Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Option: M2AO 2007-2008

Série n°1 :
Les équations différentielles ordinaires.

Exercice 1. Problème de catalyse

L'exemple suivant de Robertson (1966) est devenu céèbre comme équation test pour des études numériques (Willoughby 1974): la réaction chimique. On veut générer une substance chimique C à partir de la substance A en utilisant un catalyseur B (le catalyseur permet d'accélérer la réaction). On a le bilan de réaction suivant

$$\left\{\begin{array}{lll} A & \longrightarrow B & \text{réaction lente} \\ B+B & \longrightarrow B+C & \text{réaction très rapide} \\ B+C & \longrightarrow A+C & \text{réaction rapide} \end{array}\right.$$

Ce bilan permet d'obtenir le système différentiel suivant : nous notons y_α la concentration chimique de la substance $\alpha \in \{A, B, C\}$

$$\left\{\begin{array}{lll} y_A' & = & -k_1\, y_A \;+\; k_3\, y_B\, y_C \\ y_B' & = & +k_1\, y_A \;-\; k_3\, y_B\, y_C \;-\; k_2\, y_B^2 \\ y_C' & = & k_2\, y_B^2. \end{array}\right.$$

avec $k_1 = 0.04$, $k_2 = 3.\,10^7$ et $k_3 = 10^4$, avec les conditions initiales $y_A(0) = 1$ et $y_B(0) = y_C(0) = 0$.

a) Démontrer que ce système admet une unique solution locale.

b) Démontrer que pour tout $\alpha \in \{A, B, C\}$, $y_\alpha(t) \geq 0$ (ce qui est attendu puisque y_α est une concentration!). On pourra raisonner par l'absurde : prendre un temps t_0 ou la solution s'annule et montrer qu'alors elle ne peut pas décroître.

c) Montrer que $y_A(t) + y_B(t) + y_C(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$. En déduire qu'il existe une unique solution globale.

d) Chercher les états stationnaires et étudier la stabilité du système linéarisé autour du point stationnaire.

e) Travaux Pratiques :

- on pourra implémenter un schéma d'Euler explicite et un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4.
- calculer la solution numérique en temps longs pour différents pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, 10^{-3} et 10^{-4}. Tracer alors y_B. Que remarque-t-on?

f) Écrire un schéma d'Euler implicite pour ce système et montrer que l'on peut calculer la solution sans faire appel à un algorithme numérique non linéaire.

g) Travaux Pratiques :

- on pourra implémenter un schéma d'Euler implicite.
- calculer la solution numérique en temps longs pour différents pas de temps $\Delta t = 10^{-2}$, 10^{-3} et 10^{-4}. Tracer alors y_B. Que remarque-t-on?

Exercice 2. Problème à N corps

Considérons le problème à N corps suivant qui est important aussi bien en astronomie (mouvement des planètes) que dans la bilogie moléculaire (mouvement des atomes). Les équations sont

$$y_i'' = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{y_j - y_i}{\|y_j - y_i\|^3}.$$

où $y_i \in I\!R^3$ est la position du $i$ème corps, m_i sa masse et G la constante gravitationelle.

a) Écrire ce système comme un système du premier ordre.

b) Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour démontrer l'existence locale de solution?

c) Travaux Pratiques :

- implémenter un schéma d'Euler explicite;
- tracer la solution; est-ce que la solution paraît raisonnable?

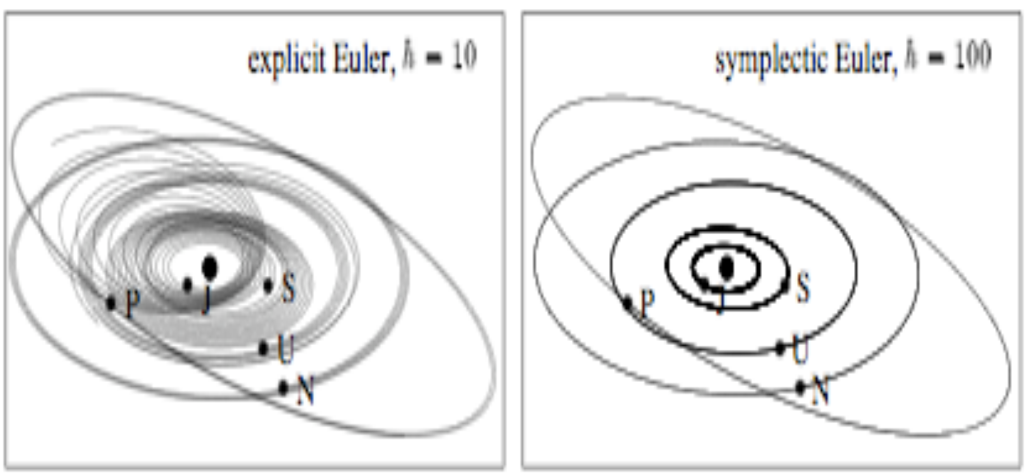

Figure 1: Illustration du problème à N corps avec un schéma d'Euler explicite et un schéma symplectique (voir plus tard...)

Exercice 3. Pont de Tacomma

Pour étudier le phénomène de stabilité du pont de Tacoma, nous mettons au point un modèle simple

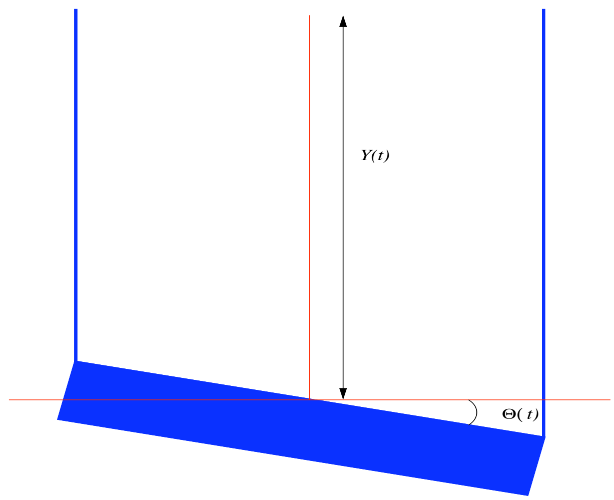

Figure 2: Étude du mouvement d'un pont à l'aide d'une équation aux dérivées ordinaires.

Si nous notons par $f(t) = \lambda \sin(\omega t)$, avec λ désigne l'amplitude et $\omega/2\pi$ la fréquence d'oscillation, nous voulons étudier l'évolution de l'angle θ et l'évolution de l'amplitude $y(t)$ voir Figure 2, le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta''(t) \;=\; -\delta\,\theta'(t) \;+\; \dfrac{6\,K}{m}\,\cos(\theta(t))\,\sin(\theta(t)) \;+\; \lambda\,\sin(\omega\,t) \\[2ex] y''(t) \;=\; -\delta\,y'(t) \;-\; \dfrac{2K}{m}\,y(t) \;+\; g, \end{array} \right.$$

où g représente la gravité, K est la force de réaction des câbles.

a) Écrire ce système différentiel comme un système du premier ordre.

b) Montrer qu'il existe une unique solution

c) Écrire un schéma d'Euler explicite pour ce schéma.

d) Travaux Pratiques :

- Implémenter un schéma d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4.
- Tracer la solution : (y, θ). Faire varier les paramètres pour constater différents phénomènes.

Exercice 4. Modèle de Lorentz

On considère le modèle de Lorentz suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A' \;=\; -\sigma\,y_A \;+\; \sigma\,y_B \\ y_B' \;=\; -\,y_A\,y_C \;+\; r\,y_A \;-\; y_B \\ y_C' \;=\; y_A\,y_B \;-\; b\,y_C. \end{array} \right.$$

avec $y_A(0) = -8$, $y_B(0) = 8$ et $y_C(0) = r - 1$, puis $\sigma = 10$, $r = 28$ et $b = 8/3$.

a) Justifier que ce système admet une solution unique locale en temps.

b) Écrire un schéma d'Euler explicite pour ce schéma.

c) Travaux Pratiques :

- Implémenter un schéma d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4.
- Tracer la solution : $(y_A(t), y_B(t), y_C(t)$. On pourra aussi tracer la courbe paramétrée $(y_A(t), y_B(t))$ avec $t \geq 0$. Qu'observe-t-on?

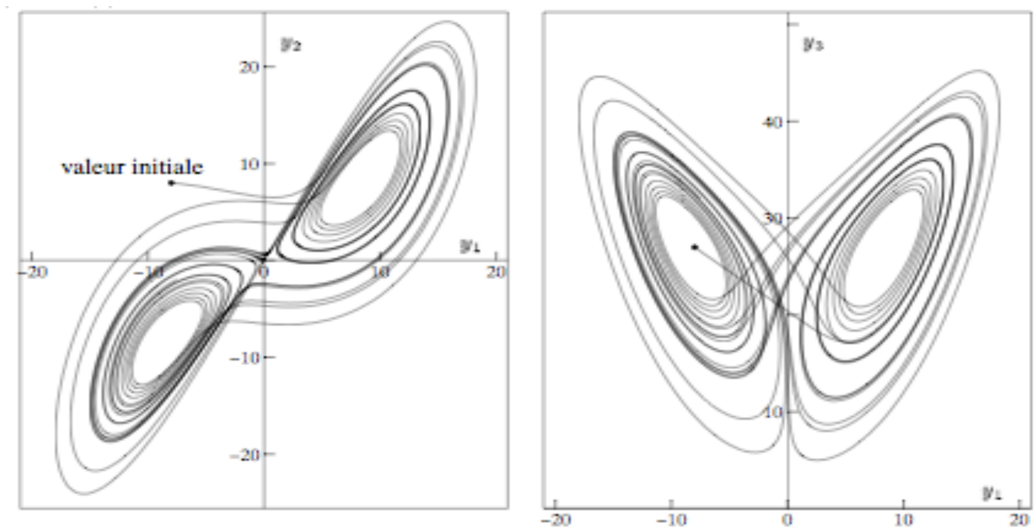

Figure 3: Exemple de solutions du modèle de Lorentz, on observe un comportement chaotique de la solution.

Exercice 5. Le schéma d'Euler

Nous considérons le problème de Cauchy suivant: trouver $u \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} u'(t) = -150\, u(t) \,+\, 30 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

a) Donner la solution exacte de cette équation.

b) un schéma d'Euler explicite

- Ecrire le schéma d'Euler explicite pour cette équation.
- Trouver une relation de récurrence entre $u^{n+1} - 1/5$ et $u^n - 1/5$.
- En déduire u^n.
- Nous prenons $h = 1/50$, calculer u^n et conclure.

c) un schéma d'Euler implicite Ecrire le schéma d'Euler implicite pour cette éqaution et répondre aux mêmes questions qu'au point b).