Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n°1 :
Équations différentielles linéaires

L'objectif de cette série d'exercices est de présenter différentes méthodes de résolution de certaines équations différentielles linéaires, en particulier les équations à coefficients constants.

Exercice I. (Équations linéaires scalaires) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad (E)$$

(a) Donner la solution générale de (E) (commencer par étudier le cas homogène $b = 0$).
(b) Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Donner une solution de (E) tel que $x(t_0) = x_0$. Est-elle unique? Donner son domaine de définition.
(c) Application: résoudre $x'(t) = x(t) + t, \quad x(0) = 1$.

Exercice II. (Systèmes d'équations linéaires à coefficients constants) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to M_n(\mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On considère le système linéaire déquations différentielles

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t), \forall t \in I.(E)$$

(a) On suppose $b = 0$. Montrer alors que l'ensemble des solutions de (E)forme un espace vectoriel. que dire de (E) lorsque $b \neq 0$?
On suppose par la suite que $b = 0$. Soit $\tau \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}$. On admettra par la suite que le problème

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(\tau) = X_0,$$

possède une solution unique.
(b) Montrer que (E) possède n solutions linéairement indépendantes sur I et que toute solution de (E) est combinaison linéaire de ces n solutions.
(c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) forme un espace vectoriel de dimension n.

Exercice III. (Systèmes à coefficients constants)
Dans cet exercice, on supposera que $A(t) = M, \forall t \in I$ (système différentiel à coefficients constants) et $b = 0$.
(a) Si $M_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ (M matrice diagonale), donner la solution générale de (E) et donner une base de solutions de (E).

(b) Si M est diagonalisable, donner une méthode pour résoudre (E) et donner une base de solution de (E).

(c) Un exemple réel: soit M_1 la matrice définie par

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles. Donner alors une base de solutions *réelles* de $X'(t) = MX(t)$.

(d) Un exemple complexe: soit M_2 la matrice définie par

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. Donner alors une base de solutions *complexes* et une base de solutions *réelles* de $X'(t) = MX(t)$.

Exercice IV. (Matrice fondamentale)

On revient au cadre général $X'(t) = A(t)X(t)(E)$ et on note $\Phi(t)$ la matrice formée par n solutions indépendantes de (E). On appelle Φ la matrice fondamentale du système (E).

(a) Vérifier que $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

(b) Pour $n = 2$, montrer que $(\det\big(\Phi(t)\big)' = \mathrm{tr}\big(A(t)\big)\det\big(\Phi(t)\big)$.

En fait, cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (admis).

(c) En déduire que pour tout $t, \tau \in I$,

$$\det\big(\Phi(t)\big)\det\big(\Phi(\tau)\big)\exp\Big(\int_\tau^t \mathrm{tr}\big(A(s)\big)ds\Big).$$

(d) En déduire que Φ est une matrice fondamentale si et seulement si il existe $\tau \in I$ tel que $\det\big(\Phi(\tau)\big) \neq 0$.

(e) Montrer que si Φ_1 et Φ_2 sont deux matrices fondamentales alors il existe $C \in M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $t \in I$, $\Phi_1(t) = \Phi_2 C$.

Exercice IV. (Formule de Duhamel)

Le but de cet exercice est de montrer que, connaissant une matrice fondamentale Φ, on sait résoudre les problèmes inhomogènes $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$. Pour fixer les idées, on choisit Φ telle que $\Phi(0) = Id$

(a) On pose $X(t) = \Phi(t)Y(t)$: montrer que Y vérifie $\Phi(t)Y'(t) = b(t)$.

(b) Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Donner la solution de $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ tel que $X(0) = X_0$.

(c) Donner la solution générale de (E) lorsque $A(t) = M_1$ (définie dans l'exercice III), b quelconque et $X_0 = (111)^T$.

(d) Même question pour $A(t) = M_2$.