Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n°4 : Étude qualitative de quelques système différentiels

L'objectif de cette série d'exercices est d'étudier les solutions de quelques équationd différentielles intervenant en physique (mécanique) ou en biologie (dynamique des populations)

Exercice I. (Pendule oscillant)

Le but de cet exercice est de dresser le portrait de phase de l'équation différentielle décrivant le mouvement d'un pendule oscillant rigide

$$\theta''(t) + w_0^2 \sin(\theta(t)) = 0, \quad (P)$$

où $w_0^2 = gl$, g est la constante de pesanteur et l la longueur du pendule. Dans la suite, on supposera $w_0 = 1$.

(a) Montrer que si θ est solution de (P) alors $E(t) = \dfrac{\theta'(t)^2}{2} + 1 - \cos\big(\cos(\theta(t))\big)$ est une constante au cours du temps qu'on notera E_i. C'est en fait l'énergie totale du système.

(b) On suppose $E_i \in [0, 2[$. On écrit $E_i = 1 - \cos(\theta_0)$: tracer quelques courbes de niveau $\frac{\theta'(t)^2}{2} + 1 - \cos\big(\cos(\theta(t))\big) = E_i$ pour $\theta \in] - \pi, \pi[$. Montrer que ces courbes coupent perpendiculairement l'axe des abscisses. On donnera le sens de parcours des trajectoires. Que dire des solutions de (P) tel que $\theta'(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0$.

(c) Pour $E_i = 1 - \cos(\theta_0)$ donné, montrer que la période de la solution est donnée par l'intégrale

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}.$$

(d) On suppose $E_i > 0$: tracer les courbes de niveau $\frac{\theta'(t)^2}{2} + 1 - \cos\big(\cos(\theta(t))\big) = E_i$ pour quelques valeurs de θ_i. Les solutions associées sont-elles périodiques?

(e) Tracer les courbes de niveau $E_i = 2$: à quelle type de solutions correspondent-elles?

Exercice II. (Modèle de Lotka Volterra)

Le but de cet exercice est de décrire quelques modèles simples de dynamique de population.

Equation logistique. On considère l'équation différentielle $x'(t) = \mu x(t) - Kx(t)^2$ avec $K, \mu > 0 (L)$. La première partie $\mu x(t)$ correspond à une croissance exponentielle de la population et $-Kx^2$ est un facteur limitant (dû par exemple à une quantité limitée de nourriture).

(a) Déterminer les solutions stationnaires de L et intégrer cette équation. Montrer que si $0 < x(0) < \mu/K$ alors $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mu/K$ et si $x(0) > \mu/K$, on a aussi $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mu/K$.

Modèle de Lotka Volterra. Considérons un modèle de proie (dont la densité est notée x)/ prédateurs (dont la densité est notée y): en l'absence de prédateurs, les proies croissent indéfiniment et en l'absence de proies, les prédateurs meurent. La rencontre des deux espèces est évidemment avantageuse pour les prédateurs, à l'inverse des proies. On obtient alors un modèle (de Lotka Volterra) sous la forme

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \quad y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t).(LV)$$

(b) On se restreint au cas $x \geq 0, y \geq 0$. Déterminer les solutions stationnaires de (LV).
(c) Montrer que si (x, y) est solution de (LV) alors on a

$$H(x(t), y(t)) = a\ln(y(t)) - by(t) + d\ln(x(t)) - cx(t) = H_i$$

où H_i est une constante.
(d) Montrer que les courbes de niveau de H sont des courbes fermées. Les représenter dans le plan des phases (x, y) et donner le sens de parcours. En déduire que toutes les solutions de (LV) sont périodiques.

Exercice III. (Mouvements proches de l'équilibre de pendules couplés)

On s'intéresse aux petites oscillations d'amplitudes angulaires ϕ_1, ϕ_2 d'un système de deux pendules attachés de masses m_1, m_2 et de longueur l_1, l_2. On note respectivement T et V l'énergie cinétique et le potentiel d'un tel système:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2{\phi_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2{\phi_2'}^2 + m_2 l_1 l_2 \phi_1'\phi_2', V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 \phi_2^2.$$

et $L = T - V$.
(a) Écrire les équations du mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \phi_i'} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad i = 1, 2,$$

sous forme matricielle

$$A\begin{pmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = 0.(PC)$$

(b) Proposer une méthode de résolution de système (on pourra écrire ce système sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1 ou alors chercher des solutions de (PC) à croissance exponentielle en temps). Faire une esquisse des différents modes propres.