ISFA 2ème année Module: Optimisation 2007-2008

Série 3:

Analyse matricielle: méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Dans cet exercice, on montre qu'en général, on ne peut pas comparer la convergence de deux méthodes de résolution de système linéaire par une méthode itérative.
i) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit J la matrice associée à la méthode de Jacobi et $\mathcal{L}$ la matrice associée à la méthode de Gauss-Seidel: montrer que

$$\rho(J) < 1 < \rho(\mathcal{L}).$$

ii) On considère maintenant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

montrer que

$$\rho(\mathcal{L}) < 1 < \rho(J).$$

Exercice 2. (Méthode de relaxation) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $A = D - E - F$. Soit $\omega \in \mathbb{R}$: on introduit la décomposition de la matrice A sous la forme $A = M - N$ où $M = \frac{D}{\omega}$ et $N = (\frac{1}{\omega} - 1)D + F$ et on considère la matrice $\mathcal{L}_\omega = M^{-1}N$ de la méthode itérative associée à cette décomposition.

i) Montrer que $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$.

ii) Montrer que si $0 \leq \omega < 1$ et A est à diagonale strictement dominante, $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$.

iii) Montrer que si A est symétrique définie positive, $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ si et seulement si $0 < \omega < 2$.

Exercice 3. (Comparaison des méthodes) On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

où $h = \frac{1}{n+1}$.

i) Calculer $\rho(J)$ où J est la matrice associée à la méthode de Jacobi.

ii) Calculer $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ associée à la matrice de la méthode de relaxation $(0 < \omega < 2)$.

iii) Pour chaque méthode, écrire le rayon spectral associé sous la forme $\rho = 1 - f(h)$ et comparer allors les méthodes de résolution de système linéaires du type $Ax = b$.

Exercice 4.

i) Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $r > 0$. Montrer que $(r\,Id - H)(r\,Id + H)^{-1}$ est symétrique et

$$\|(r\,Id - H)(r\,Id + H)^{-1}\|_2 < 1.$$

ii) Soit H_1 et H_2 deux matrices symétriques et définies positives et $r > 0$: étant donné $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit le schema

$$(H_1 + r\,Id)u_{k+\frac{1}{2}} = (r\,Id - H_2)u_k + b, \quad (H_2 + r\,Id)u_{k+1} = (r\,Id - H_1)u_{k+\frac{1}{2}} + b.$$

Ecrire le schema sous la forme $u_{k+1} = B\,u_k + c$ et montrer que $\rho(B) < 1$.

iii) Montrer alors que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in \mathbb{R}^n$ solution d'un système linéaire qui ne dépend que de H_1, H_2 et b.