ISFA 2ème année Module: Optimisation 2007-2008

Série 2 (suite):
Analyse matricielle: résolution directe de systèmes linéaires

Inverses de matrices

Exercice 1. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices (A inversible) telles que $AB = Id + E$ et $M_n(\mathbb{C})$ est muni d'une norme matricielle $\|.\|$. Donner, pour $\|E\|$ suffisamment petit, une majoration de $\|A^{-1} - B\|$ en fonction de $\|E\|$ et $\|B\|$.

Exercice 2. Soit $C = A + i\,B \in M_n(\mathbb{C})$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer, sous certaines hypothèses à préciser, que

$$C^{-1} = (A + BA^{-1}B)^{-1} - iA^{-1}B(A + BA^{-1}B)^{-1}.$$

Conditionnement de matrices

Exercice 3. Soit $A = Id + 2\,N$ où $N \in M_n(\mathbb{R})$ ($n = 100$) est définie par $N_{i,j} = \delta_{i+1,j}1$. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) \geq 2^{99}$.

Exercice 4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\delta A \in M_n(\mathbb{C})$ où $M_n(\mathbb{C})$ est muni d'une norme matricielle $\|.\|$.

i) Donner une condition suffisante sur $\|\delta A\|$ pour que $A + \delta A$ soit inversible.

ii) Démontrer les inégalités suivantes

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\big(1+\mathcal{O}(\|\delta A\|)\big).$$

Exercice 5. Calculer les solutions des systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 240 & -319,5 \\ -179,5 & 240 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 + \delta x_1 \\ x_2 + \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Expliquer alors la différence entre les deux résultats.

Pivot de Gauss, Factorisation LU, Factorisation de Cholesky

Exercice 6. Calculer les conditionnements pour les normes matricielles subordonnées aux normes $|.|_p$, $p = 1, 2, \infty$ des matrices exactes obtenues a la première étape d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire

$$\begin{aligned} &10^{-4}x_1 + x_2 = 1, \\ &x_1 + x_2 = 2 \end{aligned}$$

selon que l'on commence, ou non, par échanger les deux lignes.

Exercice 7. Effectuer les factorisations LU des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 & -5 \\ 24 & -12 & 41 & -39 \\ -27 & 18 & -62 & 54 \\ 9 & 14 & 15 & -47 \end{pmatrix}.$$

Calculer alors les déterminants de A et B.

Exercice 8. Montrer que la factoraisation LU préserve la structure de matrices bandes, au sens suivant: si on note $A = (a_{ij}), L = (l_{ij}), U = (u_{i,j})$ alors

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| \geq p \ \Rightarrow \begin{cases} l_{ij} = 0 & \text{pour} \quad i-j \geq p, \\ u_{ij} = 0 & \text{pour} \quad i-j \leq p, \end{cases}$$

Exercice 9. Effectuer la factorisation de la matrice de Cholesky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique d'ordre n telle que les déterminants dans matrices Δ_k d'éléments a_{ij}, $i, j = 1..k$ soient strictement positifs. Montrer que la matrice A est définie positive.

En déduire une méthode, basée sur la décomposition de Cholesky, permettant de décider si une matrice est définie positive.