Analyse numérique des équations aux dérivées partielles pour l'oral de modélisation, TD1

Dans cette première séance, on va s'intéresser à la résolution d'équations linéaires elliptiques ou paraboliques en dimension 1 ou 2 d'espace en utilisant la méthode des différences finies.

Equations elliptiques

On s'intéresse ici au problème suivant

$$-\Delta u + c(x)u = f(x), \ \ \forall x \in \Omega, \tag{0.1}$$

avec les conditions de Dirichlet $u \mid_{\partial\Omega} = g$ ou les conditions de Neuman $\partial_n u \mid_{\partial\Omega} = g$, $\partial_n u$ désignant la dérivée normale de u à la frontière $\partial\Omega$. Les fonctions f et $c > 0$ sont supposées régulières. On se restreindra ici à $\Omega = [0,1]$ ou $\Omega = [0,1]^2$.

Différences finies en dimension 1

En dimension 1, le problème avec conditions de Dirichlet s'écrit

$$-u'' + c(x)u = f(x), \ \ \forall x \in]0,1[, u(0) = \alpha, \ \ u(1) = \beta. \tag{0.2}$$

Montrer par un changement de fonctions qu'on peut se ramener à $\alpha = \beta = 0$.

i) On choisit une subdivision de $[0,1]$ avec $N+1$ points. Soit $h = \frac{1}{N}$, le pas d'espace. On cherche à calculer $u_i)_{i=0..N}$ approximation de la solution u aux points $x_i = \frac{i}{N}$. En utilisant l'approximation de la dérivée seconde

$$u''(ih) \approx \frac{u((i+1)h) - 2u(ih) + u((i-1)h)}{h^2},$$

et en utilisant les conditions aux bords $u_0 = u_N = 0$, écrire le système linéaire vérifié par $u_i)_{i=1..N-1}$.

ii) Ecrire également le système quand on remplace les conditions de Dirichlet par les conditions de Neumann, $u'(0) = u'(1) = 0$, (on rajoutera pour cela des points fictifs $u_{-1} = u_0$ et $u_{N+1} = u_N$).

iii) Enfin écrire un programme qui résout le problème initial avec conditions de Dirichlet non homogènes (α et β non nuls) pour des fonctions $c > 0$ et f quelconques.

iv) Pour $f(x) = (1 + 2x - x^2)\exp(x)$, $c(x) = x$ et les conditions aux limites $u(0) = 1$ et $u(1) = 0$, la solution exacte u est donnée par $u(x) = (1-x)\exp(x)$. Résoudre numériquement ce problème avec le programme de la question précédente et tracer sur un graphique en coordonnées log-log, l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte en fonction du pas d'espace h ainsi qu'une pente de taille 1 et une pente de taille 2. Conclure quant à la précision du schéma.

Différences finies en dimension 2

On veut résoudre $-\Delta u = f$ avec conditions de Dirichlet aux bords. On choisit un maillage uniforme de $[0,1]^2$ et on veut calculer une approximation de $u(ih, jh)$ qu'on notera $u_{i,j}$.

i) Ecrire un système linéaire pour $u_{i,j}$ en prenant les conditions de Dirichlet $u\,|_{\partial\Omega} = 0$.

ii) Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement le problème pour une fonction f quelconque.

iii) On choisit $f(x,y) = x(1-x) + y(1-y)$, la solution est $u(x,y) = \frac{1}{2}x(1-x)y(1-y)$. Tracer sur un graphique en coordonnées log-log, l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte en fonction du pas d'espace h et estimer la vitesse de convergence.

iv) On met des conditions non homogènes aux bords

$$u(0,.) = u(.,0) = 0, \text{ et } u(1,.) = u(.,1) = 1. \tag{0.3}$$

Ecrire un schema itératif pour résoudre $-\Delta u = 0$ avec ces conditions aux bords.

Problèmes paraboliques

On s'intéresse à l'équation de la chaleur en dimension 1.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall (x,t) \in]0,1[\times[0,T], \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \;\; u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{0.4}$$

On choisit un pas de temps δt et un pas d'espace δx et on cherche à calculer une approximation de $u(n\delta t, j\delta x)$ noté u_j^n. En temps que problème d'évolution, l'équation de la chaleur peut se traiter de manière explicite ou implicite. On obtient les schémas d'Euler explicite et Euler implicite

$$\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\delta x^2} = 0, \\ &\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\delta x^2} = 0. \end{aligned} \tag{0.5}$$

On a également le schéma de Crank Nicolson qui est une interpolation des deux schémas précédents.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = \frac{1}{2}\Big(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\delta x^2}\Big). \tag{0.6}$$

i) Programmer ces schémas numériques permettant de résoudre l'équation de la chaleur sur un intervalle de temps donné et pour une donnée initiale quelconque.

ii) Mettre en évidence l'instabilité du schema d'Euler explicite (on prendra des pas de temps de plus en plus grand). Montrer en revanche que les schemas d'Euler implicite et Crank Nicolson sont inconditionnellement stables.

iii) On choisit $u_0(x) = \sin(\pi x)$, alors $u(x,t) = \exp(-\pi^2 t)\sin(\pi x)$, en tracant un diagramme log-log de l'erreur en fonction du pas de temps (le pas d'espace est fixé), mettre en évidence l'ordre en temps de chaque schéma.

iv) En utilisant la discrétisation du Laplacien en dimension 2 obtenu dans l'étude précédente, ecrire un programme permettant de résoudre l'équation de la chaleur dans $[0,1]^2$ avec conditions de Dirichlet homogènes aux bords et pour une donnée initiale quelconque.

Références

[1] P. Ciarlet *Optimisation et calcul matriciel*, Masson.

[2] P.-A Raviart J.-M. Thomas *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod

[3] Smith *Numerical solutions of partial differential equations: finite difference methods*