TD Maths II n° 4

1) Potentiel complexe (suite). Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{R}^{+*}$, et

$$f \,:\, z \mapsto f(z) \,=\, \overline{\mathbf{a}}\, z \,+\, \mathbf{a}\,\frac{R^2}{z}\,.$$

Soit Γ le cercle de centre 0 et de rayon R. Que vaut $\displaystyle\oint_\Gamma f'(z)\,\mathrm{d}z$? Soit $\mathbf{v}$ le champ de vitesses de potentiel complexe f, c'est-à-dire

$$\mathbf{v} \,=\, \overline{f'(z)}\,.$$

Montrer que $\mathbf{a}$ est la valeur de $\mathbf{v}$ à l'infini. Que vaut la circulation de $\mathbf{v}$ le long de Γ ? Montrer que Γ est une ligne de courant de $\mathbf{v}$, c'est-à-dire une ligne de niveau de la fonction de courant $\psi \,=\, \mathrm{Im} f$.

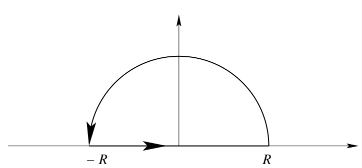
Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

2) Soit Γ le cercle de centre 0 et de rayon 1, et

$$f \,:\, z \mapsto f(z) \,=\, \frac{z}{(2\,z^2 \,+\, 5\,z \,+\, 2)^2}\,.$$

Quels sont les pôles de f à l'intérieur de Γ ? En déduire la valeur de $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, puis de

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 \,+\, 4\,\cos\theta)^2}\,.$$

2) Soit $R > 0$ et $\mathcal{C}$ 

le demi-cercle supérieur de rayon R, fermé par le segment $[-R, R]$. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z\,\mathrm{e}^{i\,z}}{z^4 \,+\, z^2 \,+\, 1}\,dz\,.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{x^4 \,+\, x^2 \,+\, 1}\,dx\,.$$

Par la même méthode, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x)\,\sin(2x)}{x^2 \,+\, 2\,x \,+\, 2}\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\sin x}{(x^2 \,+\, a^2\,)^2}\,dx\,, \quad a > 0\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\,t\,x}}{1 \,+\, x^2}\,dx\,, \quad t > 0\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 \,+\, x^2)^n}\,dx\,, \quad n \geq 1\,.$$