(0, y_0 e^{-dt})$ et $(x_0 e^{at}, 0)$ sont des solutions de Lotka Volterra correspondant au cas d'espèces isolées. En utilisant l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy et le fait que les solutions d'un problème homogène ne se coupent pas, on obtient que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ alors sur tout l'intervalle d'existence de la solution, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. On peut donc diviser les équations de Lotka Volterra respectivement par x et y alors

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - b y(t), \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = c x(t) - d.$$

En posant $x(t) = e^{p(t)}$ et $y(t) = e^{q(t)}$, on obtient

$$p'(t) = a - b e^{q(t)}, \quad q'(t) = c e^{p(t)} - d.$$

On cherche une intégrale première du mouvement sous la forme $H(p, q) = K(p) + J(q)$, on a

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = K'(p(t))(a - b e^{q(t)}) + J'(q(t))(c e^{p(t)} - d).$$

Si on pose $K'(p) = c e^p - d$ et $J'(q) = b e^q - a$, on obtient $\frac{d}{dt} H(p(t), q(t))$: on choisit donc $K(p) = c e^p - dp$ et $J(q) = b e^q - aq$ et de retour aux variables initiales, on a le résultat.

4. Pour tracer les courbes de niveau de H, on fixe x et on étudie la fonction $y \mapsto H(x, y) - H_i$ en montrant que 0 n'a que deux antécédents $y_1(x) < \frac{a}{b} < y_2(x)$ et que ces deux antécédents sont confondus pour deux valeurs extrêmes de x. On obtient donc des courbes fermées. On détermine ensuite le sens de parcours de la courbe en examinant le signe de $x'(t)$ et $y'(t)$ dans les différentes régions du quart de plan $x > 0, y > 0$.