Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Option: M2AO 2007-2008

Devoir Maison n°1 :
Approximation d'équation différentielles ordinaires.

1 Les schémas simplectiques

Pour tracer un cercle $C(0,1)$ de centre $(0,0)$ et de rayon $r=1$, nous pouvons tracer les courbes paramétrées $(x(t)=\cos(t), y(t)=\sin(t))$, avec $t\in[0,2\pi]$ en utilisant un grand nombre de point t^n, $n=0,\ldots,N$.

a) Montrer que nous pouvons obtenir un cercle en résolvant le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), & x(0)=1, \\ y'(t) = x(t), & y(0)=0. \end{cases} \tag{1}$$

b) Nous posons $h=2\pi/N$. Montrer que le système d'Euler explicite appliqué à (1) conduit à calculer les points $P^n=(x^n,y^n)$ de coordonnées

$$\begin{bmatrix} x^n \\ y^n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

c) Montrer que pour tout $n\geq 0$, nous avons $(A^T)^n\, A^n = A^n(A^T)^n = (A^T\, A)^n = (AA^T)^n$.
Puis calculer $\|A^n\|_2$ et $\|(A^T)^n\|_2$.
En déduire que les points P^n vérifient $|x^n|^2+|y^n|^2=(1+h^2)^n$.
Les points P^n sont-ils sur le cercle $C(0,1)$?

d) Montrer que le système d'Euler implicite appliqué à (1) conduit à calculer les points $Q^n=(x^n,y^n)$ dont les coordonnées vérifient $|x^n|^2+|y^n|^2=1/(1+h^2)^n$.

e) Soit $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une fonction aussi régulière que nous le souhaitons. Nous pouvons définir un nouveau schéma implicite pour résoudre le problème

$$u'(t)=f(t,u(t)), \quad u(0)=u_0,$$

en posant

$$u^{n+1}=u^n+\frac{h}{2}\left(f(t^n,u^n)+f(t^{n+1},u^{n+1})\right)$$

- Montrer que l'on peut écrire ce schéma comme un schéma à un pas

$$u^{n+1} = u^n + h\,\phi(t^n,u^n,h),$$

  où u^{n+1} est bien défini et de manière unique.

- Montrer que ce schéma est consistant.

- Montrer que ce schéma est stable.

- Montrer que ce schéma est d'ordre deux, c'est-à-dire

$$\|R(t^n,h)\| = \left\| \frac{u(t^n+h)-u(t^n)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(t^n,u(t^n)) + f(t^n+h,u(t^n+h))\right) \right\| \le Ch^2$$

On pourra montrer auparavant que la formule des trapèzes est d'ordre trois: pour une fonction g aussi régulière que nous le souhaitons

$$\left\| \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2}\left(g(a)+g(b)\right) \right\| \le C(b-a)^3.$$

- Montrer que cette méthode conduit à calculer des points $M^n = (x^n, y^n)$ dont les coordonnées vérifient

$$\begin{bmatrix} x^n \\ y^n \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+(h/2)^2)^n} A^{2n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 1 & -h/2 \\ h/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

et de plus $|x^n|^2 + |y^n|^2 = 1$.

2 Les systèmes Hamiltoniens

Nous nous intéressons au système Hamiltonien suivant

$$\begin{cases} p'(t) = -\nabla U(q(t)) \\ q'(t) = +\nabla T(p), \end{cases}$$

où U et T sont des fonctions $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, ∇U et ∇T sont Lipschitziennes.

Nous proposons le schéma suivant: d'abord $(p^0,q^0) = (p_0,q_0) \in \mathbb{R}^2$ donné et

$$\begin{cases} p^{n+1} - p^n = -\Delta t\, \nabla U(q^n) \\ q^{n+1} - q^n = +\Delta t\, \nabla T(p^{n+1}) \end{cases}$$

a) Montrer que ce schéma peut s'écrire comme un schéma à un pas du type

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\, \phi(t^n, u^n, \Delta t)$$

avec $u^n = (p^n, q^n)$. Expliciter la fonction ϕ

b) Monter que ce schéma est *consistant*.

c) Monter que ce schéma est *stable*, c'est-à-dire que ϕ est Lipschitzienne par rapport à u^n

$$|\phi(t,u,\Delta t) - \phi(t,v,\Delta t)| \le \Gamma\, |u-v|.$$

d) En déduire que le schéma est convergent.

e) Appliquer ce schéma au problème du pendule $x'' = -\sin(x)$.

3 Correction des exercices

Exercice 2.

1. Nous posons $u^n = (p^n, q^n)$ et $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ alors nous avons

$$\phi_1(t^n, u^n, \Delta t) = -\nabla U(q^n)$$

et

$$\phi_2(t^n, u^n, \Delta t) = \nabla T(p^n - \Delta t\, \nabla U(q^n)).$$

Le schéma est bien explicite et à un pas.

2. Pour la consistance, nous vérifions bien que la fonction ϕ définie ci-dessus est bien continue en $(t^n, u^n, \Delta t)$. En effet, les fonction U et T sont au moins de classes C^1 et donc ϕ_1 et ϕ_2 sont continues. Il reste à vérifier que pour $u = (p, q)$

$$\phi_1(t, u, 0) = -\nabla U(q)$$

et

$$\phi_2(t, u, 0) = \nabla T(p - 0 \times \nabla U(q)) = \nabla T(p).$$

D'après le théorème du cours le schéma est bien consistant.

3. Pour la stabilité nous vérifions bien que ϕ est Lipschitzienne par rapport à u. En effet, pour $u = (p, q)$ et $v = (r, s)$

$$\|\phi_1(t, u, \Delta t) - \phi_1(t, v, \Delta t)\| = \| - \nabla U(q) + \nabla U(s)\| \leq \Gamma_1 \|q - s\| \leq \Gamma_1 \|u - v\|,$$

car ∇U est Lipschitzienne.

De plus,

$$\|\phi_2(t, u, \Delta t) - \phi_2(t, v, \Delta t)\| = \|\nabla T(p - \Delta t \nabla U(q)) - \nabla T(r - \Delta t \nabla U(s))\| \leq \Gamma_2 \|p - \Delta t \nabla U(q) - r + \Delta t \nabla U(s)\|,$$

ce qui donne

$$\|\phi_2(t, u, \Delta t) - \phi_2(t, v, \Delta t)\| \leq \Gamma_2 (1 + \Delta t \Gamma_1)\|u - v\|.$$

4. Le schéma est consistant et est stable dans le sens où la fonction ϕ est Lipschitzienne, donc d'après le théorème du cours le schéma est convergent.

5. On prend $q = x$ et $p = x'$ d'où $T(p) = p^2/2$ et $U(q) = -\cos(q)$