ISFA 2ème année Module: Optimisation 2007-2008

Série 2:
Analyse matricielle: résolution directe de systèmes linéaires

Valeurs propres de matrices

Exercice 1. (Norme matricielle et rayon spectral) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\sigma(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A et $\rho(A)$, appelé rayon spectral de A, le module de la plus grande valeur propore de A.

i) Soit $\|.\|$ une norme matricielle induite: montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$ et en déduire que $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

ii) Montrer en utilisant la réduction de Jordan que si $\rho(A) < 1$ alors $\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$.

iii) Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon} A$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\|A_\varepsilon^k\| \leq 1$. En déduire alors que $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon$ et $\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Exercice 2. (Théorème de Gerschgorin: localisation des valeurs propres) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$,

i) Montrer que $\sigma(A) \subset \Big\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \Big\}$.

ii) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante:

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1..n,$$

alors A est inversible.

iii) Montrer que $|\det(A)| \geq \Pi_{i=1}^n \big(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\big)$.

iv) Considérons la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible.

v) On considère le problème linéaire $Au = b$. Montrer que si $b \geq 0$ (i.e; toutes les composantes de b sont positives), alors $u \geq 0$.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Indication. commencer par traiter le cas $a_2 = 1,\, a_i = 0,\ i \neq 2$.

Exercice 4. On considère une matrice carrée A décomposée par bloc

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Montrer que si A_{11} est inversible, alors $\mathrm{det(A) = det(A_{11})\,det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})}$

Normes vectorielles, normes matricielles

Exercice 1. On se place sur l'espace $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}\,\mathrm{ou}\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{K}^n$, $\lim\limits_{p\to\infty} |v|_p = v_\infty$.

Exercice 2. Soit $p, q = 1, 2, \infty$, trouver dans chaque cas la constante optimale $c_{p,q}$ tel que pour tout $v \in \mathbb{K}^n$, $|v|_p \leq c_{p,q}|v|_q$ (il y'a 6 cas à traiter).

Exercice 3. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à diagonale strictement dominante. On note $\delta = \min_{i=1..n}\left(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)$. On note $\|.\|_\infty$ la norme matricielle induite par la norme vectorielle $|.|_\infty$: montrer que $\|A^{-1}\|_\infty \leq \delta^{-1}$.

Exercice 4. Soit $\|.\|$ une norme matricielle. Montrer que si $\|B\| < 1$ alors $Id - B$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide d'une série. On calculera egalement une majoration de la norme de l'inverse de $Id - B$.