Calcul différentiel, TD 8

Equations différentielles

1. Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f: \Omega \to E$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω. On a donné en cours un théorème prouvant l'existence et l'unicité des solutions maximales de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$. On peut alors se poser la question suivante : dans le cas particulier où $\Omega = J \times U$, J intervalle ouvert, U ouvert de E, les solutions maximales sont-elles définies sur J ? La réponse est non comme le montre l'exemple suivant. On prend $U = E = \mathbb{R}$, $J = \mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle
$$x'(t) = ((x(t))^2 \qquad (1)$$
Soit $\varphi: I \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (1) telle que $\varphi(0) = 1$. Montrer que $\varphi(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. En déduire l'expression de $\varphi(t)$ pour $t \in I$. Conclure.

2. Soient E un espace de Banach, $f: \mathbb{R} \times E \to E$ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R} \times E$, localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R} \times E$. On pose $M = \sup\limits_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} ||f(t,x)||$.
   (a) Montrer que toute solution φ de l'équation différentielle
   $$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (1)$$
   est lipschitzienne de rapport M.
   (b) En déduire que toute solution maximale de l'équation (1) est définie sur $\mathbb{R}$. Indications : soit $\varphi: I =]a, b[\to E$ une solution maximale. On raisonnera par l'absurde en supposant, par exemple, que $b \in \mathbb{R}$, on montrera que $\lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t)$ existe et on en déduira qu'on peut prolonger φ à droite de b.

3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle
   $$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad (1)$$
   (a) Montrer que si φ et ψ sont deux solutions de (1) définies sur le même intervalle I, s'il existe $a \in I$ tel que $\varphi(a) < \psi(a)$, on a $\varphi(t) < \psi(t)$, $\forall t \in I$.
   On suppose maintenant que $f(t, 0) = f(t, 1) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   (b) Soient $(s, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ et φ une solution de (1) définie sur un intervalle ouvert I contenant s et telle que $\varphi(s) = x$.
      i. Montrer que $\varphi(t) \in [0, 1]$, $\forall t \in I$.
      ii. Montrer que si $b = \sup I < +\infty$, alors $\lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t)$ existe. En déduire l'existence d'un intervalle ouvert J, tel que $I \subset J$ et $I \neq J$, et d'une solution $\psi: J \to \mathbb{R}$ telle que $\psi|_I = \varphi$.

(c) Montrer que, $\forall (s,x) \in \mathbb{R}\times[0,1]$, la solution maximale de (1) valant x en s est définie sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = 3\sin(t - x(t)). \qquad (1)$$

Montrer que ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$. Indication : on pourra montrer que, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $h > 0$, l'équation différentielle (1) possède une solution définie sur $[t_0 - h, t_0 + h]$.

5. L'équation décrivant le mouvement d'un pendule rigide simple (sans amortissement ni entrainement) est

$$x'' + \sin(x) = 0,$$

où l'inconnue x est une fonction de t et $x(t)$ désigne, à l'instant t, l'angle entre la verticale orientée vers le bas et l'axe du pendule.

(a) Réécrire cette équation d'ordre 2 comme un système de deux équations d'ordre 1, de la forme

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ \\ y' = f_2(x,y). \end{cases} \qquad (1)$$

On notera f la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

(b) Montrer que f est (globalement) lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$, et en déduire l'existence globale sur $\mathbb{R}$ d'une unique solution, de classe $\mathcal{C}^\infty$, au problème de Cauchy pour le système (1).

(c) Vérifier que f est 2π-périodique par rapport à x. On ne l'étudiera que sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$.

i. Déterminer $\{(x,y) \in [-\pi,\pi]\times\mathbb{R},\ f_1(x,y) = 0\}$ et $\{(x,y) \in [-\pi,\pi]\times\mathbb{R},\ f_2(x,y) = 0\}$.

ii. Déterminer les points d'équilibre de f sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$.

iii. Etudier, sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$, le signe de f_1 et f_2, et en déduire le champ des directions du système (1).

(d) Montrer que si la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, est solution du système (1), alors $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y^2(t)/2 - \cos(x(t)) = a$. Physiquement, $y^2(t)/2$ est l'énergie cinétique du pendule à l'instant t et $-\cos(x(t))$ est son énergie potentielle.

(e) Montrer que $\{(x,y) \in [-\pi,\pi]\times\mathbb{R},\ y^2/2 - \cos(x) = a\}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et à celui des ordonnées.

Notons $T_a = \{(x,y) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+,\ y^2/2 - \cos(x) = a\}$. Donner l'allure de T_a en fonction de la valeur de a (on distinguera $a < -1$, $a = -1$, $a \in]-1,1[$, $a = 1$ et $a > 1$).