Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Science et Technologie
Spécialité Mathématiques
Option: Calcul différentiel 2009-2010

Série 3:

théorème des accroissements finis et applications

Exercice 1.

Soit $E_1, ..., E_n, F$ des espaces normés et $\Phi : E_1 \times ... \times E_n \to F$ une application n-linéaire continue.
a) Calculer les applications différentielles partielles de $D_i\Phi$ de Φ et montrer qu'elles sont continues.
b) Montrer que Φ est C^1 sur $E_1 \times ... \times E_n$.

Exercice 2.

Soit E et F des espaces normés, U ouvert de E, $a \in U$, $f : U \to F$ une fonction continue sur U, différentiable en tout point de $U \setminus \{a\}$ et telle que $\lim_{x\to a} df_x$ existe. Montrer que f est différentiable en a.

Exercice 3.

Soit E un espace normé, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : \Omega \to E$. On dira que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω si, pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et un réel $k > 0$ tels que, $\forall (t, x) \in V$, $\forall (t, x') \in V$,

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq k \|x - x'\|.$$

Soit $f : \Omega \to E$ une application continue, telle que, $\forall (t, x) \in \Omega$, $d_2 f_{(t,x)}$ existe et $d_2 f : \Omega \to \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ soit continue. Montrer que f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω. (remarque: c'est vrai en particulier si $f \in C^1(\Omega, E)$). Ce résultat est utile en théorie des équations différentielles.

Exercice 4.

Soit E et F des espaces normés, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application différentiable dans U, $x_0 \in U$. On suppose que df est continue au point x_0. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 < \|h\| \leq \eta$ et $0 < \|k\| \leq \eta$ entraînent

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0 + k) - df_{x_0}(h - k)\| \leq \epsilon\|h - k\|.$$

Indication: On pourra utiliser la fonction $x \mapsto f(x_0 + x) - df_{x_0}(x)$ définie sur un voisinage ouvert V de 0.

Exercice 5.

Soit $\mathcal{O}$ une ouvert convexe de E espace vectoriel normé et $f_n : \mathcal{O} \rightarrow$ F une suite d'applications différentiables dans un *espace de Banach* F. On suppose

i) Il existe $a \in \mathcal{O}$ tel que $f_n(a)$ converge,
ii) La suite $D\,f_n : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ converge uniformément sur chaque borné de $\mathcal{O}$ vers une application $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}\,(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{O}$, la suite $f_n(x)$ converge vers une limite qu'on notera $f(x)$.
b) Montrer que f_n converge uniformément vers f sur toute partie bornée convexe de $\mathcal{O}$.
c) Montrer que f est différentiable et $D\,f = g$.

Exercice 6.

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace normé et U un ouvert de E. Pour tout espace normé $(X, \|.\|_X)$ et toute fonction ϕ de U dans X, on posera $\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in U} \|\phi(x)\|_X$. Soit $(F, \|.\|_F)$ un espace normé et on note G l'espace vectoriel des fonctions $f \in C^1(U, F)$ telles que f et df soient bornées sur U. On norme G par $\|f\|_G = \|f\|_\infty + \|df\|_\infty$.

On considère l'application (dite "fonction d'évaluation") $e : G \times U \rightarrow F$ définie par $e(f, x) = f(x)$. On norme $G \times E$ par $\|(f, x)\|_{G \times E} = \max(\|f\|_G, \|x\|_E)$.

Montrer que e est de classe C^1 sur $G \times U$.