ISFA 2ème année Module: Optimisation 2007-2008

Série 4:

Optimisation sous contraintes: conditions d'optimalité et algorithmes

Exercice 1. Soit K un convexe fermé borné de $\mathbb{R}^n$ et J un fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

i) Si J est de classe C^1, montrer que si u est un minimum de J sur K alors

$$(\nabla J(u), v-u) \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

ii) On suppose que J est donnée par

$$J(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (b, v) + j(u), \quad A \in M_n(\mathbb{R}),\; b \in \mathbb{R}^n,$$

où A est une matrice symétrique définie positive, et j est une fonction continue, convexe, à valeur positive et non nécessairement dérivable. Montrer qu'il existe un unique élément $u \in K$ tel que $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$.

iii) Montrer que $u \in K$ est solution du problème si et seulement si

$$(Au - b, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Exercice 2. On considère une fonction quadratique $J(u) = \dfrac{1}{2}(u, Au) - (b, v)$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème de minimisation sous contrainte linéaire

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \,/\, Cv = d\}, \quad C \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\; d \in \mathbb{R}^m.$$

i) Montrer que ce problème possède une unique solution.

ii) Montrer que $u \in \mathbb{R}^m$ est solution du problème si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Au + C^t\lambda = 0, \quad Cu = d.$$

iii) On suppose que le rang de la matrice est m, exprimer la solution en fonction de A, b, C, d.

Exercice 3. Trouver les extremas potentiels des fonctions de plusieurs variables sous la contrainte indiquée. Dire dans quel cas on peut vérifier que le point obtenu est effectivement un extremum.

- $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$,
- $f(x, y) = 4\,x + 6\,y$ avec $x^2 + y^2 = 13$,

- $f(x, y) = x^2\, y$ avec $x^2 + 2\, y^2 = 6$,
- $f(x, y) = x + 2\, y$ avec $xy = 1$ et $y^2 + z^2 = 1$.

Exercice 4. (méthode d'Uzawa) On considère la fonction J quadratique définie par $J(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x$ où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à calculer une approximation de la solution unique du problème de minimisation

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v), \quad U = \{v \in \mathbb{R}^n \;/\; Cv = 0\}\,, \;\; C \in \; M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Etant donné $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, on définit la suite u^k, λ^k de la manière suivante:

$$Au^k - b + C^t \lambda^k = 0, \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho C\, u^k,$$

où $\rho > 0$ est un paramètre fixé.

i) Montrer que si $\rho > 0$ est suffisamment petit, la suite u^k converge.

ii) La suite λ^k converge-t-elle?

Exercice 5. On reprend le problème précédent et, étant donné (λ^0, u^0), on définit la suite (λ^k, u^k) telle que

$$u^{k+1} = u^k - \rho_1 (Au^k - b + C^t \lambda^k, \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho_1 \rho_2 C u^{k+1},$$

où $\rho_1, \rho_2 > 0$ sont deux paramt̀res fixés.

i) Montrer que si $\rho_1 > 0$ est suffisamment petit, $\beta = \|Id - \rho_1 A\|_2 < 1$.

ii) Soit λ tel que $Au + C^t \lambda = b$, montrer que sir ρ_2 est suffisamment petit, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\gamma \|u^{k+1} - u\|^2 \leq \Big(\frac{\|\lambda^k - \lambda\|^2}{\rho_2} + \beta \|u^k - u\|^2 \Big) - \Big(\frac{\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2}{\rho_2} + \beta \|u^{k+1} - u\|^2 \Big).$$

iii) En déduire que la suite u_k converge vers u pour ρ_1, ρ_2 suffisamment petit.

iv) Cette méthode est la méthode de *Arrow-Hurwicz*: quel est son avantage par rapport à la méthode d'Uzawa?