Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Science et Technologie
Spécialité Mathématiques
Option: Calcul différentiel 2009-2010

Série 5:

Calcul des différentiellles d'ordre supérieur à 1

Exercice 1.
Soit $f : I\!R^2 \to I\!R^2$ définie par $f(x,y) = (x^4 + y^2,\ e^x \sin(y))$. Montrer que f est de classe C^2 et calculer $d^2 f_{(0,\pi)}((1,2),\ (0,1))$.

Exercice 2.
Montrer que les applications suivantes sont deux fois différentiables et calculer leur différentielles secondes:

a) $f_1 : I\!R^n \to I\!R$, $f_1(x) = x^T A x + b^T x + c$, avec $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$, $b \in I\!R^n$, $c \in I\!R$ données.

b) $f_2 : E^2 \to E$, $f_2(u,v)(x) = (x^2+2)u(x) \int_0^1 tv(t)\, dt$ avec $E = C([0,1], I\!R)$ muni de la norme supremum $\| \cdot \|_\infty$.

c) $f_3 : E \to I\!R$, $f_3(u) = \int_0^1 \sin(x) u^2(x)\, dx + [u(0) - 2]^2$

Exercice 3.
Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to F$ tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \to G$. On suppose que f est deux fois différentiable au point $a \in U$ et g est deux fois différentiable au point $f(a)$. On sait (cf. cours) que $g \circ f$ est deux fois différentiable au point a. Exprimer $d^2(g \circ f)_a(h,k), h, k \in E$, à l'aide des différentielles premières et secondes de f (resp. de g) en a (resp. en $f(a)$).

Exercice 4.
(Cf. Exo.7, Serie 2) Soient E un espace vectoriel normé, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continues de E et $f : E \to \mathcal{L}(E)$ une application deux fois différentiable. On définit $\varphi : E \to E$ par $\varphi(x) = f(x)(x)$, $\forall x \in E$.

a) Montrer que φ est deux fois différentiable sur E. Calculer sa différentielle seconde:
- **a1)** en utilisant la formule de Exo 3
- **a2)** en utilisant la définition et l'expression de la différentielle première (Cf. Exo.7, Serie 2)

b) On considère le cas particulier où $E = I\!R^2$ et où f est l'application qui à $x = (x_1, x_2) \in I\!R^2$ associe l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $I\!R^2$ est

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la différentielle seconde de φ:
- **b1)** en appliquant **a)**
- **b2)** en évaluant $f(x)(x)$.

Exercice 5.
On munit $I\!R^n$ du produir scalaire usuel $< \cdot, \cdot >$ et on rappelle qu'on appelle isométrie dans $I\!R^n$ tout endomorphisme S dans $I\!R^n$ tel que $< S(h), S(k) >=< h, k > \quad \forall\, h, k \in I\!R^n$. On rappelle aussi que toute isométrie est un automorphisme en $I\!R^n$. On notera par $\mathcal{O}(I\!R^n)$ l'ensemble de toutes les isométries sur $I\!R^n$.
Soient U un ouvert connexe de $I\!R^n$ et $H : U \to I\!R^n$ une fonction deux fois différentiable. On suppose qu'il existe $c \in I\!R^*$ et $T : U \to \mathcal{O}(I\!R^n)$ tels que $dH_x = c\,T(x),\ \forall\, x \in U$.
a) Montrer que $< d^2H_x(l, h),\, dH_x(k) > + < dH_x(h),\, d^2H_x(l, k) >= 0, \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, h, l, k \in I\!R^n$
b) En déduire (par permutation circulaire sur les vecteurs h, l, k) que
$< dH_x(h),\, d^2H_x(l, k) >= 0, \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, h, l, k \in I\!R^n$ puis que $d^2H_x = 0,\ \forall\, x \in U$.
c) En conclure que H est égale à la restriction à U de la composée d'une isométrie, d'une homothétie et d'une translation.

Exercice 6.
Soit $f : I\!R^n \to I\!R$ une fonction de classe C^m avec $m \in I\!N^*$.
Calculer $d^m f_x(h^{(1)}, h^{(2)}, \cdots h^{(m)}) \quad \forall\, x, h^{(1)}, h^{(2)}, \cdots h^{(m)} \in I\!R^n$.
Cas particulier
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1)$ avec $g : I\!R \to I\!R$ de classe C^m.

Exercice 7.
(Cf. Exo 4, Serie 2) Soit K un ensemble compact en $I\!R^n$ et $E = C(K, I\!R)$ muni de la norme supremum $\|\cdot\|$. Soit $g : I\!R \to I\!R$ de classe C^m, $m \in N^*$. On définit l'application $\phi : E \to E, \quad \phi(u)(x) = g(u(x)) \quad \forall u \in E, \forall x \in K$.
a) Montrer que ϕ est différentiable à l'ordre m et calculer $d^m\Phi$.
b) Application:
Calculer la différentielles d'ordre m de l'applications $\phi : E \to E$ définie par
$\phi(u)(x) = u^p(x)$ avec $p \in I\!N^*$