Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n°2 : Équations différentielles linéaires (suite)

L'objectif de cette série d'exercices est de poursuivre l'étude des équations différentielles linéaires: cas des systèmes à coefficients constants et non diagonalisables, étude qualitative (portrait de phase) et équations d'ordre n.

Exercice I. (Systèmes non diagonalisables)

Soit le système différentiel $X'(t) = J_n(\lambda)X(t)$ où $J_n(\lambda) \in M_n(\mathbb{R})$ et $J_n(\lambda) = \lambda Id + N$ où $N \in M_n(\mathbb{R})$ et $N_{i,j} = \delta_{j,i+1}$.

(a) Donner une matrice fondamentale de solutions pour $n = 2, 3$.

(b) Etendre ce résultat au cas $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

(c) Même question pour

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} X(t),$$

et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice II. (Portrait de phase de systèmes linéaires dans le plan)

Dans cet exercice, on considère un système différentiel dans le plan $X'(t) = AX(t)$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de tracer le *portrait de phase* de ce système, i.e. toutes les trajectoires possibles des solutions.

(a) Cas 1: $A = \lambda Id$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que toutes les trajectoires sont des droites passant par 0. Donner le sens de parcours selon le signe de λ.

(b) Cas 2: $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ avec $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Montrer que les trajectoires sont incluses dans des courbes de la forme $K_1 x^{\lambda_2} = K_2 y^{\lambda_1}$, $K_i, i = 1, 2$ des constantes. Tracer le portrait de phase en indiquant le sens de parcours et en précisant les directions asymptotiques.

(c) Cas 3: même question pour $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, -\lambda_2)$ avec $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

(d) Cas 4: montrer que les trajectoires de

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} X(t).$$

sont des spirales (on posera $z(t) = X_1(t) + iX_2(t)$ et on écrira une équation différentielle sur z).

(e) Cas 5: étudier les trajectoires pour $X'(t) = J_2(\lambda)X(t)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

(f) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que pour étudier les trajectoires de $X'(t) = AX(t)$, on peut toujours se ramener à un des cas précédents.

Exercice III. (Équations linéaires d'ordre n) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a_i : I \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$. On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n sous la forme

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)x(t) = b(t), \quad \forall t \in \mathbb{I} \quad (E)$$

(a) On posant $X(t) = (x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)})$: montrer qu'il existe $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ tel que x est solution de (E) si et seulement si X est solution d'un système différentiel $X'(t) = AX(t) + B(t)$. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) homogène $(b = 0)$ forment un espace vectoriel de dimension n.

(b) On suppose que les $a_i, i = 1..n$ sont des constantes (et donc A est une matrice à coefficients constants). Montrer que le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$P_A(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n.$$

(c) Montrer que les espaces propres de A sont nécessairement de dimension 1 et que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont réelles et distinctes.

Exercice IV. (Équations différentielles linéaires d'ordre 2)

Dans cet exercice, on présente quelques méthodes pour résoudre des différentielles d'ordre 2 de la forme

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = f(t), \quad \forall t \in I, \quad (E)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, a_i : I \to \mathbb{R}, i = 1, 2$ sont des fonctions continues.

(a) On suppose connue une solution particulère x_1 de l'équation homogène $(E)_0$ $(f = 0)$: montrer qu'on obtient une autre solution de $(E)_0$ x_2 en posant $x_2(t) = y(t)x_1(t)$.

(b) Soit x_1, x_2 deux solutions de $(E)_0$ montrer, en utilisant l'interprétation matricielle de l'exercice précédent que (x_1, x_2) forment une base de solution de $(E)_0$ si et seulement si il existe $\tau \in I$ tel que

$$W(x_1, x_2)(\tau) = \det \begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ x_1'(\tau) & x_2'(\tau) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Remarque: La fonction W est appelée *Wronskien*.

(c) Montrer que W vérifie l'équation différentielle $W'(x_1, x_2)(t) = -a(t)W(x_1, x_2)$.

(d) Pour calculer une solution de l'équation (E) pour $f \neq 0$, on fait une méthode de variation de la constante et on cherche une solution de (E) sous la forme $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2x_2(t)$ en imposant la contrainte $c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0$. Montrer alors que x est solution si $c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2(t) = f(t)$. Résoudre le système linéaire sur c_1', c_2' et donner la forme d'une solution générale de (E).

(e) Montrer, en écrivant matriciellement l'équation, que cette méthode revient en fait à écrire la formule de Duhamel (cf exercice V de la feuille de TD1).

(f) Exemple 1: donner la forme générale des solutions de $x''(t) + x(t) = f(t)$.

(g) Exemple 2: donner la forme générale des solutions de $x^{(3)}(t) - x'(t) = f(t)$.

Exercice V. (Une équation différentielle linéaire d'ordre 3)

Dans cet exercice, on considère une équation différentielle linéaire de la forme

$$x^{(3)}(t) + x''(t) - x'(t) - x(t) = 0, \quad \forall t \in I, \quad (E).$$

(a) Montrer qu'on peut reformuler cette équation sous la forme d'un système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que $P_A(X) = (X-1)(X+1)^2$ et $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A - Id) \oplus \mathrm{Ker}(A + Id)^2$ et en déduire qu'il existe une matrice P tel que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J.$$

Remarque: on appelle J la *matrice réduite de Jordan* de A. On peut en fait étendre ce type de résultat de réduction à toute matrice complexe.

(c) Calculer une base de solutions de $X'(t) = JX$. En déduire une base de solutions de (E).

Exercice VI. (Résolution à l'aide des séries)

(a) Exemple 1: résoudre l'équation différentielle linéaire $x^{(3)}(t) - x'(t) = 0$ en cherchant des solutions sous la forme de séries $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Donner le rayon de convergence de ces séries.

(b) Exemple 2 (Équation de Hermite): chercher les solutions de

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0, (H) \quad \text{avec} \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(c) Etudier le rayon de convergence des séries solutions de (H). Montrer qu'il existe une solution polynomiale si $\alpha = N$.

Exercice VII. (Théorème de Fuchs): Difficile

On se propose de calculer formellement une base de solutions de léquation différentielle du second ordre

$$t^2 a(t) y''(t) + t b(t) y'(t) + c(t) y(t) = 0, \quad (E)$$

où a, b, c sont données par $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \quad c(t) = \sum_{n=0} c_n t^n$ et a_0, b_0, c_0 sont non nuls.

(a) On suppose $a_n = b_n = c_n = 0, \forall n \geq 1$. Calculer une base de solutions de (E) en cherchant les solutions sous la forme $z(t) = t^\lambda$.

(b) Dans le cas général, montrer qu'il existe une solution de (E) sous la forme $z(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n$ où λ est racine de

$$a_0 \lambda(\lambda - 1) + b_0 \lambda + c_0 = 0.$$

(c) En déduire une base de solutions de (E).