Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Science et Technologie
Spécialité Mathématiques
Option: Calcul différentiel 2009-2010

Série 2:
Calcul des différentielles

Exercice 1.
Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle:
a) $f_1 : I\!\!R^n \to I\!\!R^m, \quad f_1(x) = Ax + b$, avec
$A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!\!R)$, $b \in I\!\!R^m$ données.
b) $f_2 : E \to I\!\!R, \quad f_2(u) = \int_0^1 u(x)\,dx + 3u(0)$ avec
$E = C([0,1], I\!\!R)$ muni de la norme supremum $\|\cdot\|_\infty$.
c) $f_3 : \mathcal{M}_n(I\!\!R) \times I\!\!R^n \to I\!\!R^n, \quad f_3(A,b) = Ab$
d) $f_4 : E^3 \to E, \quad f_4(u,v,w)(x) = (x^2+2)u(x)v(x)\int_0^1 a(t)w(t)\,dt + u(0)$ avec
E comme en **b)** et $a \in E$ donnée.

Exercice 2.
Soit $f : I\!\!R^2 \to I\!\!R^2$ donnée par

$$f(x_1, x_2) = \Big(x_1^2 \sin(x_2), \quad x_1 + \exp(x_2)\Big)$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $I\!\!R^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 3.
Nous notons dans la suite par $|x|$ la norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in I\!\!R^n$.
a) L'application $f_1 : I\!\!R^2 \to I\!\!R$ définie par $f_1(x_1,x_2) = \dfrac{x_1x_2}{|x|^2}$ si $x \neq (0,0)$; $f_1(0,0) = 0$ a-t-elle des dérivées partielles premières en (0,0)? Est-elle continue en (0,0)? Est-elle différentiable en (0,0)?
b) Mêmes questions avec $f_2 : I\!\!R^2 \to I\!\!R$ définie par $f_2(x_1,x_2) = \dfrac{x_1x_2}{|x|}$ si $x \neq (0,0)$; $f_2(0,0) = 0$.
c) Soit $f_3 : I\!\!R^2 \to I\!\!R$ définie par $f_3(x_1,x_2) = |x|^2 \sin \dfrac{1}{|x|}$ si $x \neq (0,0)$; $f_3(0,0) = 0$. Montrer que f est différentiable en (0,0). Ses dérivées partielles premières sont-elles continues en (0,0)?

Exercice 4.
Soit K un ensemble compact en $I\!\!R^n$ et $E = C(K, I\!\!R)$ muni de la norme supremum $\|\cdot\|$. Soit $g : I\!\!R \to I\!\!R$ de classe C^1. On définit l'application $\phi : E \to E, \quad \phi(u)(x) = g(u(x)) \quad \forall u \in E, \forall x \in K$.
a) Montrer que ϕ est bien définie.
b) Montrer que ϕ est différentiable et calculer sa différentielle.
c) Application:
Calculer les différentielles des applications $\phi_1, \phi_2 : E \to E$ définies par
$\phi_1(u)(x) = u^p(x)$ avec $p \in I\!\!N^*$
$\phi_2(u)(x) = \exp(u(x)) + 3\sin(u(x_0))$ avec $x_0 \in K$ donné.

Exercice 5.
a) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $\varphi_1 : E \times E \to F$ une application bilinéaire et continue et $f_1 : E \to F$ la forme quadratique associée à φ_1 (c'est à dire: $f_1 : E \to F,\ f_1(x) = \varphi_1(x,x),\ \forall\, x \in E$).
Montrer que f_1 est différentiable et calculer sa différentielle. Que devient cette différentielle si φ_1 est symétrique? (c'est à dire: $\varphi_1(x,y) = \varphi_1(y,x),\ \forall\, x, y \in E$)
b) (Généralisation de **a)**): Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $n \in I\!N^*$,
$\varphi_2 : E \times E \cdots \times E \to F$ une application n-linéaire et continue et $f_2 : E \to F$ l'application définie par $f_2(x) = \varphi_2(x, x, \cdots x),\ \forall\, x \in E$.
Montrer que f_2 est différentiable et calculer sa différentielle. Que devient cette différentielle si φ_2 est symétrique? (c'est à dire: $\forall x_1, x_2, \cdots x_n \in E$ et pour toute permutation σ de $\{1, 2, \cdots n\}$ on a $\varphi_2(x_1, x_2, \cdots x_n) = \varphi_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots x_{\sigma(n)})$.
c) (*Application:*) Soit $f_3 : \mathcal{M}_n(I\!R) \to \mathcal{M}_n(I\!R)$ définie par $\varphi_p(A) = A^p$ ($p \in N^*$). Montrer que f_3 est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 6.
a) Soit F un espace vectoriel normé et $\varphi : F^2 \to I\!R$ une application bilinéaire, continue et symétrique et soit q la forme quadratique associée. On suppose en plus que φ est positive
($\varphi(x,x) \geq 0,\ \forall x \in F$) et on définit la fonction
$f : F \to F, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+q(x)}}$.
Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
b) (*Application:*) Soit E comme en Exo 1 b). Trouver la différentielle de l'application

$$g : E \to E, \quad g(u)(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{1 + \int_0^1 t^2 u^2(t)dt}}.$$

Exercice 7.
Soient E un espace vectoriel normé, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continues de E et $f : E \to \mathcal{L}(E)$ une application différentiable. On définit $\varphi : E \to E$ par $\varphi(x) = f(x)(x),\ \forall x \in E$.
a) Montrer que φ est différentiable sur E et calculer sa différentielle:
  a1) diréctement (avec la définition de la différentiabilité)
  a2) en écrivant φ comme la composée d'applications différentiables judicieusement choisies.
b) On considère le cas particulier où $E = I\!R^2$ et où f est l'application qui à $x = (x_1, x_2) \in I\!R^2$ associe l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $I\!R^2$ est

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la différentielle de φ:
  b1) en appliquant **a)**
  b2) en évaluant $f(x)(x)$.

Exercice 8.
Soient E et F des espaces de Banach. On rappelle que $Isom(E,F)$ (l'ensemble des isomorphismes d'espaces normés) est un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $f : Isom(E,F) \to Isom(F,E)$ définie par $f(u) = u^{-1}$ est différentiable sur $Isom(E,F)$ et pour tout $h \in \mathcal{L}(E,F)$, $df_u(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$.