Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n°5 : Résolution de certaines équations aux dérivées partielles

L'objectif de cette série d'exercices est de résoudre certaines équations aux dérivées partielles à l'aide de changements de variables permettant de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de résoudre l'équation aux dérivées partielles:

$$x\,\frac{\partial w}{\partial x} + y\,\frac{\partial w}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2} \quad (E).$$

1. Montrer que $P : \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2/\{0\}$ défini par $P(r,\theta) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$ est une bijection et que P et P^{-1} sont différentiables. Calculer la matrice jacobienne de P.
2. On pose $u = w \circ P$: calculer les dérivées partielles de $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ en fonction de celle de w et en déduire une E.D.P. satisfaite par u.
3. Résoudre l'équation sur u et en déduire une solution générale de (E).

Exercice 2.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$: résoudre l'équation aux dérivées partielles: $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variable $X(x,y) = bx + ay$ et $Y(x,y) = bx - ay$.
2. Soit $c \in \mathbb{R}^*$: résoudre $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$, à l'aide du changement de variable précédent.

Exercice 3 (équation des ondes).

1. Donner la forme générale des solutions de léquation des ondes
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$
à l'aide du changement de variables $X(x,t) = x - ct$ et $Y(x,t) = x + ct$.
2. Résoudre ensuite l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ avec les conditions (position et vitesse) initiales
$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad \forall x \geq 0.$$
et la condition au bord $u(0,t) = p(t), \forall t > 0$ en utilisant la forme générale des solutions obtenue à la question 1.

3. Donner explicitement la solution pour $f(x) = \sin(x)$ et $g = p = 0$.

4. On suppose $g = p = 0$. Soit $b > 0$, on définit $f(x) = x/b$ si $0 \leq x \leq b$ et $f(x) = 2 - x/b$ si $b \leq x \leq 2b$ et $f(x) = 0$ si $x \geq 2b$. Dessiner la solution $u(x,t)$ pour différents temps $t = 0, \frac{b}{2c}, \frac{b}{c}, \frac{3b}{2c}, \frac{2b}{c}$: qu'observe-t-on?

Exercice 4 (équations de l'acoustique). Soit $\rho, c > 0$. On considère le système

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (S)$$

1. Montrer que u et p vérifient une équation des ondes. En déduire la forme générale des solutions de (S).

2. Retrouver les résultat en écrivant le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par $u_1 = u + \frac{p}{\rho c}$ et $u_2 = u - \frac{p}{\rho c}$.

Exercice 5 (équation de Laplace).

Soit $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère léquation de Laplace

$$\Delta w = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. On pose $u = w \circ P$, où P est le changement de variable en polaire défini à l'exercice 1. Montrer que
$$\Delta w \circ P = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

2. En déduire toutes les solutions de l'équation de Laplace de la forme $w(x,y) = \Phi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.