Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Calcul Différentiel Printemps 2010

T.D. Série n°4 : Théorème d'inversion locale - Théorème des fonctions implicites

N.B.: "difféomorphisme" signifie ici "difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$"

Exercice I. (Théorème d'inversion locale)

(a) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathscr{C}^1$ qui soit un difféomorphisme au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$ et qui ne soit pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$.

(b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (sin(x) + sh(y), sh(x) - sin(y))$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice II. (Théorème d'inversion locale)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application définie par

$$f(x,y,z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x - y).$$

(a) Quel est le rang de la matrice Jacobienne de f au point (x,y,z)?

(b) Montrer qu'au voisinage de tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, f est un difféomorphisme.

(c) f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$?

Exercice III. (Théorème d'inversion locale)

Nous munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique

$$(x = (x_1, ..., x_n)^T, y = (y_1, ..., y_n)^T) \mapsto < x, y > = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et de la norme euclidienne $\|.\|$ associée. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle qu'il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $< df_x(h), h > \geq \alpha \|h\|^2$.

(a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = < f(tb + (1-t)a, b - a >,$$

montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, nous avons $< f(b) - f(a), b - a > \geq \alpha \|b - a\|^2$.

(b) En déduire que f est une application fermée (i.e. pour tout fermé F de $\mathbb{R}^n$, $f(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$).

(c) Montrer que pour tout $x \in R^n$, df_x est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(d) Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice IV. (Théorème d'inversion locale)

Considérons l'espace de Banach H_0 des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ normé par la norme de la convergence uniforme (autrement dit $f \mapsto \|f\|_0 = sup_{t \in I}|f(t)|$, et l'espace vectoriel H_1 des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, nulles en 0, normé par $f \mapsto \|f\|_1 = sup_{t \in I}|f'(t)|$.

(a) Montrer que $(H_1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

(b) Soit $\phi : H_1 \to H_0$ l'application définie par $\phi(f) = f' + ff'$ pour tout $f \in H_1$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur H_1 et calculer $d\phi_f(\varphi)$ pour $(f, \varphi) \in H_1 \times H_1$.

(c) Montrer que ϕ est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans H_1 dans un voisinage de 0 dans H_0. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $g \in H_0$, $\|g\|_0 < \varepsilon$, l'équation différentielle

$$f' + ff' = g,$$

possède une solution $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

Exercice V. (Théorème des fonctions implicites)

Montrer que l'équation

$$xy - ylnz + sin(xz) = 0$$

permet de définir une fonction $(x, y) \mapsto z = f(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de $(0, 2)$ et valant 1 en $(0, 2)$.

Exercice VI. (Théorème des fonctions implicites)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. En utilisant le théorème des fonctions implicites montrer que f ne peut pas être injective.

Exercice VII. (Théorème des fonctions implicites)

Montrer qu'au voisinage du point $(1, 1, 1, 1, 1)$ les équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xu^2 + yzv + x^2z & = & 3 \\ xyv^3 + 2zu - u^2v^2 & = & 2 \end{array} \right.$$

permettent de définir (u, v) comme une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de (x, y, z) et calculer la différentielle au point $(1, 1, 1)$ de cette fonction.

Exercice VIII. (Théorème des fonctions implicites - Matrices)

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, pour tout $(A, B) \in E \times E$.
Soit $D \in E$, montrer que si $B \in E$ est suffisamment petite (au sens de cette norme), l'équation en Y, $Y + YDY = B$ a une solution.

Exercice IX. (Théorème des fonctions implicites)

Soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Posons

$$U = \{\varphi \in E; \varphi(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in [a, b]\}$$

(a) Montrer que U est un ouvert de E.

(b) Soit $f : U \to E$ définie par $f(\varphi) = 1/\varphi$. Montrer en utilisant l'application $B : U \times U \to E$ définie par $B(\varphi, \psi) = \varphi\psi$ et à l'aide du théorème des fonctions implicites que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Exercice X. (Partiel avril 2005)

Soit E un espace de Banach. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues sur E, $I_E : x \in E \mapsto x$ et $I : u \in \mathscr{L}(E) \mapsto u$. Soit $f : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ par $f(u) = u^3 = u \circ u \circ u$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait que la boule ouverte de centre I et de rayon 1 est incluse dans l'ensemble des isomorphismes de $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{L}(E)$ et calculer sa différentielle en u, notée df_u, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.

2. Démontrer l'inégalité

$$\|df_u - 3I\|_{\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))} \leq 6\|u - I_E\|_{\mathscr{L}(E)} + 3\|u - I_E\|^2_{\mathscr{L}(E)}$$

pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$. Indication: on pourra écrire $u = I_E + v$.

3. Soit $\mathscr{B}$ la boule ouverte dans $\mathscr{L}(E)$, de centre I_E et de rayon $1/3$. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{B}$, df_u est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ dans $\mathscr{L}(E)$.

4. (a). Pour tout $u \in \mathscr{B}$, on pose $g(u) = f(u) - 3u$. Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}$

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{7}{3}\|u - v\|.$$

(b). En déduire que f est injective sur $\mathscr{B}$.

5. Montrer que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathscr{B}$ sur $f(\mathscr{B})$.