Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Introduction aux EDO/EDP Printemps 2010

T.D. Série n 6:
Transformée de Laplace

L'objectif de cette série d'exercices est de calculer les transformées de Laplace de certaines fonctions usuelles et d'utiliser la transformée de Laplace pour résoudre certaines équations différentielles et aux dérivées partielles.

Exercice 1 (Calcul de transformées de Laplace).

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $L[f]$ sa tranformée de Laplace par

$$L[f](p) = \lim_{s\to\infty} \int_0^s f(t)e^{-pt}dt.$$

1. Etant donnée une fonction f et $\tau > 0$, calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto f(t+\tau)$, $t \mapsto f(t\tau)$, $t \mapsto f(t)e^{t\tau}$ et $t \mapsto f'(t)$ en fonction de la transformée de Laplace de f.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique: calculer la transformée de Laplace de f en fonction de $\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$.
3. Calculer les transformées de Laplace de $\sin, \cos$.
4. Calculer la tranformée de Laplace de la fonction T périodique définie par
$$f(t) = 1, \quad \forall t \in [0, T/2[, \quad f(t) = -1, \quad \forall t \in [T/2, T[.$$
5. Soit $k \in \mathbb{N}$: montrer que $L[t^k](p) = \dfrac{k}{p}L[t^{k-1}](p)$ et en déduire la valeur de $L[t^k]$.
6. A l'aide de la question 1, montrer enfin que $L[\dfrac{t^m\, e^{\tau t}}{m!}](p) = \dfrac{1}{(p-\tau)^{m+1}}$.
7. Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: on définit un produit de convolution $(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$. Montrer que $L[f \star g](p) = L[f](p)L[g](p)$.

Exercice 2 (Résolution d'équations différentielles linéaires).

1. Soit x une fonction donnée: donner $L[x^{(n)}](p)$ en fonction de p et $L[x](p)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction donnée. Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre $x'(t) + ax(t) = f(t)$ avec $x(0) = x_0$.

3. Résoudre l'équation différentielle

$$x^{(2)}(t) + x(t) = 2\cos(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

4. Résoudre l'équation différentielle

$$x^{(3)}(t) + x'(t) = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

5. Résoudre le système différentiel

$$x'(t) + \omega y(t) = 1, \quad y'(t) - \omega x(t) = \sin(\omega t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

6. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Donner la forme générale des solutions de

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \cos(\omega t).$$

Exercice 3 (Résolution de l'équation des ondes). On va résoudre l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t), \quad \forall t > 0, \quad \forall x > 0,$$

avec les conditions initiales $u|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ et les conditions aux bords $u|_{x=0} = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Etant donnée une fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$, on définit $U(p,x)$ la tranformée de Laplace de u par rapport à t par $U(p,x) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}dt$ et on supposera que u est telle qu'on peut dériver U par rapport à x avec

$$\frac{\partial U}{\partial x}(p,x) = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt.$$

1. Donner la transformée de Laplace de l'équation des ondes.
2. En déduire que U est donnée par $U(p,x) = \dfrac{(1 - e^{-px/c})}{p^2} L[f](p)$.
3. Déterminer enfin u par transformée de Laplace inverse en distinguant les cas $x < ct$ et $x \geq ct$.

Exercice 4 (Résolution d'une équation de transport). Donner la solution de $\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) + u(t,x) = f(t), \quad \forall t > 0, \forall x \geq 0$ avec $u(x,0) = 1 - e^{-x}$ et $u(0,t) = 0$.