Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Calcul Différentiel Printemps 2010

T.D. Série n°1 :
Préliminaires: rappels de topologie

Exercice I. (Espaces de Banach)

Montrer que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) suivants, munis des normes indiquées sont des espaces de Banach.

(a) $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions définies sur un ensemble X, à valeurs dans $\mathbb{K}$, bornées, muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{x \in X} \mid f(x) \mid$.

(b) $\mathscr{C}(T, \mathbb{K})$ ensemble des fonctions continues sur un espace métrique compact T à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{x \in T} \mid f(x) \mid$.

(c) $l^\infty(\mathbb{K})$ ensemble des suites bornées d'éléments de $\mathbb{K}$, normé par $x = (x_n) \mapsto \|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \mid$.

(d) $l^1(\mathbb{K})$ ensemble des suites (x_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que la série de terme général x_n soit absolument convergente, normé par $x = (x_n) \mapsto \|x\| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mid x_n \mid$.

Exercice II. (Applications linéaires et continues)

(a) Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : E \to E$ l'application linéaire définie par: pour tout $f \in E,$ pour tout $x \in [0,1],$ $\varphi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\|$.

(b) Soit F l'espace vetoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues bornées, muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$.

Soit G l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornées, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée appartient à F. Nous définissons la norme $f \mapsto \|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ sur G et une applications linéaire $\Phi : G \to F$ telle que $\Phi(f) = f'$.

Montrer que Φ est continue et calculer $\|\Phi\|$. (*Indication: penser à utiliser la suite* (f_n) *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(nx)$, $n \geq 1$).

Exercice III. (Applications bilinéaires et continues)

(a) Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi(x,y) = < x, y >= \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$ (produit scalaire). Montrer que ϕ est une application bilinéaire et continue et trouver $\|\phi\|$.

(b) Soit E un espace vectoriel normé et notons $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \times E' \to \mathbb{R}$ donnée par $\varphi(x,u) = u(x)$. Montrer que φ est bilinéaire et continue et que $\|\varphi\| \leq 1$.

Exercice IV. (Applications non-linéaires continues)

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

(a) Montrer que l'application $\varphi : E \to E$ donnée par $\varphi(u)(x) = u^2(x), \quad \forall\, u \in E$, $\forall\, x \in [0,1]$ est bien définie et continue.

(b) Plus généralement, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que l'application $\phi : E \to E$ donnée par $\phi(u)(x) = f(u(x)), \quad \forall\, u \in E,\ \forall\, x \in [0,1]$ est bien définie et continue.

Exercice V. (Série absolument convergente)

Soient E un espace normé et (u_n) une suite de E. Nous rappellons qu'une série de terme général u_n (ou, par abus série $\sum u_n$ ou encore série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) est convergente, de somme $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, si la suite (s_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} u_m$ est convergente, de limite s. De plus, la série de terme général u_n est absolument convergente si la série à termes positifs de terme général $\| u_n \|$ est convergente.

(a) Supposons que E soit un espace de Banach.
Montrer que toute série absolument convergente est convergente.

(b) Supposons que E soit une algèbre de Banach (autrement dit, que E soit une algèbre munie d'une norme $\| \,.\, \|$ telle que $\| xy \| \leq \| x \| \, \| y \|$, pour tout $(x,y) \in E^2$, et $(E, \| \,.\, \|)$ complet). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries (à termes dans E) absolument convergentes. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{m=0}^{n} u_m v_{n-m}$.

Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$.

Exercice VI. (Matrices)

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(a)* Montrer que le fait de poser pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\| A \| = n \displaystyle\max_{1 \leq i,j \leq n} | a_{ij} |$, définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

(b) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente (par convention $A^0 = I$, I étant la matrice unité). Par définition, nous notons sa somme $exp(A)$ ou e^A.

(c) Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui COMMUTENT (autrement dit, tels que $AB = BA$), nous avons $exp(A+B) = exp(A)exp(B)$. En déduire que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $exp(A)$ est inversible. Que vaut alors $(exp(A))^{-1}$?

Exercice VII. (Isomorphismes)

Soient E et F des espaces de Banach, $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F, et $Isom(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes d'espaces normés de E sur F.

(a) Soit $1_E = id_E$. Montrer que si $v \in \mathscr{L}(E) (= \mathscr{L}(E,E))$ est telle que $\|1_E - v\| < 1$, alors $v \in Isom(E,E)$. Indication: utiliser le terme général $(1_E - v)^n$.

(b) En déduire que $Isom(E,F)$ est un ouvert (éventuellement vide !) de $\mathscr{L}(E,F)$. Pour ce faire, nous pourrons montrer que si $Isom(E,F) \neq \emptyset$, et si $u_0 \in Isom(E,F)$, alors $\mathscr{B}(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}) \subset Isom(E,F)$.