Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n°3 :
Équations différentielles non linéaires

Dans cette série, on présente quelques familles d'équations différentielles ordinaires non linéaires dont on peut calculer les solutions "explicitement" (ces solutions seront parfois définies de manire implicite).

Exercice I. (Équations à variables séparables $y' = f(x)g(y)$)

Principe Soit y_p les zéros de g. Alors $y(x) = y_p$ sont des solutions stationnaires. En se plaçant maintenant entre deux zéros consécutifs de g, on a $g(y) \neq 0$. On écrit alors $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Soit $G(y) = F(x) + \lambda$ où λ est une constant arbitraire, F primitive de f et G primitive de $\frac{1}{g}$. Le fonction G étant strictement monotone possède un inverse G^{-1}: $y = G^{-1}(F(x) + \lambda)$. Attention, le résultat obtenu n'est pas toujours une forme *explicite* de la solution.

En se ramenant par un changement de variable à une équation à variables séparables, résoudre les équations suivantes

$$xy' + y = \frac{1}{x^2y^2},\ x + y = \big(\frac{y'-1}{y'+1}\big)^2,\ (2x^2y + x)y' = 3y - 2xy^2,\ y' = \tan(x + y),$$
$$(xy' - 2y)^2 = x^2(x^4 - y^2),\ (xy^2 + 1)y' = y^3,\ xy' - y = y^2 - x^2.$$

Exercice II. (Équations homogènes $y' = f(\frac{y}{x})$)

Principe On pose $u = \frac{y}{x}$ et on se ramène au cas précédent.

Résoudre les équations homogènes

$$xyy' - y^2 = (x + y)^2e^{-\frac{y}{x}},\ 4x^2y(xy' - y) + x^4 - y^4 = 0,\ (3y^2 - x^2)y'^2 - 4xyy' + x^2 = 0,$$
$$y'(y + xy')^2 = y^2,\ x(2y - x)y' = y^2,\ y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Exercice III. (Équations de Bernoulli $y' = p(x)y+q(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 1$)

(a) On suppose que $y > 0$. Montrer que $z = y^{1-\alpha}$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{1}{1-\alpha}z' = p(x)z + q(x).$$

(b) En déduire la forme des solutions de $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 1$.
(c) Résoudre explicitement les équations différentielles

$$\sqrt{x}y' - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0,$$

$$(1 - \sin x \cos x)y' + y^2 \cos x - y + \sin x = 0.$$

Exercice IV. (Équations de Ricatti $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$)

(a) On suppose qu'on connait un solution particulière y_p. On cherche alors y sous la forme $y = y_p + z$. Montrer que la fonction z vérifie une équation de Bernoulli.

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$(1 - x^3)y' + x^2 y + y^2 - 2x = 0,$$

sachant que $x \mapsto x^2$ est une solution particulière.