TD Maths II n° 7

Représentations conformes

i). Demi-plan $\rightsquigarrow$ disque : Montrer que l'homographie

$$z \mapsto = \frac{z - i}{z + i}$$

envoie l'axe réel sur le cercle unité, et le demi-plan supérieur sur le disque unité. Quelle est l'application réciproque ?

ii). Secteur $\rightsquigarrow$ demi-plan : Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $z \mapsto z^m$ est injective sur le secteur angulaire

$$S := \{ z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta} ;\ r \in \mathbb{R}^{+*},\ \theta \in]\,0\,,\,\pi/m\,[\,\}$$

et transforme S en un demi-plan. Trouver l'application réciproque. Mêmes questions avec $z \mapsto \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2$ et $S_1 = \{ z = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta} ;\ r \in]0,1[\,,\ \theta \in]\,0\,,\,\pi/m\,[\,\}$. Généraliser ces transformations conformes à $m \in [1/2, +\infty[$ (pas nécessairement entier!).

iii). Bande $\rightsquigarrow$ demi-plan : Soit $a > 0$ et

$$B := \{ z \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Im} z \in]\,0\,,\,a\,[\,\}.$$

Montrer que $f : z \mapsto \mathrm{e}^{\pi\,z/a}$ est injective sur B. Trouver $f(B)$ et l'application réciproque. Mêmes questions avec $B_0 := \{ z \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Im} z \in]\,0\,,\,a\,[\,,\ \mathrm{Re} z > 0\}$ et $z \mapsto \mathrm{ch}(\pi\,z/a)$.

Hydrodynamique

- Soit $\mathbf{v}$ un champ de vitesse radial, c'est-à-dire de la forme

  $$\mathbf{v}(z) = \lambda(|z|)\,z$$

  avec λ à valeurs réelles. On suppose que le flux de $\mathbf{v}$ à travers tout cercle centré en 0 vaut N. Cet écoulement correspond à une source placée en 0 lorsque $N > 0$ et à un puits lorsque $N < 0$. Montrer que ce champ admet un potentiel complexe dans le plan fendu $\mathbb{C} \backslash D_\alpha$ ($\alpha \in [-\pi, \pi[$). Tracer les lignes de courant et les lignes équipotentielles. On pourrait de même placer la source (ou le puits) en un point $a \in \mathbb{C}$ quelconque. Quel serait alors le potentiel complexe associé?

- En superposant une source placée en $a \in \mathbb{R}$ et un puits placé en $b \in \mathbb{R}$, $b \neq a$, de flux opposés, qu'obtient-on comme potentiel complexe ? Déterminer la limite de ce potentiel complexe lorsque $(b - a) \to 0$ et $N\,(b - a) \to p \in \mathbb{R}^*$. Tracer les lignes de courant et les lignes équipotentielles.

- Soit $\mathbf{v}$ un champ de vitesse azimutal, c'est-à-dire de la forme

  $$\mathbf{v}(z) = i\,\lambda(|z|)\,z$$

  avec λ à valeurs réelles. On suppose que la circulation de $\mathbf{v}$ à travers tout cercle centré en 0 vaut Γ. Montrer que ce champ admet un potentiel complexe holomorphe dans le plan fendu $\mathbb{C} \backslash D_\alpha$ ($\alpha \in [-\pi, \pi[$). Tracer les lignes de courant et les lignes équipotentielles.